

Введение в теорию пересечений и мотивы Чжоу*

Александр Лузгарев

1 июля 2013 г.

Содержание

1 Кольца Чжоу: определение и свойства	3
1.1 Постановка задачи	3
Пересечение параболы с прямой, 3 • Первые проблемы, 4 • Теорема Безу, 5	
1.2 Основы алгебраической геометрии	6
Аффинные схемы, 6 • Схемы, 7	
1.3 Группы Чжоу	7
Порядки нулей и полюсов, 8 • Циклы и рациональная эквивалентность, 8 • Классы Чжэня линейных расслоений, 9 • Скручивающий пучок, 10 • Первые свойства групп Чжоу, 10 • Произведение в кольце Чжоу, 10	
1.4 Функториальность	12
Пушфорвард, 12 • Пулбэк, 12	
1.5 Отступление: эквивалентности на циклах и мотивы	13
Алгебраическая эквивалентность, 13 • Гомологическая эквивалентность, 14 • Численная эквивалентность, 14 • Категория соответствий, 14	
2 Примеры	15
2.1 ПЕРВЫЕ ПРИМЕРЫ	15
Аффинное пространство, 15 • Стратификации, 15 • Проективное пространство, 16	
2.2 ГРАССМАНИАН	17
Вложение в проективное пространство, 17 • Уравнения на грассманиан, 17 • Соотношения Плюккера, 18 • Клетки Шуберта, 20 • Вычисление кольца Чжоу $Gr(2, 4)$, 21	
2.3 ПРИЛОЖЕНИЯ	22
Четыре прямые в трехмерном пространстве, 22 • Многообразии Веронезе, 23 • Касательные к кубической кривой, 23 • Многообразии Сегре, 23 • Диагональ и график морфизма, 24 • Раздутие проективного пространства в точке, 25	

*Конспект лекций спецкурса весны 2013 г.; предварительная версия.

3	Мотивы Чжоу	27
3.1	КАТЕГОРИЯ МОТИВОВ ЧЖОУ	27
	Соответствия, 27 • Мотивы Чжоу, 28 • Подкрутка Тейта, 29	
3.2	ПРИМЕРЫ	29
	Мотив проективного пространства, 29 • Альтернативное построение мотивов Чжоу, 31 • Относительные клеточные многообразия, 31 • Мотив расщепимой квадрики, 32	
3.3	МОТИВ НЕРАСЩЕПИМОЙ КВАДРИКИ	33
	Общие соображения, 33 • Метод общей точки, 34 • Теорема нильпотентности Роста, 35 • Мотив Роста, 35	

Литература:

- David Eisenbud, Joe Harris, *3264 & All That: Intersection Theory in Algebraic Geometry*, draft book.
- William Fulton, *Introduction to Intersection Theory in Algebraic Geometry*, Cbms Regional Conference Series in Mathematics, AMS, 1984.
- William Fulton, *Intersection Theory*, 2nd ed., Springer, 1998.

1 Кольца Чжоу: определение и свойства

1.1 Постановка задачи

Теория пересечений учит правильному взгляду на пересечения алгебраических многообразий. Посмотрим на простейшие примеры.

1.1.1 Пересечение параболы с прямой

Рассмотрим параболу на плоскости с координатами (x, y) , задаваемую уравнением $y^2 - x = 0$, и попытаемся пересечь ее с вертикальной прямой $x = 1$. Видим две точки в пересечении: $(0, -1)$ и $(0, 1)$. При пересечении с прямой $x = 0$ видим одну точку: $(0, 0)$. Наконец, если дело происходит на плоскости \mathbb{Q}^2 над рациональными числами, прямая $x = 2$ вообще не пересекается с нашей параболой.

Как это выглядит на языке алгебраической геометрии? Плоскость соответствует K -алгебре $K[x, y]$, где K — основное поле. Парабола — это множество нулей идеала, порожденного многочленом $y^2 - x$, а вертикальная прямая $x = 1$ — множество нулей идеала, порожденного многочленом $x - 1$. Пересечению соответствует сумма идеалов, поэтому кольцо функций на пересечении — это фактор-кольцо

$$K[x, y]/(y^2 - x, x - 1) = K[y]/(y^2 - 1) = K[y]/(y - 1) \oplus K[y]/(y + 1),$$

если $\text{char } K \neq 2$ (по китайской теореме об остатках). Получили прямую сумму двух полей, изоморфных K : это и означает, что пересечение состоит из двух точек.

При пересечении же с прямой $x = 0$ получаем фактор-кольцо

$$K[x, y]/(y^2 - x, x) = K[y]/(y^2).$$

Это никак не поле, а кольцо с нильпотентами, но оно является векторным пространством над K размерности 2. Поэтому пересечение нужно воспринимать как одну точку кратности 2. Дело в том, что соответствующее приведенное кольцо — это фактор $K[x, y]$ по радикалу идеала $(y^2 - x, x)$, и оно изоморфно полю K . То есть, если забыть про нильпотенты, мы получим ровно одну точку, а кратность видна в структуре кольца $K[y]/(y^2)$.

Наконец, если $K = \mathbb{Q}$, попробуем пересечь параболу $(y^2 - x)$ с прямой $(x - 2)$: получаем $\mathbb{Q}[x, y]/(y^2 - x, x - 2) = \mathbb{Q}[y]/(y^2 - 2) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Это кольцо без нильпотентов, поэтому дело не в кратности; более того, это поле. Поэтому пересечение должно быть одной точкой; однако, это не основное поле \mathbb{Q} , а его расширение степени 2. Значит, пересечение состоит

из одной точки кратности 1, но эта точка в некотором смысле «двойная»: ее поле функция является расширением степени 2 основного поля. Оно снова имеет размерность 2 как векторное пространство над K .

Мы увидели, что во всех трех случаях алгебро-геометрический взгляд говорит нам, что вертикальная прямая пересекается с параболой в двух точках, если их посчитать с учетом кратности и степеней расширений. Если дело происходит над алгебраически замкнутым полем, то никаких конечных расширений не возникает, поэтому достаточно просто посчитать точки с учетом кратностей. Теперь можно понаклонять прямую и попробовать спросить то же самое про пересечение параболы с произвольной прямой на плоскости. Ответ будет тем же самым, пока мы не возьмем горизонтальную прямую, которая пересекает параболу только в одной точке. Но и это затруднение легко решается путем перехода к проективной плоскости, где число точек пересечения уже всегда равно двум.

1.1.2 Первые проблемы

Нужно отметить, что наше определение кратности (размерность кольца функций как векторного пространства над основным полем) не вполне адекватное. Рассмотрим проективное пространство \mathbb{P}^4 с однородными координатами $[x : y : z : u : v]$. Рассмотрим в нем двумерное подпространство X_1 , заданное уравнениями $u = v = 0$ (любое двумерное подпространство в \mathbb{P}^4 выглядит так с точностью до замены координат). Пусть X_2 — еще одно двумерное подпространство с \mathbb{P}^4 . Как оно пересекается с X_1 ? Нетрудно видеть, что в ситуации «общего положения» они пересекаются ровно по одной точке (пересечение хотя бы по прямой задается дополнительным алгебраическим условием, которое выделяет собственное [алгебраическое] подмножество в множестве всех возможных подпространств X_2). Без ограничения общности считаем, что X_2 задается уравнениями $y = z = 0$, и тогда $X_1 \cap X_2 = \{[1 : 0 : 0 : 0 : 0]\}$. Обозначим $P = [1 : 0 : 0 : 0 : 0]$. Пусть $X = X_1 \cup X_2$. Возьмем теперь произвольное двумерное подпространство Y в \mathbb{P}^4 , не проходящее через точку P . Для Y в общем положении пересечения $Y \cap X_1$ и $Y \cap X_2$ состоят из точек, и это различные точки (поскольку $P \notin Y$). Поэтому $Y \cap X$, как правило, состоит из двух точек. Пусть теперь Y проходит через точку P . Для определенности будем считать, что Y задается уравнениями $y = u, z = v$. Тогда, действительно, пересечение $Y \cap X_1$ задается уравнениями $y = u, z = v, u = 0, v = 0$, и потому состоит из одной точки P . Аналогично, $Y \cap X_2 = \{P\}$. Посмотрим на пересечение $Y \cap X$. Объединению плоскостей X_1 и X_2 соответствует пересечение их идеалов: $(y, z) \cap (u, v) = (yu, zu, yv, zv)$. При пересечении с Y возникает сумма идеалов, то есть, ему соответствует кольцо функций $K[y, z, u, v]/(yu, zu, yv, zv, y - u, z - v)$ на аффинной части $x \neq 0$ пространства \mathbb{P}^4 . Но это кольцо изоморфно $K[y, z]/(y^2, yz, z^2)$ и имеет поэтому размерность 3 над K (например, $1, y, z$ — его базис). Неприятность: в общем случае количество точек пересечения равно 2, а иногда оно равно 3.

Почему так происходит? Серр обнаружил, как исправить определение кратности. В общем случае, речь здесь идет о вычислении *длины* (аналога размерности) некоторого тензорного произведения вида $(M/I_1) \otimes (M/I_2)$. Напомним, что R -модуль M называется *плоским*, если для любой короткой точной последовательности вида $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ последовательность $0 \rightarrow M \otimes N' \rightarrow M \otimes N \rightarrow M \otimes N'' \rightarrow 0$ является точной. Для произвольного модуля M она точна только справа, и для того, чтобы «исправить» ее

точность слева, можно построить функторы Tor . Тогда для любого модуля M , для любой короткой точной последовательности как выше, последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \text{Tor}^2(M, N') & \longrightarrow & \text{Tor}^2(M, N) & \longrightarrow & \text{Tor}^2(M, N'') \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow \\ & & \text{Tor}^1(M, N') & \longrightarrow & \text{Tor}^1(M, N) & \longrightarrow & \text{Tor}^1(M, N'') \longrightarrow \\ & & M \otimes N' & \longrightarrow & M \otimes N & \longrightarrow & M \otimes N'' \longrightarrow & 0 \end{array}$$

является точной. Вместо длины $M \otimes N$ нужно рассматривать знакопеременную сумму

$$\sum_i l(\text{Tor}^i(M, N))$$

(напомним, что $\text{Tor}^0(M, N) = M \otimes N$). В примерах с параболой высшие функторы Tor обнулялись, поэтому мы их не замечали. Мы не будем в дальнейшем использовать это определение кратности пересечения, а построим ее с помощью кольца Чжоу.

1.1.3 Теорема Безу

Этьен Безу заметил, что две кривые P, Q , заданные уравнениями степеней m, n соответственно, пересекаются не более чем в mn точках. Конечно, нужно исключить случай, когда они пересекаются по общей кривой (*имеют общую компоненту*). Более того, если рассматривать кривые над алгебраически замкнутым полем и на проективной плоскости, то количество точек пересечения кривых, не имеющих общих компонент, равно mn (с учетом кратности). Для доказательства Понселе приводил следующие аргументы: при «непрерывной» деформации [коэффициентов] кривых (с сохранением степени) количество точек пересечения не изменяется. Кривую P можно продеформировать в объединение m прямых, а кривую Q — в объединение n прямых. Число точек пересечения этих прямых, очевидно, равно mn , поэтому и число точек пересечения P с Q равно mn . Это рассуждение нестрогое, но интуитивно понятно, что оно идет в правильном направлении: например, для определения кратности пересечения полезно представлять, что точка кратности n — это та, которая при небольшой деформации кривых превратится в n отдельных точек с однократным (*транsverсальным*) пересечением.

Теория колец Чжоу позволяет сделать это рассуждение абсолютно строгим; конечно, для этого придется проделать большую работу, определив «кратность пересечения», «непрерывную деформацию» и многое другое.

Сформулируем «элементарную» форму теореме Безу. В таком виде нетрудно доказать ее с помощью рассмотрения результата (см., например, [??]).

Теорема 1.1.3.1. Пусть $P, Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$ — однородные многочлены степеней m и n соответственно, не имеющие общих множителей. Рассмотрим множество $X = \{P = 0\} \cap \{Q = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$. Это множество конечно и $|X| \leq mn$. Более того, если в каждой точке множества X кривые $\{P = 0\}$ и $\{Q = 0\}$ пересекаются транsverсально, то $|X| = mn$.

1.2 Основы алгебраической геометрии

Мы предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями теории схем, и постараемся в этом разделе кратко напомнить некоторые из них, хотя бы с целью зафиксировать обозначения.

1.2.1 Аффинные схемы

Пусть R — коммутативное кольцо. Обозначим через $\text{Spec}(R)$ множество его простых идеалов и введем на нем топологию: подмножества вида $V(I) := \{p \in \text{Spec}(R) \mid p \supseteq I\}$ для $I \subseteq R$ назовем замкнутыми (заметим, что $V(I)$ зависит только от идеала, порожденного множеством I). Подмножества $\emptyset = V(R)$ и $\text{Spec}(R) = V(0)$ являются замкнутыми; $\bigcap_{\alpha} V(I_{\alpha}) = V(\sum I_{\alpha})$, $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2)$, поэтому дополнения к замкнутым множествам действительно являются открытыми множествами некоторой топологии, которая называется **топологией Зариского**. Нетрудно видеть, что множества вида $D_f = \text{Spec}(R) \setminus V(\{f\})$ образуют базу этой топологии. Они называются **главными открытыми множествами**.

Снабдим $X = \text{Spec}(R)$ пучком колец: сопоставим каждому главному открытому множеству D_f локализацию R_f , а включению $D_f \subseteq D_g$ — естественные гомоморфизмы $R_g \rightarrow R_f$. Это сопоставление задает предпучок на базе топологии Зариского, который является пучком и продолжается до пучка на всей топологии Зариского. Этот пучок называется **структурным пучком** и обозначается через \mathcal{O}_X . Для любой точки $p \in \text{Spec}(R)$ кольцо ростков $\mathcal{O}_{X,p}$ пучка \mathcal{O}_X в точке p канонически изоморфно локализации R_p ; напомним, что по определению $\mathcal{O}_{X,p} = \lim_{U \ni p} \mathcal{O}_X(U)$. Таким образом, все кольца ростков структурного пучка оказались локальными кольцами.

Назовем **локально окольцованным пространством** топологическое пространство X с пучком колец \mathcal{O}_X такое, что все кольца ростков $\mathcal{O}_{X,x}$ для $x \in X$ являются локальными кольцами. **Морфизмом** локально окольцованных пространств $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ называется пара $(f, f^{\#})$, где $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, а $f^{\#}: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ — морфизм пучков колец на Y такой, что все индуцированные отображения $f_x^{\#}: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ для $x \in X$ являются локальными гомоморфизмами локальных колец. Напомним, что гомоморфизм локальных колец называется **локальным**, если он переводит максимальный идеал в максимальный идеал.

Для любого кольца R мы знаем, что $\text{Spec}(R)$ является локально окольцованным пространством; его глобальные сечения $\mathcal{O}_{\text{Spec}(R)}(\text{Spec}(R)) = R$. Оказывается, все морфизмы локально окольцованных пространств $\text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(R)$ биективно соответствуют гомоморфизмам колец $R \rightarrow S$. А именно, по морфизму $(f, f^{\#}): \text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(R)$ легко восстановить гомоморфизм колец: достаточно посмотреть на $f^{\#}(\text{Spec}(R))$. С другой стороны, для каждого гомоморфизма $\varphi: R \rightarrow S$ имеется отображение $\text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(R)$, $p \mapsto \varphi^{-1}(p)$. Можно доказать, что оно непрерывно, и определить нужный морфизм пучков колец. Эти два сопоставления взаимно обратны. Таким образом, в категории локально окольцованных пространств имеется полная подкатегория, образованная пространствами вида $\text{Spec}(R)$, и она анти-эквивалентна категории коммутативных колец. **Аффинной схемой** называется локально окольцованное пространство, изоморфное какому-нибудь $\text{Spec}(R)$.

1.2.2 Схемы

Теперь можно определить схему как локально окольцованное пространство, покрытое аффинными схемами: локально окольцованное пространство (X, \mathcal{O}_X) называется **схемой**, если существует покрытие $X = \bigcup U_i$ такое, что $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ является аффинной схемой.

Если $Y \subseteq X$ — открытое подмножество, то на Y каноническим образом вводится структура схемы: достаточно положить $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X|_Y$. При этом говорят, что Y — **открытая подсхема** в Y . Напротив, для задания замкнутой подсхемы недостаточно задать замкнутое подмножество в схеме X , поскольку структурный пучок на таком множестве не определяется однозначно. Посмотрим сначала на аффинную схему $X = \text{Spec}(R)$. Для любого идеала $I \trianglelefteq R$ замкнутое подмножество $V(I) \subseteq X$ состоит из простых идеалов R , содержащих I , то есть, из простых идеалов R/I . Поэтому естественно рассматривать $\text{Spec}(R/I)$ как замкнутую подсхему в X : топологическое пространство $\text{Spec}(R/I)$ гомеоморфно $V(I)$.

Итак, определим **замкнутую подсхему аффинной схемы** $\text{Spec}(R)$ как спектр фактор-кольца R/I для некоторого идеала $I \trianglelefteq R$. Замкнутые подсхемы X просто по определению соответствуют идеалам в R , и в терминах этого соответствия можно определить многие естественные операции. Например, будем говорить, что замкнутая подсхема $\text{Spec}(R/I)$ содержит замкнутую подсхему $\text{Spec}(R/J)$, если $I \subseteq J$. Назовем объединением замкнутых подсхем $\text{Spec}(R/I)$ и $\text{Spec}(R/J)$ замкнутую подсхему $\text{Spec}(R/(I \cap J))$, а их пересечением — замкнутую подсхему $\text{Spec}(R/(I + J))$. Важно, однако, помнить, что эти понятия не всегда хорошо согласуются с теоретико-множественными операциями над замкнутыми подмножествами $V(I)$ и $V(J)$.

Чтобы перенести это определение на произвольные схемы, нужно перейти к рассмотрению *пучков идеалов*; **замкнутой подсхемой** схемы (X, \mathcal{O}_X) называется замкнутое топологическое пространство $Y \subseteq X$ вместе с пучком колец \mathcal{O}_Y , который является фактор-пучком структурного пучка \mathcal{O}_X по квазикогерентному пучку идеалов \mathcal{J} так, что пересечение Y с любым открытым аффинным $U \subseteq X$ является замкнутой подсхемой, определяемой пучком идеалов $\mathcal{J}(U)$.

Напомним, что топологическое пространство называется **неприводимым**, если его нельзя представить в виде объединения двух замкнутых собственных подпространств. Схема называется **неприводимой**, если она неприводима как топологическое пространство.

Схема X называется **приведенной**, если кольца $\mathcal{O}_X(U)$ не содержат нильпотентов для всех $U \subseteq X$. Это равносильно тому, что X покрывается аффинными схемами, изоморфными спектрам колец без нильпотентов.

1.3 Группы Чжоу

В дальнейшем везде K — алгебраически замкнутое поле. Мы будем называть **алгебраической схемой** схему конечного типа над $\text{Spec}(K)$; это означает, что она покрывается конечным числом открытых аффинных схем, изоморфных спектрам конечно порожденных алгебр над K . **Многообразием** мы будем называть приведенную неприводимую алгебраическую схему. Как правило, мы будем работать с алгебраическими схемами. Слова «подсхема» и «подмногообразие» означают «замкнутая подсхема» и «замкнутое подмногообразие», если не оговорено противное.

1.3.1 Порядки нулей и полюсов

Неприводимое подмногообразие коразмерности 1 называется **дивизором Вейля**. Пусть X — неприводимое многообразие, V — дивизор Вейля на нем. При некотором условии (*гладкость X вдоль V*) локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,V}$ является **кольцом дискретного нормирования**: оно одномерно и $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$. Соответствующая схема состоит из двух точек, все идеалы в нем главные, и если $\mathfrak{m} = (\pi)$, то они имеют вид 0 или (π^n) , $n \in \mathbb{N}$.

Пример: $X = K[x, y]$, $V = \{x = 0\}$. Локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,V}$ состоит из рациональных функций вида $f(x, y)/g(x, y)$, где $g(x, y)$ не делится на x . Это кольцо дискретного нормирования. По рациональной функции (например, $(x^2 - 3y)/(x^2 + x^4y)$) на X можно узнать порядок ее нуля/полюса вдоль V . Можно заменить V на множество нулей какого-нибудь другого неприводимого многочлена.

Более точно, определим $\text{ord}_V(r)$ для рациональной функции r следующим образом: если r определена в общей точке дивизора V , то образ r в локальном кольце $\mathcal{O}_{X,V}$ попадает в некоторую степень максимального идеала; положим $\text{ord}_V(r)$ равным этой степени. В общем случае мы можем представить r в виде частного двух таких функций и положить $\text{ord}_V(r/s) = \text{ord}_V(r) - \text{ord}_V(s)$ (или сразу взять образ r/s в поле частных $\mathcal{O}_{X,V}$).

Что делать, если X не является гладким вдоль дивизора V (то есть, если $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 > 1$)? Первая идея: $\text{ord}_V(r) = \dim_K \mathcal{O}_{X,V}/(r)$ для r , определенной в общей точке V , и продолжить на все по аддитивности. Почему ответ будет таким же? Нужно проверить.

Проблема: локальное кольцо A размерности 1 с полем вычетов $A/\mathfrak{m} = K$ не обязано быть векторным пространством над K . Лучше: положим $\text{ord}_V(r) = l_{\mathcal{O}_{X,V}}(\mathcal{O}_{X,V}/(r))$ для r , определенной в общей точке V . Иначе можно представить r в виде частного двух таких функций и положить $\text{ord}_V(r/s) = \text{ord}_V(r) - \text{ord}_V(s)$.

Алгебраический факт: функция ord_V определена корректно: если $ab = cd$, то $l(A/(a)) + l(A/(b)) = l(A/(c)) + l(A/(d))$.

Еще один факт: для фиксированной функции r имеется лишь конечное число дивизоров Вейля V таких, что $\text{ord}_V(r) \neq 0$.

1.3.2 Циклы и рациональная эквивалентность

Пусть X — алгебраическая схема. Назовем **k -циклом** конечную формальную сумму $\sum n_i[V_i]$, где $n_i \in \mathbb{Z}$, V_i — подмногообразия размерности k . Иными словами, циклы образуют свободную абелеву группу $Z_k[X]$, натянутую на множество подмногообразий размерности k в X :

$$Z_k(X) = \left\{ \sum n_i[V_i], n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Цикл $\sum n_i[V_i]$ называется **эффективным**, если все $n_i \geq 0$.

Для любого $(k+1)$ -мерного подмногообразия $W \subseteq X$ и ненулевой рациональной функции $r \in K(W)$ определим k -цикл $[\text{div}(r)] = \sum \text{ord}_V(r)[V]$ на X . Цикл такого вида будем называть **циклом, рационально эквивалентным нулю**. Подгруппу в $Z_k(X)$, порожденную k -циклами такого вида, обозначим через $\text{Rat}_k(X)$. Положим $\text{CH}_k(X) = Z_k(X)/\text{Rat}_k(X)$.

Группу, порожденную всеми циклами на X , обозначим через $Z(X)$. Каждой замкнутой подсхеме $Y \subseteq X$ можно сопоставить эффективный цикл следующим образом: пусть Y_1, \dots, Y_s — (изолированные, приведенные) неприводимые компоненты Y . Тогда каждое

локальное кольцо \mathcal{O}_{Y, Y_i} имеет конечную длину l_i . Положим $\langle Y \rangle = \sum l_i Y_i$. Заметим, что в частном случае подсхемы Y , заданной одной функцией $f \in \mathcal{O}_X$, по теореме Крулля о главных идеалах изолированные компоненты Y имеют коразмерность 1, поэтому соответствующий цикл $\langle Y \rangle$ равен $[\text{div}(f)]$. Отображение $f \mapsto [\text{div}(f)]$ является гомоморфизмом из мультипликативной группы ненулевых рациональных функций в аддитивную группу дивизоров на X .

Дадим еще одно определение рациональной эквивалентности циклов. Неформально говоря, два цикла $A_0, A_1 \in Z(X)$ мы хотим назвать рационально эквивалентными, если существует рационально параметризованное семейство циклов «между» ними: то есть, цикл на $\mathbb{P}^1 \times X$, ограничением которого на слои $\{0\} \times X$ и $\{1\} \times X$ являются циклы A_0 и A_1 . Более точно, пусть $\text{Rat}'(X) \leq Z(X)$ — подгруппа, порожденная разностями вида $\langle \Phi \cap (\{0\} \times X) \rangle - \langle \Phi \cap (\{1\} \times X) \rangle$, где Φ — подмногообразие в $\mathbb{P}^1 \times X$, не содержащееся ни в каком слое $\{t\} \times X$. Положим $\text{CH}'(X) = Z(X)/\text{Rat}'(X)$.

Утверждение: $\text{Rat}'(X) = \text{Rat}(X)$: группа $\text{Rat}(X)$ порождается дивизорами рациональных функций на всех подмногообразиях в X .

Поэтому на $\text{CH}'(X)$ вводится естественная градуировка, и $\text{CH}'_k(X) = \text{CH}_k(X)$. Мы будем писать $[Y]$ для класса цикла Y по модулю рациональной эквивалентности.

Пример: два конечных множества на кривой (одномерном многообразии) рационально эквивалентны тогда и только тогда, когда они отличаются на дивизор рациональной функции. Поэтому две различные точки на кривой могут быть рационально эквивалентны только если эта кривая изоморфна \mathbb{P}^1 . Так, к примеру, все замкнутые точки на эллиптической кривой различны в $\text{CH}(X)$.

Если X — хорошая схема (гладкая и связная — тогда все неприводимые компоненты имеют одинаковую размерность), положим $\text{CH}^d(X) = \text{CH}_{\dim X - d}$.

1.3.3 Классы Чжэня линейных расслоений

Пусть L — линейное расслоение (= локально свободный пучок ранга 1) на многообразии X ; σ — рациональное сечение. Тогда на элементе U открытого покрытия X мы можем записать σ в виде $\sigma|_U = f_U/g_U$ и определить $\text{div}(\sigma)|_U = \text{div}(f) - \text{div}(g)$. Это согласовано на пересечениях, поэтому мы получили дивизор на X . Если τ — другое рациональное сечение L , то $\alpha = \sigma/\tau$ — рациональная функция, и $\text{div}(\sigma) - \text{div}(\tau) = \text{div}(\alpha) = 0 \pmod{\text{Rat}}(X)$. Класс рациональной эквивалентности дивизора σ называется **первым классом Чжэня** $c_1(L) \in \text{CH}(X)$. Пример: $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ — класс любой гиперповерхности степени d ; он равен $d\zeta$, где ζ — класс гиперплоскости. По определению $\text{Pic}(X)$ — группа классов изоморфизма линейных расслоений на X с операцией $[L] + [L'] = [L \otimes L']$.

Утверждение: если X — многообразие размерности n , то c_1 задает гомоморфизм групп

$$c_1: \text{Pic}(X) \rightarrow \text{CH}_{n-1}(X).$$

Если X гладкое, то c_1 является изоморфизмом.

Доказательство. Если L, L' — линейные расслоения на X , σ, σ' — соответствующие рациональные сечения, то $\sigma \otimes \sigma'$ — рациональное сечение на $L \otimes L'$ с дивизором $\text{div}(\sigma) + \text{div}(\sigma')$.

Пусть теперь X — гладкое проективное многообразие. Локальные кольца X являются факториальными кольцами, поэтому всякое подмногообразие коразмерности 1 является

дивизором Картье. Поэтому мы можем сопоставить каждому дивизору линейное расслоение и рациональное сечение. Забывая про сечение, получаем отображение из группы дивизоров в $\text{Pic}(X)$. Рационально эквивалентные дивизоры отличаются на дивизор рациональной функции, поэтому переходят в разные рациональные сечения на том же расслоении. Значит, это отображение индуцирует отображение из $\text{CH}^1(X)$, обратное к c_1 . \square

1.3.4 Скручивающий пучок

1.3.5 Первые свойства групп Чжоу

Очевидно, что если $Y \subseteq X$ — замкнутая подсхема, то имеется морфизм $\text{CH}(Y) \rightarrow \text{CH}(X)$. Пересечение подмногообразия в X с открытым множеством $U = X \setminus Y$ является подмногообразием в U , поэтому имеется гомоморфизм ограничения $Z(X) \rightarrow Z(U)$. Оказывается, он индуцирует гомоморфизм групп Чжоу.

Предложение 1.3.5.1. Пусть X — схема.

1. $\text{CH}(X) = \text{CH}(X_{\text{red}})$;
2. если X неприводимо размерности k , то $\text{CH}_k(X) \cong \mathbb{Z}$, причем образующей является $[X]$ — фундаментальный класс X . Если X_1, \dots, X_m — неприводимые компоненты X , то классы $[X_i]$ порождают свободную абелеву подгруппу ранга m в $\text{CH}(X)$.
3. (Майер-Вьеторис) Если X_1, X_2 — замкнутые подсхемы X , то имеется точная последовательность

$$\text{CH}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \text{CH}(X_1) \oplus \text{CH}(X_2) \rightarrow \text{CH}(X_1 \cup X_2) \rightarrow 0.$$

4. (Вырезание) Если $Y \subseteq X$ — замкнутая подсхема и $U = X \setminus Y$, то имеется точная последовательность

$$\text{CH}(Y) \rightarrow \text{CH}(X) \rightarrow \text{CH}(U) \rightarrow 0$$

1.3.6 Произведение в кольце Чжоу

Будем говорить, что подмногообразия A, B в X пересекаются **трансверсально** в точке p , если A, B, X гладкие в точке p и линейная оболочка касательных пространств к A и B в p равна касательному пространству к X : $T_p A + T_p B = T_p X$. Будем говорить, что A и B **трансверсальны в общей точке**, если они пересекаются трансверсально в общей точке каждой компоненты C пересечения $A \cap B$. Для гладкого X это условие равносильно тому, что $\text{codim}(C) = \text{codim}(A) + \text{codim}(B)$ и C приведено в общей точке (то есть, локализация в каждой неприводимой компоненте приведена). Если $\text{codim}(A) + \text{codim}(B) > \dim(X)$, то A и B трансверсальны в общей точке тогда и только тогда, когда их пересечение пусто.

Теорема 1.3.6.1. Пусть X — гладкое квазипроjektивное многообразие. Существует единственное произведение на $\text{CH}(X)$ такое, что $[A][B] = [A \cap B]$ для любых трансверсальных в общей точке подмногообразий A и B . Относительно этого произведения $\text{CH}(X)$ превращается в ассоциативное коммутативное кольцо, градуированное коразмерностью. Оно называется **кольцом Чжоу** многообразия X .

Доказательство опирается на следующий факт.

Теорема 1.3.6.2 (Moving Lemma). Пусть X — гладкое квазипроективное многообразие.

1. Для любых $\alpha, \beta \in \text{CH}(X)$ найдутся циклы $A = \sum m_i A_i$ и $B = \sum n_j B_j$ в $Z(X)$, представляющие классы α и β такие, что A_i пересекает B_j трансверсально в общей точке для всех i, j .
2. Класс $\sum m_i n_j [A_i \cap B_j] \in \text{CH}(X)$ не зависит от выбора таких A и B .

Нам пригодится частный случай этой теоремы:

Предложение 1.3.6.3. Пусть X — квазипроективное многообразие, L — линейное расслоение на X , Y_1, \dots, Y_n — подмногообразия в X . Тогда найдется цикл, представляющий класс $c_1(L)$, трансверсальный в общей точке к каждому Y_i . Если X гладкое, то

$$c_1(L) \left[\sum_i m_i Y_i \right] = \sum_i m_i c_1(L|_{Y_i}).$$

На самом деле, в правой части этой формулы нужно писать что-то типа $j_*(c_1(L|_{Y_i}))$ вместо $c_1(L|_{Y_i})$ ($j: Y_i \rightarrow X$ — включение), поскольку нам нужен класс в $\text{CH}(X)$, а не в $\text{CH}(Y_i)$. То есть, пересечение корректно определено даже не на X , а на Y_i .

В книге Фултона, кроме того, написано, как определить умножение класса вида $c_1(L)$ на элементы $\text{CH}(X)$ для любой схемы X .

(Доказательство предложения использует теорему Бертини.)

Более просто доказывается следующая теорема, которая говорит, что при наличии транзитивного действия аффинной алгебраической группы на многообразии в характеристике 0 любые два цикла можно перевести в трансверсально пересекающиеся действием этой группы:

Теорема 1.3.6.4 (Теорема Клеймана). Пусть аффинная алгебраическая группа G действует на многообразии X , и $A, B \subseteq X$ — подмногообразия. Для любого $g \in G$ многообразие gA рационально эквивалентно A . Если, кроме того, действие G на X транзитивно и характеристика основного поля равна нулю, то существует открытое плотное множество $g \in G$ таких, что gA трансверсально в общей точке к B .

Умножение в кольце Чжоу позволяет корректно определить кратность пересечения в более общей ситуации: пусть A и B — подмногообразия в X коразмерностей a и b , и каждая компонента Z пересечения $A \cap B$ имеет коразмерность $a + b$. Определим кратность пересечения $m_Z(A, B)$ многообразий A и B вдоль Z так, чтобы цикл

$$AB = \sum m_Z(A, B) \cdot Z$$

попал в класс $[A][B] \in \text{CH}^{a+b}(X)$. При этом

1. $m_Z(A, B) > 0$ для любой компоненты Z пересечения $A \cap B$, и $m_Z(A, B) = 1$ если и только если A и B пересекаются трансверсально в общей точке Z ;

- если A, B — локально полные пересечения (или хотя бы обладают свойством Коэна–Маколея) в окрестности общей точки Z , то $m_Z(A, B)$ равно кратности компоненты схемы $A \cap B$ с носителем Z ;
- $m_Z(A, B)$ зависит только от локальной структуры A и B в общей точке Z

1.4 Фунториальность

1.4.1 Пушфорвард

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — собственный морфизм. Тогда образ подмногообразия $A \subseteq Y$ является подмногообразием $f(A) \subseteq X$. Будем говорить, что морфизм $A \rightarrow f(A)$ **конечен в общей точке**, если прообраз $y = f|_A^{-1}(x)$ общей точки $x \in f(A)$ является конечной схемой. Равносильно, поле рациональных функций $K(A)$ является конечным расширением поля $K(f(A))$. Степень n этого расширения тогда равна степени y над X , и называется **степенью накрытия** $A \rightarrow f(A)$. В этой ситуации мы должны посчитать $f(A)$ с кратностью n :

Определение 1.4.1.1 (pushforward циклов). Пусть $f: Y \rightarrow X$ — собственный морфизм, $A \subseteq X$ — подмногообразие.

- Если $\dim f(A) < \dim A$, положим $f_*\langle A \rangle = 0$.
- Если $\dim f(A) = \dim A$, то f конечно в общей точке. Пусть n — его степень. Положим $f_*\langle A \rangle = n \cdot \langle f(A) \rangle$.
- Для линейной комбинации $A = \sum n_i A_i \in Z(Y)$ подмногообразий положим $f_*\langle A \rangle = \sum n_i f_*\langle A_i \rangle$.

Так определенный пушфорвард сохраняет рациональную эквивалентность:

Теорема 1.4.1.2. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — собственный морфизм схем. Определенное выше отображение $f_*: Z(Y) \rightarrow Z(X)$ индуцирует гомоморфизм групп $f_*: \text{CH}_k(Y) \rightarrow \text{CH}_k(X)$ для всех k .

Вот пример применения пушфорварда:

Предложение 1.4.1.3. Пусть K — поле, а схема X собствена над $\text{Spec } K$. Тогда существует гомоморфизм групп $\text{deg}: \text{CH}_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, переводящий класс $[p]$ всякой замкнутой точки $p \in X$ в $(\|(p) : K)$, где $\|(p)$ — поле вычетов точки p .

1.4.2 Пулбэк

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм схем, $A \subseteq X$ — подмногообразие коразмерности s .

Теорема 1.4.2.1. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм гладких проективных многообразий.

- У любого класса $\alpha \in \text{CH}^c(X)$ есть представитель $A = \sum n_i A_i \in Z^c(X)$ такой, что $f^{-1}(A_i)$ приведено в общей точке коразмерности s в Y для всех i .
- Класс $\sum n_i [f^{-1}(A_i)] \in \text{CH}^c(Y)$ не зависит от выбора такого A .

В такой ситуации мы можем определить пулбэк $f^*(\alpha) = \sum n_i [f^{-1}(A_i)]$:

Теорема 1.4.2.2. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм гладких проективных многообразий.

1. Существует единственный способ определить гомоморфизм групп

$$f^*: \text{CH}^c(X) \rightarrow \text{CH}^c(Y)$$

так, чтобы $f^*([A]) = [f^{-1}(A)]$ для любого A такого, что $f^{-1}(A)$ приведено в общей точке коразмерности c . Более того, f^* является гомоморфизмом колец и превращает CH в контравариантный функтор из категории гладких проективных многообразий в категорию градуированных колец.

2. (**Push-Pull Formula**) Отображение $f_*: \text{CH}(Y) \rightarrow \text{CH}(X)$ является гомоморфизмом градуированных модулей над градуированным кольцом $\text{CH}(X)$. Иными словами, для $\alpha \in \text{CH}^k(X)$ и $\beta \in \text{CH}_l(Y)$ выполнено

$$f_*(f^* \alpha \cdot \beta) = \alpha \cdot f_* \beta \in \text{CH}_{l-k}(X).$$

Последнее утверждение этой теоремы похоже на равенство $f(f^{-1}(A) \cap B) = A \cap f(B)$.

Простым примером проективного морфизма служит вложение замкнутого подмногообразия $i: Y \rightarrow X$. Если X, Y — гладкие, то для любого подмногообразия A в X выполнено $[A][Y] = i_*(i^*([A]))$; этот цикл корректно определен как цикл на Y , а не только как цикл на X .

Можно определить и пулбэк вдоль плоских морфизмов:

Теорема 1.4.2.3. Пусть $\pi: Y \rightarrow X$ — плоский морфизм схем. Отображение π^* , определенное на циклах формулой $\pi^*(\langle A \rangle) := \langle \pi^{-1}(A) \rangle$ для подмногообразия A в X , сохраняет рациональную эквивалентность, и потому индуцирует гомоморфизм групп Чжоу, сохраняющий градуировку коразмерностью. Если X, Y — гладкие и квазипроективные, то $\pi^*: \text{CH}(X) \rightarrow \text{CH}(Y)$ — гомоморфизм колец.

1.5 Отступление: эквивалентности на циклах и мотивы

Введенное нами отношение рациональной эквивалентности $\sim = \sim_{\text{rat}}$ на $Z(X)$ является не единственным возможным. Разумно рассматривать, среди прочего, алгебраическую (\sim_{alg}), гомологическую (\sim_{hom}) и численную (\sim_{num}) эквивалентность. Для простоты в этом разделе мы работаем в категории гладких проективных схем над полем k . С другой стороны, поле k не предполагается алгебраически замкнутым.

1.5.1 Алгебраическая эквивалентность

Напомним, что два цикла на X называются рационально эквивалентными, если их можно «продеформировать» друг в друга путем деформации с параметром из \mathbb{P}^1 : то есть, эквивалентны циклы вида $\pi^{-1}(\{0\})$ и $\pi^{-1}(\{1\})$, где π — ограничение проекции $X \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ на некоторое подмногообразие в $X \times \mathbb{P}^1$, образ которого не вырождается в одну точку.

Действуя по аналогии, можно назвать два цикла на X алгебраически эквивалентными, если их можно «продеформировать» друг в друга путем деформации, параметр которой

принимает значения уже не в \mathbb{P}^1 , а в произвольной гладкой связной проективной прямой. То есть, в определении рациональной эквивалентности нужно заменить \mathbb{P}^1 на гладкую связную проективную кривую, а точки 0 и 1 — на две рациональные точки этой кривой. Очевидно, что из $\alpha \sim_{\text{rat}} \beta$ следует $\alpha \sim_{\text{alg}} \beta$. Таким образом, $\sim_{\text{rat}} \supseteq \sim_{\text{alg}}$ (будем писать $\sim \supseteq \approx$, если \sim — более сильное отношение эквивалентности, то есть, из $\alpha \sim \beta$ следует $\alpha \approx \beta$). В то же время, как мы обсуждали в 1.3.2, на эллиптической кривой никакие две замкнутые точки не рационально эквивалентны, но (очевидным образом) алгебраически эквивалентны.

1.5.2 Гомологическая эквивалентность

Пусть H — некоторая *хорошая* теория когомологий гладких проективных схем. По гладкому подмногообразию $Y \subseteq X$ размерности k над \mathbb{C} можно определить его класс $[Y] \in H^{2k}(X)$. Будем называть циклы $[Y], [Y'] \in Z_k(X)$, соответствующие двум подмногообразиям, гомологически эквивалентными, если $[Y] = [Y']$.

1.5.3 Численная эквивалентность

Напомним, что 0-циклом мы называем линейную комбинацию $\sum_i n_i [P_i]$ замкнутых точек. Определим степень этого 0-цикла как сумму $\sum_i n_i [k(P_i) : k]$, где $[k(P_i) : k]$ — степень расширения поля вычетов точки P_i над полем k .

Назовем цикл $\alpha \in Z^r(X)$ численно эквивалентным нулю, если для любого цикла $\beta \in Z_r(X)$ произведение $\alpha \cdot \beta$ (определенное в $\text{CH}(X)$) имеет степень 0.

1.5.4 Категория соответствий

Пусть теперь \sim — одно из определенных выше отношений эквивалентности. Рассмотрим категорию \mathcal{A}_\sim , объекты которой — гладкие проективные многообразия над k , а морфизмы между X и Y — это *соответствия*, то есть, элементы $Z^{\dim(X)}(X \times Y)$. Отметим, что иногда начинают и с противоположной категории. Композиция морфизмов соответствий $\alpha \in Z^{\dim(X)}(X_1 \times X_2)$ и $\beta \in Z^{\dim(Y)}(X_2 \times X_3)$ определяется как $p_{13,*}(p_{12}^*(\alpha) \cdot p_{23}^*(\beta)) \in Z^{\dim(X)}(X_1 \times X_3)$, где p_{ij} — проекция из $X_1 \times X_2 \times X_3$ на $X_i \times X_j$.

После этого мы хотим построить *псевдо-абелеву оболочку* категории \mathcal{A}_\sim . Недостаток категории \mathcal{A}_\sim состоит в том, что эндоморфизм $p: X \rightarrow X$, являющийся проектором (то есть, тот, для которого $p^2 = p$, не всегда задает разложение в прямую сумму $X = \text{Im}(X) \oplus \text{Ker}(X)$. Чтобы это исправить, нужно добавить к нашей категории формально образы всех проекторов. Объектами новой категории станут пары (X, p) , где X является объектом \mathcal{A}_\sim , а p — проектор на X . Категория \mathcal{A}_\sim вкладывается в новую категорию посредством функтора $X \mapsto (X, \text{id}) =: \mathcal{M}(X)$. После этого нужно естественным образом определить морфизмы таких пар, и мы получим категорию, которая называется *категорией эффективных мотивов* и обозначается через $\text{Mot}_\sim^{\text{eff}}(k)$.

К примеру, в категории \mathcal{A}_\sim имеется проектор $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, проектирующий все в точку — это композиция $\mathbb{P}^1 \rightarrow \text{pt} \rightarrow \mathbb{P}^1$. Поэтому в категории эффективных мотивов имеется разложение в прямую сумму $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathcal{M}(\text{pt}) \oplus T$. Объект T называется *мотивом Лефшеца*. После введения естественной структуры тензорного произведения (путем переноса ее с

категории соответствий) категория эффективных мотивов оказывается симметричной мо-
ноидальной категорией. Последний шаг состоит в том, чтобы обратить мотив Лефшеца,
добавив объекты $T^{\otimes(-n)}$. Полученная категория называется *категорией мотивов*.

2 Примеры

2.1 Первые примеры

2.1.1 Аффинное пространство

Предложение 2.1.1.1. Пусть $U \subseteq \mathbb{A}^n$ — открытое множество. Тогда $\text{CH}(U) = \text{CH}_n(U) = \mathbb{Z} \cdot [U]$.

Доказательство. Аксиома вырезания позволяет свести доказательство к случаю $U = \mathbb{A}^n$. Поэтому достаточно доказать, что класс $[Y]$ любого подмногообразия $Y \subset \mathbb{A}^n$, $Y \neq \mathbb{A}^n$, равен нулю. Пусть (y_1, \dots, y_n) — координаты на \mathbb{A}^n , $[x_0 : x_1]$ — однородные координаты на \mathbb{P}^1 . Рассмотрим подмножество

$$W' = V(\{x_0^{\deg(f)} f(\frac{x_1}{x_0} y) \mid f \in I(Y)\}) \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^1.$$

На открытом аффинном подмножестве $\{x_1 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^1$ можно считать, что $x_1 = 1$, $x_0 = t$; поэтому пересечение W с $\mathbb{A}^n \times (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$ имеет вид $V(\{f(t^{-1}y) \mid f \in I(Y)\}) = tY$. Обозначим через W замыкание этого пересечения в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^1$; это неприводимое замкнутое подмножество. Поскольку $Y \neq \mathbb{A}^n$, а поле K бесконечно, найдется точка \mathbb{A}^n , не лежащая на Y . Можно считать, что это начало координат. Значит, в $I(Y)$ есть многочлен $g(y)$ с ненулевым свободным членом. Поэтому многочлен $x_0^{\deg(g)} g(\frac{x_1}{x_0} y)$ при подстановке $x_1 = 0$ выглядит как x_0 в некоторой степени с ненулевым коэффициентом. Значит, слой W над точкой $[1 : 0]$ пуст, а слой W над точкой $[1 : 1]$ равен Y ; поэтому $[Y] = 0$ в $\text{CH}(\mathbb{A}^n)$. \square

2.1.2 Стратификации

Определение 2.1.2.1. Назовем *стратификацией* схемы X конечный набор неприводимых локально замкнутых подсхем U_i в X таких, что

1. X является объединением U_i ;
2. подсхемы U_i попарно не пересекаются;
3. если $\overline{U_i}$ пересекается с U_j , то $\overline{U_i}$ содержит U_j .

Подмножества U_i называются *стратами* этой стратификации, а их замыкания $Y_i = \overline{U_i}$ — *замкнутыми стратами*. Заметим, что множество замкнутых страт Y_i полностью определяет стратификацию: $U_i = Y_i \setminus \bigcup_{Y_j \subsetneq Y_i} Y_j$.

Стратификация называется *аффинной*, если каждая страта U_i изоморфна некоторому аффинному пространству \mathbb{A}^k . Стратификация называется *квази-аффинной*, если каждое U_i изоморфно открытому множеству некоторого \mathbb{A}^k .

Пример 2.1.2.2. Полный флаг подпространств $\mathbb{P}^0 \subset \mathbb{P}^1 \subset \dots \subset \mathbb{P}^n$ является аффинной стратификацией проективного пространства; замкнутые страты изоморфны \mathbb{P}^i , а страты U_i изоморфны \mathbb{A}^i .

Предложение 2.1.2.3. *Если у схемы X имеется квази-аффинная стратификация, то группа $\mathrm{CH}(X)$ порождается классами замкнутых страт.*

На самом деле, Тотаро доказал, что в случае аффинной стратификации классы замкнутых страт независимы в $\mathrm{CH}(X)$, так что $\mathrm{CH}(X)$ является свободной абелевой группой, порожденной замкнутыми стратами схемы X .

Доказательство. Действуем индукцией по числу страт U_i . Если страта одна, мы в условиях предложения 2.1.1.1.

Пусть U_0 — минимальная страта. Замыкание U_0 должно быть объединением страт, поэтому U_0 замкнута. Поэтому $U = X \setminus U_0$ естественным образом разбивается на страты исходной стратификации, отличные от U_0 . По предположению индукции $\mathrm{CH}(U)$ порождается классами замыканий этих страт, и по предложению 2.1.1.1 группа $\mathrm{CH}(U_0)$ порождается классом $[U_0]$. По части 4 предложения 1.3.5.1 последовательность

$$\mathbb{Z} \cdot [U_0] = \mathrm{CH}(U_0) \rightarrow \mathrm{CH}(X) \rightarrow \mathrm{CH}(X \setminus U_0) \rightarrow 0$$

является точной. Поскольку классы замкнутых страт в $\mathrm{CH}(U)$ приходят из классов тех же замкнутых страт в X , группа $\mathrm{CH}(X)$ порождается классами замкнутых страт. \square

2.1.3 Проективное пространство

Теорема 2.1.3.1. *Кольцо Чжоу проективного пространства \mathbb{P}^n равно*

$$\mathrm{CH}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[\zeta]/(\zeta^{n+1}),$$

где ζ — класс гиперплоскости. Более того, класс подмногообразия степени d коразмерности k в $\mathrm{CH}(\mathbb{P}^n)$ равен $d\zeta^k$.

В частности, $\mathrm{CH}_m(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$ порождается классом m -плоскости для $0 \leq m \leq n$.

Доказательство. Из предложения 2.1.2.3 следует, что $\mathrm{CH}_k(\mathbb{P}^n)$ порождается классом любой k -плоскости $L_k \subseteq \mathbb{P}^n$. Кроме того, по предложению 1.4.1.3, $\mathrm{CH}^n(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}$. Поскольку $n - k$ -плоскость общего положения L_{n-k} пересекает k -плоскость общего положения трансверсально в одной точке, умножение на $[L_{n-k}]$ индуцирует сюръективное отображение $\mathrm{CH}^k(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathrm{CH}^n(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}$, откуда $\mathrm{CH}^k(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}$ для всех k .

Итак, каждая компонента кольца Чжоу \mathbb{P}^n изоморфна группе \mathbb{Z} ; осталось выяснить, как устроено умножение. Поскольку k -плоскость L_k является трансверсальным пересечением $n - k$ гиперплоскостей, мы имеем $[L_k] = \zeta^{n-k}$, где $\zeta = [L_{n-1}] \in \mathrm{CH}^1(\mathbb{P}^n)$ — класс гиперплоскости. Наконец, подмногообразие $X \subseteq \mathbb{P}^n$ размерности $n - k$ и степени d пересекает k -плоскость общего положения трансверсально в d точках, поэтому $\deg([X]\zeta^{n-k}) = d$. Кроме этого, $\deg(\zeta^n) = 1$, откуда $[X] = d\zeta^k$. \square

Следствие 2.1.3.2. *Любое отображение из \mathbb{P}^n в квази-проективное многообразие размерности $< n$ является постоянным.*

Доказательство. Если $\varphi: \mathbb{P}^n \rightarrow X$ не постоянно, то прообраз гиперплоского сечения X в общем положении не пересекается с прообразом точки в X в общем положении. Если $0 < \dim X < n$, то прообраз гиперплоского сечения в X имеет размерность $n-1$, а прообраз точки имеет размерность > 0 ; такие два подмногообразия в \mathbb{P}^n обязаны пересекаться: противоречие. \square

Следствие 2.1.3.3. *Кольцо Чжоу произведения $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$ проективных пространств изоморфно*

$$\text{CH}(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s) \cong \text{CH}(\mathbb{P}^r) \otimes \text{CH}(\mathbb{P}^s) \cong \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^{r+1}, \beta^{s+1}).$$

Если $F(x, y)$ — биднородный многочлен степени d по $x = (x_0, \dots, x_r)$ и степени e по $y = (y_0, \dots, y_s)$, то класс Чжоу множества нулей F равен $d\alpha + e\beta \in \text{CH}^1(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s)$.

Доказательство. Упражнение. Подсказка: рассмотрите стратификацию с замкнутыми стратами вида $\mathbb{P}^i \times \mathbb{P}^j$, где $\mathbb{P}^i \subseteq \mathbb{P}^r$, $\mathbb{P}^j \subseteq \mathbb{P}^s$ — замкнутые страты проективных пространств. \square

2.2 Грассманиан

2.2.1 Вложение в проективное пространство

Пусть V — векторное пространство размерности n . Рассмотрим множество векторных подпространств $U \leq V$ размерности k . Мы введем на этом множестве структуру [проективного] алгебраического многообразия; оно называется **грассманианом** и обозначается через $\text{Gr}(k, n)$. Заметим, что при проективизации мы получаем проективное подпространство $\mathbb{P}(U)$ в $\mathbb{P}(V)$; поэтому мы будем также обозначать $\text{Gr}(k, n)$ через $\text{Gr}(k-1, n-1)$.

Для каждого подпространства U размерности k в пространстве V выберем какой-нибудь базис u_1, \dots, u_k в U и рассмотрим элемент $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k \in \wedge^k(V)$. Разумеется, этот элемент зависит не только от подпространства U , но и от выбранного базиса. Заметим, однако, что при переходе к другому базису этот (ненулевой) элемент $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k$ умножается на определитель матрицы перехода; поэтому образ этого элемента в $\mathbb{P}(\wedge^k(V))$ определен однозначно. Обозначим его через $\omega(U)$. Таким образом, мы сопоставили каждому элементу $U \in \text{Gr}(k, n)$ элемент $\omega(U) \in \mathbb{P}(\wedge^k(V))$. Нетрудно показать, что это сопоставление инъективно.

2.2.2 Уравнения на грассманиан

Докажем, что образ построенного сопоставления выделяется в $\mathbb{P}(\wedge^k(V))$ полиномиальными уравнениями. Для этого нужно уметь отвечать на такой вопрос: когда элемент $w \in \wedge^k(V)$ имеет вид $u_1 \wedge \dots \wedge u_k$ для некоторых $u_1, \dots, u_k \in V$? Иными словами, когда [внешний] тензор w является разложимым? Рассмотрим отображение $w \wedge -: V \rightarrow \wedge^{k+1}(V)$, $v \mapsto w \wedge v$. Покажем, что w является разложимым тогда и только тогда, когда размерность ядра этого отображения равна k .

Пусть $w = u_1 \wedge \dots \wedge u_k$, $u_i \in V$. Пусть $U' \leq V$ — подпространство в V такое, что $V = U \oplus U'$. Запишем произвольный вектор $v \in V$ в виде $v = u + u'$ в соответствии с этим разложением V в прямую сумму. Тогда $w \wedge v = w \wedge u + w \wedge u' = w \wedge u'$, и это выражение

равно 0 тогда и только тогда, когда $u' = 0$, то есть, $v \in U$. Поэтому ядро отображения $w \wedge -$ в точности равно U .

Обратно, пусть U — ядро отображения $w \wedge -$ для некоторого w . Выберем базис u_1, \dots, u_n в V так, что u_1, \dots, u_k образуют базис подпространства U . Напомним, что тогда набор $\{u_{m_1} \wedge \dots \wedge u_{m_k}\}$, $1 \leq m_1 < \dots < m_k \leq n$ является базисом в $\wedge^k(V)$. Раскладывая w по этому базису, мы можем записать $w = \lambda u_1 \wedge \dots \wedge u_k + \dots$. Покажем, что остальные слагаемые равны нулю. Рассмотрим $w \wedge u_i$ для $i = 1, \dots, k$. По предположению u_i лежит в ядре $w \wedge -$, поэтому слагаемое в разложении w , не содержащее u_i , должно иметь нулевой коэффициент. Но любое слагаемое имеет такой вид для некоторого i , кроме $\lambda u_1 \wedge \dots \wedge u_k$.

Предыдущее рассуждение на самом деле показывает, что для любых $w \in \wedge^k(V)$ и $v \in V$ равенство $w \wedge v = 0$ равносильно тому, что $w = v \wedge u$ для некоторого $u \in \wedge^{k-1}(V)$. Поэтому размерность ядра отображения $w \wedge -$ всегда не превосходит k . Значит, w является разложимым элементом внешней алгебры тогда и только тогда, когда $\dim \text{Ker}(w \wedge -) \geq k$, то есть, тогда и только тогда, когда ранг отображения $w \wedge -$ не превосходит $n - k$. Это условие, в свою очередь, равносильно тому, что все миноры размера $n - k + 1$ матрицы этого отображения равны 0, что является набором [однородных] полиномиальных равенств.

После выбора базиса в пространстве V любое k -мерное подпространство $U \leq V$ можно записать как матрицу размера $k \times n$, строки которой являются координатами k векторов некоторого базиса U . Тогда координаты соответствующего элемента $\wedge^k(V)$ равны минорам размера k этой матрицы. При замене базиса в U матрица умножается слева на обратимую матрицу порядка k , и каждый из миноров умножается на определитель этой матрицы, поэтому полученный элемент $\mathbb{P}(\wedge^k(V))$ не зависит от выбора базиса в U .

2.2.3 Соотношения Плюккера

На самом деле, образ $\text{Gr}(k, n)$ выделяется в $\mathbb{P}(\wedge^k(V))$ полиномиальными уравнениями степени 2, которые называются **соотношениями Плюккера**. Опишем их на примере грассманиана $\text{Gr}(2, 4)$. После выбора базиса в четырехмерном пространстве V двумерное подпространство $U \leq V$ можно задать матрицей 2×4 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

Обозначим через χ_{ij} определитель подматрицы, полученный взятием столбцов с номерами i и j : $\chi_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}$. Тогда $[\chi_{12} : \chi_{13} : \chi_{14} : \chi_{23} : \chi_{24} : \chi_{34}]$ — плюккеревы координаты U в $\mathbb{P}(\wedge^2(V))$. Рассмотрим следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Ее определитель должен равняться нулю. Запишем его с помощью теоремы Лапласа о разложении определителя по первым двум строкам. Получим соотношение $\chi_{12}\chi_{34} - \chi_{13}\chi_{24} + \chi_{14}\chi_{23} = 0$ между плюккеревыми координатами подпространства U . Оказывается, этот многочлен порождает однородный идеал, которым задается подмногообразие $\text{Gr}(2, 4)$ в $\mathbb{P}(\wedge^2(V))$.

Покажем еще один способ получения соотношений Плюккера на примере $\text{Gr}(3, 6)$. Рассмотрим пересечение $\text{Gr}(3, 6) \subseteq \mathbb{P}(\wedge^3(V))$ с главным открытым подмножеством $\{x_{123} \neq 0\}$. Элемент $U \in \text{Gr}(3, 6)$ из этого пересечения представляется матрицей 3×6 , у которой определитель минора, образованного первыми тремя столбцами, отличен от нуля. Поэтому домножением на элемент $\text{GL}(3, k)$ слева можно добиться, чтобы матрица имела следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u_{14} & u_{15} & u_{16} \\ 0 & 1 & 0 & u_{24} & u_{25} & u_{26} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} & u_{35} & u_{36} \end{pmatrix}.$$

Это соответствует тому, что мы переходим от однородных координат $[x_{123} : \dots]$ в $\mathbb{P}(\wedge^3(V))$ к координатам $[1 : \dots]$ на аффинном куске $x_{123} \neq 0$ посредством деления всех однородных координат на x_{123} . Рассмотрение минора, образованного столбцами 2, 3, 4, показывает, что $u_{14} = x_{234}/x_{123}$; аналогично получаем, что матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (234) & (235) & (236) \\ 0 & 1 & 0 & -(134) & -(135) & -(136) \\ 0 & 0 & 1 & (124) & (125) & (126) \end{pmatrix},$$

где через (ijk) обозначается x_{ijk}/x_{123} . Посмотрим теперь, например, на определитель минора, образованного столбцами 3, 4, 5: он должен быть равен (345) , а прямое вычисление показывает, что он равен $-(234) \cdot (135) + (134) \cdot (235)$. Переходя к однородным координатам, получаем соотношение

$$x_{123}x_{345} - x_{134}x_{235} + x_{234}x_{135} = 0,$$

которое является одним из соотношений Плюккера.

Если же рассмотреть определитель минора, образованного столбцами 4, 5, 6, получим, что (456) равно определителю матрицы

$$\begin{pmatrix} (234) & (235) & (236) \\ -(134) & -(135) & -(136) \\ (124) & (125) & (126) \end{pmatrix}.$$

Раскладывая его по последней строке, получаем

$$(456) = (124) \cdot \begin{vmatrix} (235) & (236) \\ -(135) & -(136) \end{vmatrix} - (125) \cdot \begin{vmatrix} (234) & (236) \\ -(134) & -(136) \end{vmatrix} + (126) \cdot \begin{vmatrix} (234) & (235) \\ -(134) & -(135) \end{vmatrix}.$$

Но каждый из полученных определителей 2×2 нам уже известен из предыдущих вычислений. Получаем соотношение

$$(456) = (124) \cdot (356) - (125) \cdot (346) + (126) \cdot (345),$$

что после перехода к однородным координатам превращается в соотношения Плюккера

$$x_{123}x_{456} - x_{124}x_{356} + x_{125}x_{346} - x_{126}x_{345} = 0.$$

В общем случае, все соотношения Плюккера для $\text{Gr}(k, n)$ получаются следующим образом: пусть $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ таковы, что $|I| = k - 1$, $|J| = k + 1$. Для каждого $j \in J \setminus I$

рассмотрим множества $I \cup \{j\}$ и $J \setminus \{j\}$. Это два k -элементных множества; поэтому можно рассмотреть моном $x_{I \cup \{j\}} x_{J \setminus \{j\}}$. Соотношение Плюккера, соответствующее такой паре (I, J) , состоит в том, что сумма таких мономов с некоторым образом выбранными знаками равна нулю. Например, последнее полученное нами соотношение Плюккера в $\text{Gr}(3, 6)$ соответствует паре $(\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\})$, а из пары $(\{3, 5\}, \{1, 2, 3, 4\})$ получается уже известное нам уравнение $x_{123}x_{345} - x_{134}x_{235} + x_{234}x_{135} = 0$.

2.2.4 Клетки Шуберта

Вернемся к рассмотрению грассманиана $G = \text{Gr}(2, 4) = \text{Gr}(1, 3)$. Мы будем рассматривать его как многообразие прямых в трехмерном проективном пространстве \mathbb{P}^3 . Зафиксируем для начала какой-нибудь *полный флаг* F в \mathbb{P}^3 , то есть, цепочку вложенных подпространств $\emptyset \subset p \subset L \subset H \subset \mathbb{P}^3$, где p — точка, L — прямая, H — [гипер]плоскость. Посмотрим, как произвольная прямая $\Lambda \in \text{Gr}(1, 3)$ может быть расположена по отношению к флагу $F = (p, L, H)$. Пересечение Λ с пространствами нашего флага выглядит так:

$$\emptyset = \emptyset \cap \Lambda \subseteq p \cap \Lambda \subseteq L \cap \Lambda \subseteq H \cap \Lambda \subseteq \mathbb{P}^3 \cap \Lambda = \Lambda.$$

Размерности трех подпространств $p \cap \Lambda$, $L \cap \Lambda$, $H \cap \Lambda$ могут принимать значения $-1, 0, 1$ (мы считаем, что размерность пустого множества равна -1). Имеется шесть вариантов для набора из этих размерностей, которые и дают шесть множеств нашей стратификации. Опишем ее замкнутые страты геометрическим образом:

$$\begin{aligned} \Sigma_{0,0} &= G; \\ \Sigma_{1,0} &= \{\Lambda \mid \Lambda \cap L \neq \emptyset\}; \\ \Sigma_{2,0} &= \{\Lambda \mid p \in \Lambda\}; \\ \Sigma_{1,1} &= \{\Lambda \mid \Lambda \subset H\}; \\ \Sigma_{2,1} &= \{\Lambda \mid p \in \Lambda \subset H\}; \\ \Sigma_{2,2} &= \{\Lambda \mid \Lambda = L\}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\Sigma_{a,b}$ — это множество прямых, пересекающих $(2-a)$ -мерное подпространство флага F в точке, и $(3-b)$ -мерное подпространство флага F по прямой. Коразмерность $\Sigma_{a,b}$ в G равна $a+b$. Мы будем писать Σ_i вместо $\Sigma_{i,0}$. Нетрудно видеть, что имеются включения

$$\begin{array}{ccccc} & & \Sigma_2 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \{L\} = \Sigma_{2,2} & \hookrightarrow & \Sigma_{2,1} & & \Sigma_1 \hookrightarrow \Sigma_0 = G. \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & \Sigma_{1,1} & & \end{array}$$

Все $\Sigma_{a,b}$ являются замкнутыми подмножествами в G :

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{x_{34} = 0\}; \\ \Sigma_2 &= \{x_{23} = x_{24} = x_{34} = 0\}; \\ \Sigma_{1,1} &= \{x_{14} = x_{23} = x_{24} = 0\}; \\ \Sigma_{2,1} &= \{x_{14} = x_{23} = x_{24} = x_{34} = 0\}; \\ \Sigma_{2,2} &= \{x_{13} = x_{14} = x_{23} = x_{24} = x_{34} = 0\}.\end{aligned}$$

Покажем, что эта стратификация аффинна, то есть, если из множества $\Sigma_{a,b}$ вычесть все содержащиеся в нем $\Sigma_{a',b'}$, то получится аффинное пространство. Продемонстрируем это на самом сложном случае: $\Sigma_1 \setminus (\Sigma_2 \cup \Sigma_{1,1})$. Эта разность состоит из прямых Λ , которые пересекаются с L , но при этом не содержат p и не содержатся в N . Посмотрим на такую прямую Λ ; пусть $q \neq p$ — ее точка пересечения с L . Выберем какую-нибудь плоскость N' , содержащую p и не содержащую L . Пусть q' — точка пересечения Λ с N . Поскольку L не содержится в N , точка q' не лежит в $N \cap N'$. Таким образом, по прямой Λ мы построили две точки q, q' такие, что $q \in L \setminus \{p\}$ и $q' \in N \setminus (N \cap N')$. Понятно, что Λ однозначно определяется парой (q, q') как прямая, проходящая через q и q' . При этом $L \setminus \{p\} \cong \mathbb{A}^1$ и $N \setminus (N \cap N') \cong \mathbb{A}^2$; поэтому $\Sigma_1 \setminus (\Sigma_2 \cup \Sigma_{1,1}) \cong \mathbb{A}^3$.

2.2.5 Вычисление кольца Чжоу $Gr(2, 4)$

Мы будем обозначать элемент $[\Sigma_{a,b}] \in CH^{a+b}(G)$, соответствующий циклу Шуберта $\Sigma_{a,b}$, через $\sigma_{a,b}$. По предложению 2.1.2.3 группа $CH(G)$ порождается элементами $\sigma_{a,b}$, $0 \leq b \leq a \leq 2$. Для вычисления произведения мы будем рассматривать пересечения циклов Шуберта, полученных из двух флагов F, F' , находящихся в общем положении. Это означает, что подпространства флага $F = (p, L, N)$ и флага $F' = (p', L', N')$ пересекаются трансверсально: их пересечение имеет коразмерность не меньше, чем сумма их коразмерностей. В нашем случае это означает, что $p \notin N'$, L пересекается с N' в одной точке, N пересекается с N' по прямой, и симметрично для p', L', N' .

Будем писать $\Sigma_{a,b}$ для циклов, полученных из флага $F = (p, L, N)$, и $\Sigma'_{a,b}$ для циклов, полученных из флага $F' = (p', L', N')$. Циклы $\Sigma_{a,b}$ и $\Sigma'_{a',b'}$ трансверсальны в общей точке (например, в характеристике 0 это сразу следует из теоремы Клеймана 1.3.6.4; в общем случае можно вычислить касательные пространства к циклам Шуберта).

Итак, попробуем посчитать σ_2^2 . Из трансверсальности следует, что $\sigma_2^2 = |\Sigma_2 \cap \Sigma'_2| \cdot \sigma_{2,2}$. Пересечение Σ_2 и Σ'_2 состоит из прямых Λ таких, что $p \in \Lambda$ и $p' \in \Lambda$; но такая прямая ровно одна. Поэтому $\sigma_2^2 = \sigma_{2,2}$.

Аналогично, $\sigma_{1,1}^2 = |\Sigma_{1,1} \cap \Sigma'_{1,1}| \cdot \sigma_{2,2}$. При этом $\Sigma_{1,1} \cap \Sigma'_{1,1} = \{\Lambda \mid \Lambda \subset N \text{ и } \Lambda \subset N'\}$ состоит из единственной прямой $\Lambda = N \cap N'$. Поэтому $\sigma_{1,1}^2 = \sigma_{2,2}$.

С другой стороны, $\Sigma_2 \cap \Sigma'_{1,1} = \{\Lambda \mid p \in \Lambda \subset N'\} = \emptyset$, поскольку $p \notin N'$. Значит, $\sigma_2 \sigma_{1,1} = 0$.

Мы посчитали умножение для элементов в коразмерности 2. Из этого вычисления, к примеру, следует, что образующие $\sigma_2, \sigma_{1,1} \in CH^2(G)$ линейно независимы: матрица их пересечения невырождена.

Вычислим $\sigma_1 \sigma_{2,1}$ для завершения случая комплементарной размерности. Легко видеть, что $\Sigma_1 \cap \Sigma'_{2,1} = \{\Lambda \mid \Lambda \cap L \neq \emptyset \text{ и } p' \in \Lambda \subset N'\}$. При этом L пересекает N' в единственной

точке q , и прямая Λ из рассматриваемого пересечения обязана проходить через p' и q . Поэтому такая прямая снова ровно одна, и $\sigma_1\sigma_{2,1} = \sigma_{2,2}$.

Посмотрим теперь на пересечение циклов Шуберта с суммой коразмерностей < 4 . К примеру, $\Sigma_1 \cap \Sigma'_2$ состоит из прямых Λ , пересекающихся с L и содержащих p' . Рассмотрим новый полный флаг F'' в \mathbb{P}^3 , содержащий точку p' и плоскость, натянутую на p' и L (таких флагов много; можно выбрать любой из них). Легко видеть, что пересечение $\Sigma_1 \cap \Sigma'_2$ является циклом Шуберта $\Sigma''_{2,1}$ относительно этого флага. Поэтому $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_{2,1}$. Аналогично, пересечение Σ_1 и $\Sigma'_{1,1}$ является циклом вида $\Sigma_{2,1}$ относительно какого-нибудь флага, содержащего точку $L \cap H'$ и плоскость H' . Поэтому $\sigma_1\sigma_{1,1} = \sigma_{2,1}$.

Осталось посчитать самое интересное произведение σ_1^2 . Множество $\Sigma_1 \cap \Sigma'_1$ состоит из прямых, пересекающих две прямые L, L' в общем положении, и не является циклом Шуберта. Можно применить метод неопределенных коэффициентов. Мы знаем, что произведение σ_1^2 лежит в $\mathcal{CH}^2(G)$ и, таким образом, является линейной комбинацией вида $\sigma_1^2 = a\sigma_2 + b\sigma_{1,1}$. Для нахождения коэффициентов a, b посмотрим на $\sigma_1^2 \cdot \sigma_2 = (a\sigma_2 + b\sigma_{1,1}) \cdot \sigma_2 = a\sigma_{2,2} + b\sigma_{1,1}\sigma_2$ с учетом уже посчитанного. С другой стороны, $\sigma_1^2 \cdot \sigma_2 = (\sigma_1)(\sigma_1\sigma_2) = \sigma_1 \cdot \sigma_{2,1} = \sigma_{2,2}$. Альтернативой могло бы быть явное вычисление тройного пересечения $\Sigma_1 \cap \Sigma'_1 \cap \Sigma''_2$; это несложно. В любом случае, мы получаем, что $a = 1$.

Наконец, домножим равенство $\sigma_1^2 = a\sigma_2 + b\sigma_{1,1}$ на $\sigma_{1,1}$: $\sigma_1^2 \cdot \sigma_{1,1} = b\sigma_{2,2}$ и, с другой стороны, $\sigma_1^2 \cdot \sigma_{1,1} = \sigma_1(\sigma_1 \cdot \sigma_{1,1}) = \sigma_1 \cdot \sigma_{2,1} = \sigma_{2,2}$. Поэтому и $b = 1$. Это означает, что $\sigma_1^2 = \sigma_2 + \sigma_{1,1}$, что завершает вычисление кольца Чжоу многообразия $G = \text{Gr}(2, 4)$.

Теорема 2.2.5.1. *Циклы Шуберта $\sigma_{a,b} \in \mathcal{CH}^{a+b}(\text{Gr}(2, 4))$, $0 \leq b \leq a \leq 2$ свободно порождают градуированную абелеву группу $\mathcal{CH}^*(\text{Gr}(2, 4))$ и удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= \sigma_{1,1} + \sigma_2; \\ \sigma_1\sigma_{1,1} &= \sigma_1\sigma_2 = \sigma_{2,1}; \\ \sigma_1\sigma_{2,1} &= \sigma_{1,1}^2 = \sigma_2^2 = \sigma_{2,2}; \\ \sigma_{1,1}\sigma_2 &= 0.\end{aligned}$$

Следствие 2.2.5.2. *Кольцо Чжоу грассманиана $\text{Gr}(2, 4)$ изоморфно*

$$\mathcal{CH}^*(\text{Gr}(2, 4)) = \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2]/(\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2, \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_2^2).$$

2.3 Приложения

2.3.1 Четыре прямые в трехмерном пространстве

Задача: сколько прямых в трехмерном проективном пространстве пересекают каждую из четырех прямых общего положения?

Ответ: две прямые. Заметим, что множество прямых, пересекающих некоторую фиксированную прямую L — это в точности цикл Шуберта Σ_1 . Таким образом, задача моментально сводится к вычислению $\sigma_1^4 = (\sigma_1^2)^2 = (\sigma_2 + \sigma_{1,1})^2 = 2\sigma_{2,2}$.

Напомним, что отображением Веронезе степени d называется морфизм $\nu_{d,n}: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$, где $N = \binom{n+d}{n} - 1$, сопоставляющий точке с однородными координатами $[\chi_0 : \chi_1 : \dots : \chi_n]$ точку с однородными координатами $[\dots : \chi^I : \dots]$, где $I = (d_0, d_1, \dots, d_n)$ — мультииндекс такой,

что $d_0 + d_1 + \dots + d_n = d$, и $x^I = x_0^{d_0} x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$. Нетрудно показать, что $\nu_{d,n}$ является вложением и отождествляет, таким образом, проективное пространство \mathbb{P}^n с его образом $V_{d,n} \subseteq \mathbb{P}^N$. При этом $V_{d,n}$ называется **многообразием Веронезе**.

2.3.2 Многообразие Веронезе

Задача: Чему равна степень многообразия Веронезе?

Ответ: Пока что мы так и не определили строго понятие *степени*, но для наших целей достаточно того, что степень подмногообразия размерности n в \mathbb{P}^N — это количество точек пересечения его с n гиперплоскостями в общем положении. Таким образом, мы должны посчитать количество точек пересечения $V_{d,n}$ с n гиперплоскостями. Рассмотрим пулбэк этой ситуации в \mathbb{P}^n вдоль морфизма $\nu_{d,n}$: многообразие Веронезе окажется всем пространством \mathbb{P}^n , каждая гиперплоскость превратится в какую-то гиперповерхность в \mathbb{P}^n , а количество точек пересечения не изменится в силу поведения кольца Чжоу при пулбэках. Гиперплоскость в \mathbb{P}^n задается одним линейным уравнением на координаты x^I ; при пулбэке оно превратится в однородный многочлен степени d относительно координат x_0, \dots, x_n . Поэтому пулбэком каждой гиперплоскости является гиперповерхность степени d . Пересечение n таких гиперповерхностей в общем положении по теореме Безу состоит из d^n точек.

2.3.3 Касательные к кубической кривой

Задача: Сколько касательных можно провести из одной точки в общем положении к гладкой кубической кривой в \mathbb{P}^2 ?

Ответ: 6. Для гладкой гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}^n$, заданной одним уравнением $F(x) = 0$, где F — однородный многочлен степени d относительно координат $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ в \mathbb{P}^n , рассмотрим двойственную кривую $X^* \subset (\mathbb{P}^n)^*$. Напомним, что $(\mathbb{P}^n)^*$ — это многообразие гиперплоскостей в \mathbb{P}^n , то есть, линейных форм на \mathbb{P}^n . По определению X^* состоит из касательных гиперплоскостей к X . Имеется морфизм $T_X: X \rightarrow (\mathbb{P}^n)^*$, сопоставляющий каждой точке $p \in X$ касательную гиперплоскость $T_p X$ к X в точке p . Это алгебраическое отображение, поскольку оно задается набором значений частных производных многочлена F по координатам x_0, \dots, x_n в точке p . Из гладкости X следует, что этот набор не обращается в нулевой на X , поэтому морфизм T_X корректно определен. Кроме того, образ X при отображении T_X равен X^* . Можно доказать, что T_X устанавливает бирациональное отображение между X и его образом в $(\mathbb{P}^n)^*$. Степень X^* равна числу точек пересечения X^* с $n - 1$ гиперплоскостями в общем положении. После пулбэка остается посчитать число точек пересечения X с прообразами гиперплоскостей в X . Поскольку T_X задается однородными многочленами степени $d - 1$, пулбэки гиперплоскостей являются гиперповерхностями степени $d - 1$ в \mathbb{P}^n . По теореме Безу количество точек пересечения X с ними равно $d \cdot (d - 1)^{n-1}$. В частности, при $n = 2$, $d = 3$ получаем шесть точек.

2.3.4 Многообразие Сегре

Задача: Чему равна степень многообразия Сегре?

Напомним, что морфизм $\sigma_{r,s}: \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \rightarrow \mathbb{P}^{(r+1)(s+1)-1}$, $([x_0 : \dots : x_r], [y_0 : \dots : y_s]) \mapsto [\dots : x_i y_j : \dots]$ называется **отображением Сегре**, а его образ $\Sigma_{r,s}$ — **многообразием Сегре**. При желании можно описать его без использования координат: $\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(U \otimes V)$, $[u] \times [v] \mapsto [u \otimes v]$.

Покажем, что $\sigma_{r,s}$ — инъективный морфизм. Пусть $[\dots : z_{ij} : \dots]_{\substack{0 \leq i \leq r \\ 0 \leq j \leq s}}$ — однородные координаты в $\mathbb{P}^{(r+1)(s+1)-1}$. Если $z \in \Sigma_{r,s}$, то наборы $[z_{00} : \dots : z_{r0}]$, $[z_{01} : \dots : z_{r1}]$, \dots , $[z_{0s} : \dots : z_{rs}]$ пропорциональны друг другу и пропорциональны $[x_0 : \dots : x_r]$; хотя бы один из них отличен от нуля, поэтому по z однозначно восстанавливается $x \in \mathbb{P}^r$. Аналогично, можно восстановить $y \in \mathbb{P}^s$, и $\sigma_{r,s}(x, y) = z$.

Многообразие $\Sigma_{r,s}$ выделяется в $\mathbb{P}^{(r+1)(s+1)-1}$ квадратичными уравнениями: действительно, из пропорциональности наборов $[z_{0k} : \dots : z_{rk}]$ и $[z_{0l} : \dots : z_{rl}]$ следует, что $z_{ik}z_{jl} = z_{jk}z_{il}$ для всех i, j, k, l . Обратно, если точка $z \in \mathbb{P}^{(r+1)(s+1)-1}$ удовлетворяет этим уравнениям, то описанная выше процедура дает однозначно определенные точки $x \in \mathbb{P}^r$ и $y \in \mathbb{P}^s$ такие, что $\sigma_{r,s}(x, y) = z$.

Размерность $\Sigma_{r,s}$ равна $r + s$, поэтому степень $\Sigma_{r,s}$ равна количеству точек в пересечении $\Sigma_{r,s}$ с $r + s$ гиперплоскостями в общем положении. После пулбэка в $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$ получаем, что эта степень равна количеству точек в пересечении пулбэков $r + s$ гиперплоскостей. Посчитаем класс Чжоу пулбэка одной гиперплоскости. Гиперплоскость в $\mathbb{P}^{(r+1)(s+1)-1}$ задается линейным однородным многочленом относительно (z_{ij}) . При пулбэке z_{ij} превращается в $x_i y_j$, поэтому пулбэк гиперплоскости задается биоднородным многочленом степени 1 по x и степени 1 по y . По следствию 2.1.3.3 ее класс равен $\alpha + \beta \in \text{CH}^1(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s)$. Пересечение $r + s$ таких пулбэков в общем положении дает класс $(\alpha + \beta)^{r+s} = C_{r+s}^r \alpha^r \beta^s$ в силу соотношений $\alpha^{r+1} = \beta^{s+1} = 0$ в $\text{CH}(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s)$.

Ответ: C_{r+s}^r .

2.3.5 Диагональ и график морфизма

Задача: Пусть A, B, C — однородные многочлены второй степени от трех переменных t_0, t_1, t_2 в общем положении. Сколько существует троек $t = (t_0, t_1, t_2)$ таких, что тройка $(A(t), B(t), C(t))$ пропорциональна t ?

Вычислим, чему равен класс диагонали $\Delta \subseteq \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r$ в кольце Чжоу $\text{CH}(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r)$. Небольшое обобщение позволит нам посчитать класс графика Γ_f морфизма $f: \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \rightarrow \mathbb{P}^r$ в $\text{CH}(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s)$?

Напомним, что $\text{CH}(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r) = \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^{r+1}, \beta^{r+1})$, где α, β — пулбэки классов гиперплоскостей в \mathbb{P}^r относительно проекций $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r$ на сомножители. Заметим, что класс диагонали $\delta = [\Delta]$ обязан выражаться в виде $\delta = c_0 \alpha^r + c_1 \alpha^{r-1} \beta + c_2 \alpha^{r-2} \beta^2 + \dots + c_r \beta^r$ для некоторых $c_0, \dots, c_r \in \mathbb{Z}$. Умножим обе части на класс $\alpha^i \beta^{r-i}$. В правой части останется только слагаемое с c_i , поэтому $\delta \alpha^i \beta^{r-i} = c_i \alpha^r \beta^r$. Посчитаем левую часть: пусть Λ, Γ — линейные подпространства в \mathbb{P}^r коразмерности i и $r - i$ соответственно. Тогда $[\Lambda \times \Gamma] = \alpha^i \beta^{r-i}$, а пересечение Δ и $\Lambda \times \Gamma$ изоморфно $\Lambda \cap \Gamma$. Но подпространства Λ и Γ в общем положении пересекаются в одной точке. Значит, $\delta = \alpha^r + \alpha^{r-1} \beta + \alpha^{r-2} \beta^2 + \dots + \beta^r$.

Пусть теперь $f: \mathbb{P}^r \rightarrow \mathbb{P}^s$ — морфизм, задаваемый набором из однородных многочленов F_0, \dots, F_s одинаковой степени d без общих нулей: $f: [x_0 : \dots : x_r] \mapsto [F_0(x), \dots, F_s(x)]$. По следствию 2.1.3.2 тогда $s \geq r$. Пусть $\Gamma_f \subseteq \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$ — график морфизма f . Чему равен класс $\gamma_f = [\Gamma_f] \in \text{CH}^s(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s)$?

Как и для диагонали, можно записать $\gamma_f = c_0 \alpha^r \beta^{s-r} + c_1 \alpha^{r-1} \beta^{s-r+1} + c_2 \alpha^{r-2} \beta^{s-r+2} + \dots + c_r \beta^s$ для некоторых $c_0, \dots, c_r \in \mathbb{Z}$. Умножим это равенство на $\alpha^i \beta^{r-i}$: $\gamma_f \cdot \alpha^i \beta^{r-i} = c_i \alpha^r \beta^s$. Отсюда видно, что c_i равно количеству точек в пересечении $\Gamma_f \cap (\Lambda \times \Gamma)$, где $\Lambda \cong \mathbb{P}^{r-i} \subseteq \mathbb{P}^r$ и $\Gamma \cong \mathbb{P}^{s-r+i} \subseteq \mathbb{P}^s$ — линейные подпространства в общем положении. Это пересечение трансверсально в силу теоремы Клеймана 1.3.6.4. При этом $\Gamma_f \cap (\Lambda \times \Gamma)$ является множеством нулей в Λ линейных комбинаций (в общем положении) многочленов F_0, \dots, F_s в количестве $r-i$ штук. По теореме Бертини (см. [Хартсхорн, ???]) соответствующие им гиперповерхности пересекаются трансверсально, и по теореме Безу число точек пересечения равно d^{r-i} . Поэтому $\gamma_f = \sum_{i=0}^r d^i \alpha^i \beta^{s-i} \in \mathbb{C}H^s(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s)$.

Вернемся к исходной задаче. Набор F_0, \dots, F_r однородных многочленов степени d от $r+1$ переменных в общем положении определяет морфизм $f: \mathbb{P}^r \rightarrow \mathbb{P}^r$. Посчитаем число неподвижных точек этого отображения: $|\{t \in \mathbb{P}^r \mid f(t) = t\}|$. В силу теоремы Клеймана можно считать (после сдвига при помощи $GL_{r+1} \times GL_{r+1}$), что это число равно степени пересечения графика γ_f морфизма f с диагональю $\Delta \subseteq \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r$. Она равна $\delta \cdot \gamma_f = (\alpha^r + \alpha^{r-1} \beta + \dots + \beta^r) \cdot (d^r \alpha^r + d^{r-1} \alpha^{r-1} \beta + \dots + \beta^r) = d^r + d^{r-1} + \dots + d + 1$.

Ответ: подставляя $d = r = 2$, получаем 7 точек.

2.3.6 Раздутие проективного пространства в точке

Пусть $p \in \mathbb{P}^n$. Рассмотрим рациональное отображение $\pi_p: \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$, задаваемое проекцией из точки p на гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$, не проходящую через p . Более точно, выберем некоторую гиперплоскость в \mathbb{P}^n , не содержащую p . Для каждой точки $x \neq p$ из \mathbb{P}^n рассмотрим прямую, проходящую через p и x . Она пересекается с нашей гиперплоскостью в единственной точке $\pi_p(x)$. Нетрудно показать, что это действительно задает рациональное отображение. Пусть Z — замыкание графика проекции π_p в $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$. Морфизм $\pi: Z \rightarrow \mathbb{P}^n$, индуцированный проекцией на первый сомножитель, называется **раздутием** \mathbb{P}^n в точке p . Обозначим через α проекцию на второй сомножитель:

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \pi \swarrow & & \searrow \alpha \\ \mathbb{P}^n & \dashrightarrow \pi_p \dashrightarrow & \mathbb{P}^{n-1} \end{array}$$

Прообраз точки p в Z называется **исключительным дивизором**: $E = \pi^{-1}(p)$. При этом $E = \{p\} \times \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$. Посмотрим на прообразы гиперплоскостей из \mathbb{P}^n . Если H' — гиперплоскость, не содержащая p , то $\pi^{-1}(H') \cong H'$; вообще, π устанавливает изоморфизм между $Z \setminus E$ и $\mathbb{P}^n \setminus \{p\}$. Если же H проходит через p , то $\pi^{-1}(H)$ состоит из двух дивизоров: E и некоторого дивизора H' , который называется **строгим прообразом** H . Вообще, если $Y \subset \mathbb{P}^n$ — некоторое подмногообразие, строгим прообразом Y называется замыкание в Z прообраза $\pi^{-1}(Y \setminus \{p\})$.

Вычислим кольцо Чжоу Z . Для этого мы построим стратификацию Z : начав со стратификации \mathbb{P}^{n-1} , возьмем ее пулбэк в Z вдоль α , и пересечем его с сечением Λ морфизма α . Пусть $\Lambda' \cong \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ — гиперплоскость, не содержащая p , а $\Lambda = \pi^{-1}(\Lambda')$ — ее прообраз в Z . Проекция $\alpha: Z \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ индуцирует изоморфизм между Λ и \mathbb{P}^{n-1} . Таким образом, Λ является сечением α . Выберем полный флаг $\Gamma'_0 \subset \Gamma'_1 \subset \dots \subset \Gamma'_{n-1} \subset \Gamma'_{n-1} = \mathbb{P}^{n-1}$ и положим $\Gamma_k = \alpha^{-1}(\Gamma'_{k-1}) \subset Z$ для $k = 1, 2, \dots, n$. Легко видеть, что размерность Γ_k равна k . Далее, для $k = 0, 1, \dots, n-1$ положим $\Lambda_k = \Gamma_{k+1} \cap \Lambda$. Подмногообразия $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \Lambda_0, \dots, \Lambda_{n-1}$

являются замкнутыми стратами стратификации Z :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \Lambda_0 & \hookrightarrow & \Lambda_1 & \hookrightarrow & \Lambda_2 & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \Lambda_{n-2} & \hookrightarrow & \Lambda_{n-1} \\ & \searrow & & \searrow & & & & & & \searrow & & \searrow \\ & & \Gamma_1 & \hookrightarrow & \Gamma_2 & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \Gamma_{n-2} & \hookrightarrow & \Gamma_{n-1} & \hookrightarrow & \Gamma_n \end{array}$$

Проверим, что мы получили аффинную стратификацию. Очевидно, что $\Lambda_k \setminus \Lambda_{k-1}$ — аффинное пространство. Посмотрим на $\Gamma_k \setminus (\Lambda_{k-1} \cup \Gamma_{k-1})$. Можно выбрать координаты так, что $p = [1 : 0 : \dots : 0]$ и $\Lambda' = \{x_0 = 0\} \subset \mathbb{P}^n$. При этом раздутие $Z \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ задается следующими уравнениями:

$$Z = \{([x_0 : \dots : x_n], [y_0 : \dots : y_n] \mid x_i y_j = x_j y_i \text{ для всех } i, j \geq 1)\}.$$

Пусть $\Gamma'_{k-1} = \{y_1 = \dots = y_{n-k} = 0\} \subset \mathbb{P}^{n-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma_k \setminus (\Lambda_{k-1} \cup \Gamma_{k-1}) &= \alpha^{-1}(\Gamma'_{k-1} \setminus \Gamma'_{k-2}) \cap (Z \setminus \Lambda) \\ &= \{([1 : 0 : \dots : \lambda : \lambda y_{n-k+2} : \dots : \lambda y_n], (0 : \dots : 0 : 1 : y_{n-k+2} : \dots : y_n))\}, \end{aligned}$$

и набор $(\lambda, y_{n-k+2}, \dots, y_n)$ устанавливает изоморфизм между стратой $\Gamma_k \setminus (\Lambda_{k-1} \cup \Gamma_{k-1})$ и аффинным пространством \mathbb{A}^k .

Из существования аффинной стратификации следует, что классы $\lambda_k = [\Lambda_k]$ и $\gamma_k = [\Gamma_k]$ порождают группы $\text{CH}_k(Z)$. Посмотрим, как они перемножаются. Заметим для этого, что Λ_k является прообразом k -плоскости в \mathbb{P}^n , не содержащей p , и любые две такие k -плоскости линейно эквивалентны в \mathbb{P}^n . Поэтому класс пулбэка любой k -плоскости в \mathbb{P}^n , не содержащей p , равен λ_k . Аналогично, класс собственного прообраза любой k -плоскости в \mathbb{P}^n , содержащей p , равен γ_k .

Пересечение k -плоскости с l -плоскостью в общем положении в n является $(k+l-n)$ -плоскостью в общем положении. Поэтому $\lambda_k \lambda_l = \lambda_{k+l-n}$ для всех $k+l \geq n$. Аналогично, пересечение k -плоскости, содержащей p и l -плоскости, содержащей p , в \mathbb{P}^n , является $(k+l-n)$ -плоскостью, не содержащей p , поэтому $\gamma_k \gamma_l = \lambda_{k+l-n}$ для всех $k+l \geq n$. Аналогично, $\gamma_k \gamma_l = \gamma_{k+l-n}$ для всех $k+l \geq n+1$. Мы полностью описали умножение. Спаривание $\text{CH}_k(Z) \times \text{CH}_{n-k}(Z) \rightarrow \text{CH}_0(Z) \cong \mathbb{Z}$ задается равенствами $\lambda_k \lambda_{n-k} = \lambda_k \gamma_{n-k} = \gamma_k \lambda_{n-k} = 1$ и $\gamma_k \gamma_{n-k} = 0$. Из невырожденности этого спаривания следует, что $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ и $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ свободно порождают $\text{CH}(Z)$.

Выразим класс исключительного дивизора E через образующие Λ_{n-1} и Γ_{n-1} группы $\text{CH}_{n-1}(Z)$. Заметим, что Λ'_{n-1} эквивалентно в \mathbb{P}^n гиперплоскости $\sigma \subset \mathbb{P}^n$, содержащей p . Пулбэк этой гиперплоскости Σ линейно эквивалентен объединению исключительного дивизора E и некоторого дивизора D . После проекции на \mathbb{P}^{n-1} дивизор D превращается в гиперплоскость, поэтому он содержится в прообразе Γ этой гиперплоскости. Из неприводимости Γ и совпадения размерностей следует, что $D = \Gamma$. Поэтому $[\Lambda_{n-1}] = [D] + [E] = [\Gamma_{n-1}] + [E]$, откуда $[E] = \lambda_{n-1} - \gamma_{n-1}$.

Положим теперь $\lambda = \lambda_{n-1}$, $e = [E] = \lambda - \gamma_{n-1}$. Поскольку пересечение Λ_{n-1} с E пусто, $\lambda e = 0$. Кроме того, $\lambda_k = \lambda^{n-k}$ для $k = 0, \dots, n-1$, как и в кольце Чжоу проективного пространства. Далее, $\gamma_k = \gamma_{n-1}^{n-k} = (\lambda - e)^{n-k} = \lambda^{n-k} + (-1)^{n-k} e^{n-k}$ для $k = 1, \dots, n$. Из этого следует, что λ и e порождают кольцо $\text{CH}(Z)$. Они удовлетворяют соотношению

$\lambda e = 0$; кроме того, $0 = \lambda_{n-1}^n = (\lambda - e)^n = \lambda^n + (-1)^n e^n$. Значит, наше кольцо Чжоу является фактор-кольцом кольца $\mathbb{Z}[\lambda, e]/(\lambda e, \lambda^n + (-1)^n e^n)$. Заметим, что каждый однородный элемент степени m в этом кольце является целочисленной линейной комбинацией e^m и λ^m . При этом $\text{CH}^m(Z)$ является свободным \mathbb{Z} -модулем ранга 2. Значит, каноническая проекция указанного кольца на $\text{CH}(Z)$ является изоморфизмом.

3 Мотивы Чжоу

3.1 Категория мотивов Чжоу

3.1.1 Соответствия

Пусть k — произвольное поле. Рассмотрим категорию SmProj/k гладких проективных многообразий над k . Напомним, что для произвольного морфизма $f: X \rightarrow Y$ в этой категории мы определили пушфорвард $f_*: \text{CH}_r(X) \rightarrow \text{CH}_r(Y)$ и пулбэк $f^*: \text{CH}^s(Y) \rightarrow \text{CH}^s(X)$. Опишем их еще одним образом. Рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \\ \downarrow \pi_X & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \text{Spec}(k). \end{array}$$

Пусть $\Gamma_f \subset X \times Y$ — график морфизма f . Тогда

$$\begin{aligned} \text{если } \alpha \in \text{CH}_r(X), \text{ то } f_*(\alpha) &= (\pi_Y)_*(\pi_X^*(\alpha) \cdot [\Gamma_f]), \text{ и} \\ \text{если } \beta \in \text{CH}^s(Y), \text{ то } f^*(\beta) &= (\pi_X)_*(\pi_Y^*(\beta) \cdot [\Gamma_f]). \end{aligned}$$

Заметим, что теперь мы можем обобщить отображения f_* и f^* , подставив в эти формулы не $[\Gamma_f]$, а произвольный цикл на $X \times Y$.

Определение 3.1.1.1. Пусть X, Y — гладкие проективные эквиразмерные многообразия. **Соответствием** степени d из X в Y называется элемент группы Чжоу $\text{CH}^{\dim(Y)+d}(X \times Y)$. Для такого соответствия γ степени d определены отображения

$$\begin{aligned} \gamma_*: \text{CH}_r(X) &\rightarrow \text{CH}_{r-d}(Y), & \alpha &\mapsto (\pi_Y)_*(\pi_X^*(\alpha) \cdot \gamma), \\ \gamma^*: \text{CH}^s(Y) &\rightarrow \text{CH}^{s+d}(X), & \beta &\mapsto (\pi_X)_*(\pi_Y^*(\beta) \cdot \gamma). \end{aligned}$$

Заметим, что график морфизма $f: X \rightarrow Y$ является соответствием степени 0. Кроме того, имеется естественная биекция между соответствиями из X в Y степени d и соответствиями из Y в X степени $\dim(Y) - \dim(X) + d$.

Для построения категории соответствий осталось определить их композицию; нам удастся это сделать так, что в случае графиков морфизмов мы получим обычную композицию морфизмов. Пусть $\varphi \in \text{CH}_{\dim(X)-a}(X \times Y)$ — соответствие из X в Y степени a , $\psi \in \text{CH}_{\dim(Y)-b}(Y \times Z)$ — соответствие из Y в Z степени b . Рассмотрим канонические проекции

$$\begin{array}{ccccc} & & X \times Y \times Z & & \\ & \swarrow & \downarrow \pi_{X,Z} & \searrow \pi_{Y,Z} & \\ X \times Y & & X \times Z & & Y \times Z. \end{array}$$

Определим композицию φ и ψ формулой

$$\psi \circ \varphi = (\pi_{X,Z})_*((\pi_{X,Y})^*(\varphi) \cdot (\pi_{Y,Z})^*(\psi)) \in \text{CH}_{\dim(X)-(a+b)}(X \times Z).$$

Таким образом, композиция соответствия степени a и соответствия степени b является соответствием степени 0 . Из свойств пулбэка и пушфорварда следует, что так определенная операция композиции ассоциативна, и что для морфизмов $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ выполнено $[\Gamma_g] \circ [\Gamma_f] = [\Gamma_{g \circ f}]$.

В частности, композиция задает структуру градуированной ассоциативной алгебры на абелевой группе $\text{CH}^*(X \times X)$. Это алгебра с единицей, которой является класс диагонали $[\Delta_X]$. Не следует путать ее с коммутативной алгеброй $\text{CH}^*(X \times X)$, \cdot : алгебра $(\text{CH}^*(X \times X), \circ)$ редко является коммутативной. При этом соответствия степени 0 образуют подалгебру $(\text{CH}^{\dim(X)}(X \times X), \circ)$ в алгебре $(\text{CH}^*(X \times X), \circ)$.

Можно отождествить $\text{CH}_r(X)$ с соответствиями степени $(-r)$ из $\text{Spec}(k)$ в X , а $\text{CH}^s(Y)$ — с соответствиями степени s из Y в $\text{Spec}(k)$. При этом выписанные ранее формулы для пулбэка и пушфорварда для соответствия γ степени d из X в Y превращаются в частные случаи композиции: $\gamma_*(\alpha) = \gamma \circ \alpha$, $\gamma^*(\beta) = \beta \circ \gamma$.

Теперь мы можем определить категорию соответствий $\text{Corr}(k)$. Ее объекты — гладкие проективные многообразия над k . Мы будем писать $[X] \in \text{Corr}(k)$ для $X \in \text{SmProj}(k)$. Положим $\text{Mor}_{\text{Corr}(k)}([X], [Y]) = \text{CH}_{\dim(X)}(X \times Y)$. Таким образом, морфизмы между $[X]$ и $[Y]$ — это соответствия степени 0 из X в Y (здесь мы для простоты предполагаем, что X эквиразмерно). Композицией в категории $\text{Corr}(k)$ будет композиция соответствий \circ .

Как мы обсуждали выше, имеется функтор $\mathcal{C}: \text{SmProj}(k) \rightarrow \text{Corr}(k)$, переводящий объект X в $[X]$ и морфизм $f: X \rightarrow Y$ в $[\Gamma_f]$. Категория соответствий обладает естественной структурой тензорной аддитивной категории: $[X] \oplus [Y] = [X \amalg Y]$, $[X] \otimes [Y] = [X \times Y]$.

3.1.2 Мотивы Чжоу

Пусть X — гладкое проективное многообразие над k , и p — проектор на X , то есть, соответствие между X и X степени 0 такое, что $p \circ p = p$. Тогда

$$\text{CH}^d(X) = (\text{CH}^d(X) \circ p) \oplus (\text{CH}^d(X) \circ (\text{id}_{[X]} - p)).$$

Аналогичное разложение выполнено и для соответствий:

$$\text{Mor}_{\text{Corr}(k)}([X], [Y]) = (\text{Mor}_{\text{Corr}(k)}([X], [Y]) \circ p) \oplus (\text{Mor}_{\text{Corr}(k)}([X], [Y]) \circ (\text{id}_{[X]} - p)).$$

Наша цель — расширить категорию $\text{Corr}(k)$, чтобы в ней появился объект U (построенный по X и p) такой, что $\text{Mor}_?(U, [Y]) = \text{Mor}_{\text{Corr}(k)}([X], [Y]) \circ p$. Такая категория может быть построена по любой аддитивной категории и называется псевдо-абелевой оболочкой (или оболочкой Каруби) исходной категории.

Пусть \mathcal{C} — аддитивная категория. Определим новую категорию $\text{PA}(\mathcal{C})$ следующим образом. Объекты $\text{PA}(\mathcal{C})$ — пары (A, p) , где A — объект \mathcal{C} , $p \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ — проектор, то есть, $p \circ p = p$. Морфизмы в $\text{PA}(\mathcal{C})$ между (A, p) и (B, q) — это множество $q \circ \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \circ p$, то есть, множество морфизмов из $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, имеющих вид $q \circ f \circ p$ для некоторого f . Композиция в $\text{PA}(\mathcal{C})$ индуцирована композицией в \mathcal{C} . Имеется естественный функтор PA , переводящий объект $[X]$ в пару $([X], \text{id})$ с тривиальным действием на морфизмах.

Псевдо-абелева оболочка категории $\text{Corr}(k)$ называется **категорией эффективных мотивов Чжоу над k** : $\text{Chow}^{\text{eff}}(k) = \text{PA}(\text{Corr}(k))$. Композиция функторов C и PA называется **мотивным функтором M** из категории гладких проективных многообразий над k в категорию эффективных мотивов Чжоу:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Corr}(k) & \\ C \nearrow & & \searrow \text{PA} \\ \text{SmProj}(k) & \xrightarrow{M} & \text{Chow}^{\text{eff}}(k) \end{array}$$

Для гладкого проективного многообразия X его образ $M(X)$ называется **мотивом X** .

3.1.3 Подкрутка Тейта

Кроме того, в Chow^{eff} много новых объектов: например, $M(\mathbb{P}^1)$ раскладывается в прямую сумму двух объектов. Действительно, $M(\mathbb{P}^1)$ — это пара $(\mathbb{P}^1, [\Delta_{\mathbb{P}^1}] \in \text{CH}_1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1))$, и в $\text{CH}_1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ класс диагонали $[\Delta_{\mathbb{P}^1}]$ равен сумме классов $[\text{pt} \times \mathbb{P}^1]$ и $[\mathbb{P}^1 \times \text{pt}]$ (см. 2.3.5), которые являются попарно ортогонально проекторами относительно композиции \circ . Поэтому

$$M(\mathbb{P}^1) = ([\mathbb{P}^1], [\mathbb{P}^1 \times \text{pt}]) \oplus ([\mathbb{P}^1], [\text{pt} \times \mathbb{P}^1]).$$

Первое слагаемое в этой сумме изоморфно мотиву точки $M(\text{Spec}(k))$; мы будем обозначать его через $\mathbb{Z}(0)[0] = \mathbb{Z}\{0\} = \mathbb{Z}$. Второе слагаемое обозначается через $\mathbb{Z}(1)[2] = \mathbb{Z}\{1\}$ и называется **мотивом Тейта**. Таким образом, $M(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[2]$. Можно показать, что Chow^{eff} , как и $\text{Corr}(k)$, является тензорной аддитивной категорией, причем функтор M сохраняет эту структуру: $M(X) \oplus M(Y) = M(X \amalg Y)$, $M(X) \otimes M(Y) = M(X \times Y)$. Определим мотив Тейта $\mathbb{Z}\{n\} = \mathbb{Z}(n)[2n] = (\mathbb{Z}(1)[2])^{\otimes n}$. В соответствии с этим определением, это прямое слагаемое в $(\mathbb{P}^1)^n$. Кроме того, он является прямым слагаемым в мотиве $M(X)$ любого гладкого проективного n -мерного многообразия X , у которого есть рациональная точка; он соответствует проектору $[\text{pt} \times X]$. Определим аддитивный функтор

$$(n)[2n]: \text{Chow}^{\text{eff}}(k) \rightarrow \text{Chow}^{\text{eff}}(k), \quad U \mapsto U(n)[2n] = U \otimes \mathbb{Z}(n)[2n].$$

В категории $\text{Chow}^{\text{eff}}(k)$ мы встретим только мотивы Тейта $\mathbb{Z}(n)[m]$ для $m = 2n$. Однако, $\text{Chow}^{\text{eff}}(k)$ является полной аддитивной подкатегорией в триангулированной категории мотивов $\text{DM}_-(k)$, в которой присутствуют мотивы Тейта вида $\mathbb{Z}(n)[m]$ для всевозможных пар натуральных чисел (n, m) .

3.2 Примеры

3.2.1 Мотив проективного пространства

Как мы знаем, если X — гладкое проективное многообразие над k , то $\text{CH}^*(X \times \mathbb{P}^r) = \text{CH}^*(X)[H]/(H^{r+1})$, где H — класс гиперплоскости в $\text{CH}^1(\mathbb{P}^r)$. Посчитаем алгебру $(\text{CH}^*(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r), \circ)$ соответствий на \mathbb{P}^r . Мы знаем, что $\text{CH}^*(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r)$ является свободной абелевой группой ранга $(r+1)^2$, порожденной классами $[H^i \times H^j]$, $0 \leq i, j \leq r$. Посмотрим, как эти порождающие элементы ведут себя относительно композиции. Чтобы посчитать композицию $[H^i \times H^j] \circ [H^k \times H^l]$, мы должны пересечь классы $[H^i \times H^j \times \text{pt}]$ и $[\text{pt} \times H^k \times H^l]$ в

$\mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r)$ и посмотреть на его пушфорвард в $\mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r)$ вдоль проекции на произведение первого и третьего сомножителей. Очевидно, что в случае $j + k \neq r$ мы получим нулевой ответ: для $j + k > r$ пересечение указанных классов пусто, а для $j + k < r$ мы получим 0 после пушфорварда. Если же $j + k = r$, то пересечение $[H^j]$ и $[H^k]$ в центральном сомножителе даст точку, и после пушфорварда останется $[H^i \times H^l]$. Теперь видно, что после обозначения $e_{ij} = [H^i \times H^{r-j}]$ мы получим

$$e_{ij} \circ e_{kl} = \begin{cases} e_{il}, & \text{если } j = k; \\ 0, & \text{если } i = l. \end{cases}$$

Таким образом, алгебра $(\mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r), \circ)$ изоморфна матричной алгебре $M_{r+1}(\mathbb{Z})$. Подалгебра $(\mathrm{CH}^r(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r), \circ)$ соответствий степени 0 на \mathbb{P}^r изоморфна алгебре \mathbb{Z}^{r+1} , вложенной в матричную алгебру посредством диагональных матриц. Можно показать, что

$$M(\mathbb{P}^r) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\{1\} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\{r\},$$

причем прямому слагаемому $\mathbb{Z}(m)[2m]$ соответствует $([\mathbb{P}^r], e_{m,m})$.

Боле того, для любого проективного многообразия X мы знаем, что $\mathrm{CH}^*(X \times \mathbb{P}^r) = \mathrm{CH}^*(X)[H]/(H^{r+1})$; аналогичное рассуждение показывает, что $M(X \times \mathbb{P}^r)$ представляется в виде прямой суммы

$$M(X \times \mathbb{P}^r) = \bigoplus_{m=0}^r M(X)\{m\},$$

где слагаемое $M(X)\{m\}$ соответствует паре $([X \times \mathbb{P}^r], \mathrm{id}_X \times e_{m,m})$.

Заметим теперь, что $\mathrm{CH}^*(X \times Y \times \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^n \mathrm{CH}^{*+j-n-i}(X \times Y) \times e_{i,j}$. Кроме того, по определению морфизмов [эффективных] мотивов Чжоу выполнено

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(k)}(M(X)\{m\}, M(Y)\{n\}) = (\mathrm{id}_X \times e_{n,n}) \circ \mathrm{CH}^{\dim(Y)+n}(X \times Y \times \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \circ (\mathrm{id}_X \times e_{m,m}).$$

Из этих равенств следует, что

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(k)}(M(X)\{m\}, M(Y)\{n\}) = \mathrm{CH}^{\dim(Y)+n-m}(X \times Y) \times e_{m,n}.$$

Отсюда немедленно получаем два следующих предложения.

Предложение 3.2.1.1.

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(k)}(\mathbb{Z}\{i\}, \mathbb{Z}\{j\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \cdot \mathrm{id}, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Предложение 3.2.1.2. *Имеются естественные изоморфизмы*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(k)}(M(X), \mathbb{Z}\{s\}) = \mathrm{CH}^s(X);$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(k)}(\mathbb{Z}\{r\}, M(Y)) = \mathrm{CH}_r(Y).$$

Это мотивирует следующее определение.

Определение 3.2.1.3. Для произвольного объекта U категории $\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(k)$ положим

$$\mathrm{CH}_r(U) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(k)}(\mathbb{Z}\{r\}, U),$$

$$\mathrm{CH}^s(U) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(k)}(U, \mathbb{Z}\{s\}).$$

3.2.2 Альтернативное построение мотивов Чжоу

3.2.3 Относительные клеточные многообразия

Полезным инструментом вычисления мотивов служит следующая теорема Никиты Карпенко. Напомним, что плоский морфизм $\varphi: X \rightarrow Z$ называется **аффинным расслоением** относительной размерности d , если у каждой точки $z \in Z$ найдется открытая по Зарискому окрестность $U \subseteq Z$ такая, что $\varphi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{A}^d$ как схема над U . Морфизм φ называется **аффинным квази-расслоением**, если слой $\varphi^{-1}(z)$ в каждой точке изоморфен $\mathbb{A}_{k(z)}^d$.

Теорема 3.2.3.1 (Карпенко). *Пусть X — гладкое проективное многообразие над полем k с фильтрацией*

$$X = X_n \supset X_{n-1} \supset \dots \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset,$$

в которой X_i — замкнутые подмногообразия. Предположим также, что для каждого $i = 0, \dots, n$ разность $X_i \setminus X_{i-1}$ является аффинным расслоением над замкнутым проективным многообразием Z_i , а именно, $\varphi_i: X_i \setminus X_{i-1} \rightarrow Z_i$ — аффинное расслоение относительной размерности a_i . Тогда

$$M(X) = \bigoplus_{i=0}^n M(Z_i)\{a_i\}.$$

На самом деле, аналогичное разложение имеет место уже в категории соответствий. Многообразию X с фильтрацией как в теореме Карпенко мы будем называть **относительным клеточным**. Многообразие X называется **клеточным**, если все Z_i являются точками.

Следующая теорема Биялыницки-Вирулы показывает, что относительные клеточные многообразия естественным образом возникают из действий группы \mathbb{G}_m на многообразиях; в частности, мы будем применять ее к многообразиям с действием некоторой редуктивной алгебраической группы G , и получать действие \mathbb{G}_m из [ко]характеров тора G .

Теорема 3.2.3.2 (Białynicki-Birula). *Пусть X — гладкое проективное многообразие над k с действием мультипликативной группы \mathbb{G}_m . Тогда*

1. *Множество неподвижных точек $X^{\mathbb{G}_m}$ является гладкой замкнутой подсхемой в X .*
2. *Существует нумерация компонент связности множества неподвижных точек $X^{\mathbb{G}_m} = \coprod_{i=1}^n Z_i$ и фильтрация*

$$X = X_n \supset X_{n-1} \supset \dots \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$$

с аффинными расслоениями $\varphi_i: X_i \setminus X_{i-1} \rightarrow Z_i$.

3. *Относительная размерность a_i аффинного расслоения φ_i равна сумме размерностей собственных подпространств действия \mathbb{G}_m на касательном пространстве к X в произвольной точке $z \in Z_i$, соответствующих положительным собственным числам. Размерность Z_i равна размерности множества неподвижных точек действия \mathbb{G}_m на $T_z X$.*

Разложение в теореме Бьялиницки-Бирулы достаточно явное: разность $X_i \setminus X_{i-1}$ — это множество точек $x \in X$ таких, что $\lim_{t \rightarrow 0} tx \in Z_i$, где $(t, x) \mapsto tx$ — действие \mathbb{G}_m . Расслоение $\varphi_i: X_i \setminus X_{i-1} \rightarrow Z_i$ тогда задается формулой $x \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} tx$. Точнее, из проективности X следует, что морфизм $\mathbb{G}_m \rightarrow X$, $t \mapsto tx$ продолжается до морфизма $\mathbb{A}^1 \rightarrow X$ (при стандартном вложении $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{A}^1$). Значение этого продолжения в добавленной точке $0 \in \mathbb{A}^1$ и называется пределом $\lim_{t \rightarrow 0} tx$. Из отделимости X следует, что это значение определено однозначно.

3.2.4 Мотив расщепимой квадрики

Пусть $q: V \rightarrow k$ — невырожденная квадратичная форма на пространстве V размерности $n+2$, и $\text{char } k \neq 2$. Пусть Q — соответствующая n -мерная гладкая проективная квадрика, то есть, множество нулей q в проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$: $Q = \{q = 0\}$.

Напомним, что q называется **изотропной**, если для некоторого ненулевого $v \in V$ выполнено $q(v) = 0$. Тогда по теореме о выделении гиперболической плоскости найдется подпространство $W \subseteq V$ и два линейно независимых вектора v_1, v_2 таких, что ограничение q на $\langle v_1, v_2 \rangle$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Иными словами, $V = kv_1 \oplus kv_2 \oplus W$ и форма q в соответствии с этим разложением выглядит так: $q(xv_1 + yv_2 + w) = xy + q'(w)$ для некоторой невырожденной квадратичной формы q' на W . В этом случае имеется действие мультипликативной группы \mathbb{G}_m на Q :

$$[xv_1 + yv_2 + w] \mapsto [txv_1 + t^{-1}yv_2 + w].$$

Предположим также, что $\dim(W) > 0$. Нетрудно видеть, что множество неподвижных точек $Q^{\mathbb{G}_m}$ состоит из трех компонент: две точки $Z_1 = [v_1]$, $Z_3 = [v_2]$ и квадрика $Z_2 = Q' = \{[w] \in \mathbb{P}(W) \mid q'(w) = 0\}$. Несложное вычисление показывает, что $a_1 = 0$, $a_3 = n$ и $a_2 = 1$. Имеется фильтрация

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \longleftarrow & Q_1 & \longleftarrow & Q_2 & \longleftarrow & \emptyset \\ & & \downarrow \mathbb{A}^0 & & \downarrow \mathbb{A}^1 & & \downarrow \mathbb{A}^n \\ & & Z_1 & & Z_2 & & Z_3 \end{array}$$

где $Q_1 = Q \setminus [v_1]$, $Q_2 = \{[x : y : w] \in Q \mid y \neq 0\}$.

Следовательно, мотив квадрики Q раскладывается в прямую сумму

$$M(Q) = \mathbb{Z} \oplus M(Q')[1] \oplus \mathbb{Z}[n].$$

Если квадрика Q была расщепимой и размерность подквадрики Q' больше 0, то к ней можно применить это же вычисление. Таким образом, по индукции (с учетом аккуратного рассмотрения случая $n = 2$) мы получаем, что мотив расщепимой n -мерной квадрики Q равен

$$M(Q) = \bigoplus_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (\mathbb{Z}[k] \oplus \mathbb{Z}[n-k]).$$

Обратите внимание, что случай четного n отличается от случая нечетного n наличием двух слагаемых в размерности $n/2$.

Можно явно описать проекторы, дающие указанное разложение: при фиксированном i имеются два проектора $[l_i \times h^i]$ и $[h^i \times l_i]$, где h^i — i -ая степень гиперплоского сечения, то есть, сечение плоскостью коразмерности i (в общем положении), а l_i — проективное [изотропное] подпространство размерности i в Q ; такое существует для всех нужных i в силу расщепимости квадрики. Отметим, что мотив нечетномерной расщепимой квадрики совпадает с мотивом проективного пространства той же размерности, хотя они не изоморфны как многообразия (в размерности ≥ 3). Это показывает, что в общем случае невозможно восстановить многообразие по его мотиву. Из предложений 3.2.1.1 и 3.2.1.2 теперь следует, что

$$\mathrm{CH}^i(Q) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & 0 \leq i \leq \dim(Q), i \neq \dim(Q)/2, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & i = \dim(Q)/2, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

для расщепимой квадрики Q .

3.3 Мотив нерасщепимой квадрики

3.3.1 Общие соображения

В предыдущем разделе мы видели, что мотив изотропной квадрики обладает прямыми слагаемыми, соответствующими мотивам Тейта и мотиву некоторой подквадрики меньшей размерности. Таким образом, возникает естественный вопрос — можем ли мы сказать что-нибудь про мотив анизотропной квадрики? Первым шагом в этом направлении стало вычисление Маркусом Ростом мотива квадрики Пфистера.

Пусть вначале Q — n -мерная расщепимая квадратика, и n четно. Из рассуждений раздела 3.2.4 несложно получить явное описание кольца Чжоу квадрики Q . Сейчас мы выберем в нем немного другой базис. А именно, пусть h — класс гиперплоского сечения Q , лежащий в $\mathrm{CH}^1(Q)$ (нас интересует сечение в общем положении, то есть, дающее гладкую подквадрику в Q). Тогда его степени $1, h, h^2, \dots, h^{n/2-1}$ образуют естественные базисы компонент $\mathrm{CH}^0(Q), \mathrm{CH}^1(Q), \mathrm{CH}^2(Q), \dots, \mathrm{CH}^{n/2-1}(Q)$.

С другой стороны, в квадрике Q имеются изотропные подпространства размерности i , изоморфные \mathbb{P}^i , для всех $i = 0, 1, \dots, n/2$. Хорошо известно, что при каждом $i < n/2$ все изотропные i -мерные подпространства образуют одну орбиту относительно действия ортогональной группы $\mathrm{Aut}(Q)$. Однако, при $i = n/2$, множество изотропных i -мерных подпространств разбивается на две орбиты. Обозначим соответствующие два класса в $\mathrm{CH}^{n/2}(Q)$ через $[\Pi_1]$ и $[\Pi_2]$, а классы изотропных подпространств размерности i при $i < n/2$ через $[\mathbb{P}^i] \in \mathrm{CH}^{n-i}(Q)$.

Посмотрим теперь на $h^{n/2} \in \mathrm{CH}^{n/2}(Q)$. Нетрудно видеть, что $h^{n/2} = [\Pi_1] + [\Pi_2]$.

Пусть теперь Q — произвольная невырожденная четномерная квадратика над полем k . Мы знаем, что при расширении скаляров до алгебраически замкнутого поля (например, до \bar{k}) она становится расщепимой. Расширение скаляров дает естественный гомоморфизм $\mathrm{res}: \mathrm{CH}^*(Q) \rightarrow \mathrm{CH}^*(Q_{\bar{k}})$. Правая часть нам хорошо известна. Первый вопрос на пути к исследованию левой части — что можно сказать про образ этого отображения? Циклы из $\mathrm{CH}^*(Q_{\bar{k}})$, лежащие в образе гомоморфизма res , называются **рациональными**.

Заметим для начала, что цикл $h \in \mathrm{CH}^1(Q)$ всегда является рациональным. Действительно, достаточно найти в Q гладкую подквадрику коразмерности 1. Пусть Q задается уравнением $q = 0$. Возьмем любой вектор $v \in V$ такой, что $q(v) \neq 0$; тогда $q|_{\langle v \rangle^\perp}$ задает нужную гладкую подквадрику.

Следующее наблюдение состоит в том, что класс точки $[\mathbb{P}^0] = [\mathrm{pt}] \in \mathrm{CH}_0(Q)$ не может быть рациональным для анизотропной квадрики Q . Это следует из важной теоремы Спрингера.

Отметим, что в расщепимом случае $h \cdot [\mathbb{P}^i] = [\mathbb{P}^{i-1}]$ и $h \cdot [\Pi_1] = h \cdot [\Pi_2] = [\mathbb{P}^{n/2}]$.

Предложение 3.3.1.1. *Если квадрика Q анизотропна, то образ отображения $\mathrm{CH}^k(Q) \rightarrow \mathrm{CH}^k(Q_{\bar{k}})$ равен*

$$\begin{aligned} & \mathrm{CH}^k(Q_{\bar{k}}), \text{ если } k < n/2; \\ & 2 \mathrm{CH}^k(Q_{\bar{k}}), \text{ если } k > n/2; \\ & 2\mathbb{Z}[\Pi_1] + \mathbb{Z}([\Pi_1] + [\Pi_2]), \text{ если } k = n/2. \end{aligned}$$

3.3.2 Метод общей точки

Пока что у нас был единственный метод получения мотивных разложений: теорема Карпенко о фильтрациях. Сейчас мы узнаем о еще одном приеме.

Пусть X, Y — многообразия, и Y неприводимо. Расширим скаляры у X до поля функций Y : рассмотрим многообразие $X_{k(Y)}$ и его кольцо Чжоу $\mathrm{CH}^*(X_{k(Y)})$. Имеется декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X_{k(Y)} & \longrightarrow & X \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(k(Y)) & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

Лемма 3.3.2.1. *Верхняя горизонтальная стрелка в этом квадрате индуцирует сюръективное отображение $\mathrm{CH}^*(X \times Y) \rightarrow \mathrm{CH}^*(X_{k(Y)})$.*

Доказательство. По определению поля функций $k(Y)$ наш декартов квадрат является индуктивным пределом декартовых квадратов вида

$$\begin{array}{ccc} X \times U & \longrightarrow & X \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

по всем открытым непустым подмножествам $U \subseteq Y$. Верхние стрелки тогда индуцируют отображения $\mathrm{CH}^*(X \times Y) \rightarrow \mathrm{CH}^*(X \times U)$, каждое из которых сюръективно в силу точной последовательности локализации. Поэтому и предел этих отображений сюръективен. \square

Таким образом, если мы хотим найти какой-нибудь проектор $p \in \mathrm{CH}^{\dim X}(X \times X)$, то можно положить $Y = X$, найти какой-нибудь элемент из $\mathrm{CH}^i(X_{k(X)})$ и поднять его в $\mathrm{CH}^i(X \times X)$. Более того, можно взять какое-нибудь многообразие Y , отличное от X , построить таким же образом элементы из $\mathrm{CH}^i(X \times Y)$ и $\mathrm{CH}^j(Y \times X)$ и рассмотреть их композицию.

3.3.3 Теорема нильпотентности Роста

Напомним, что цикл $\alpha \in \text{CH}^*(X_{\bar{k}})$ называется рациональным, если он лежит в образе отображения $\text{res}: \text{CH}^*(X) \rightarrow \text{CH}^*(X_{\bar{k}})$. Для построения циклов в $\text{CH}^*(X \times X)$ рассмотрим отображение $\text{CH}^*(X \times X) \rightarrow \text{CH}^*(X_{\bar{k}} \times X_{\bar{k}})$. Правую часть мы понимаем хорошо (поскольку дело происходит над алгебраически замкнутым полем). Допустим, нам удалось найти элемент $p \in \text{CH}^*(X_{\bar{k}} \times X_{\bar{k}})$ такой, что p является проектором и p рационален. Тогда p поднимается до какого-то элемента $\tilde{p} \in \text{CH}^*(X \times X)$, но, вообще говоря, \tilde{p} уже не обязан являться проектором. Теорема нильпотентности Роста помогает справиться с этой ситуацией.

Теорема 3.3.3.1 (Теорема нильпотентности Роста). *Если X — проективное однородное многообразие над полем k , то ядро отображения $\text{CH}^*(X \times X) \rightarrow \text{CH}^*(X_{\bar{k}}, X_{\bar{k}})$ состоит из нильпотентных (относительно композиции) элементов.*

Упражнение 3.3.3.2. *Пусть R — коммутативное кольцо, I — идеал, состоящий из нильпотентных элементов. Тогда любой проектор в R/I поднимается до проектора в R .*

Следствие 3.3.3.3. *Если X — проективное однородное многообразие над полем k , то любой рациональный проектор $p \in \text{CH}^*(X_{\bar{k}}, X_{\bar{k}})$ поднимается до проектора $\tilde{p} \in \text{CH}^*(X \times X)$.*

3.3.4 Мотив Роста

Напомним, что многообразие называется клеточным, если существует его фильтрация, в которой все базы являются точками (см. раздел 3.2.3). Многообразие X называется клеточным над общей точкой (**generically cellular**), если многообразие $X_{k(X)}$ клеточное.

Квадратичная форма вида $q = \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_k \rangle$ называется k -кратной формой Пфистера и обозначается через $\langle \langle a_1, \dots, a_k \rangle \rangle$. Она действует на пространстве размерности 2^k . Соответствующая проективная квадрика Q имеет размерность $2^k - 2$ и называется **квадрикой Пфистера**. Хорошо известно, что а) любая квадрика становится изотропной над своим полем функций; б) если квадрика Пфистера изотропна, то она гиперболична (то есть, раскладывается в прямую сумму гиперболических плоскостей). Это означает, что квадрика Пфистера является клеточной над общей точкой.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \text{CH}^*(Q \times Q) & \longrightarrow & \text{CH}^*(Q_{k(Q)}) \\ \text{res} \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{CH}^*(Q_{\bar{k}} \times Q_{\bar{k}}) & \longrightarrow & \text{CH}^*(Q_{\bar{k}(Q)}) \end{array}$$

Заметим, что правая стрелка является изоморфизмом, поскольку обе квадрики $Q_{k(Q)}$ и $Q_{\bar{k}(Q)}$ гиперболичны.

Мы начинаем с правого нижнего угла. Рассмотрим элемент $\rho \in \text{CH}^{n/2}(Q_{k(Q)})$, соответствующий вполне изотропному подпространству размерности $n/2$ в Q (напомним, что такие подпространства образуют две орбиты; мы берем одну из них). В силу сюръективности верхней стрелки и изоморфности правой мы можем поднять ρ до некоторого элемента

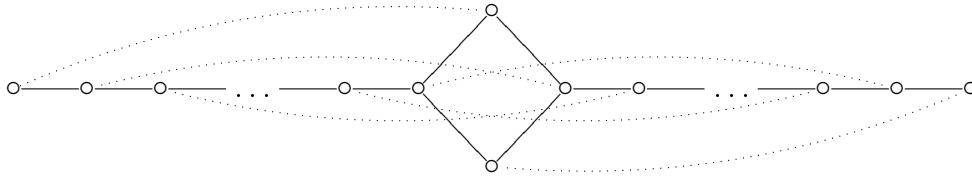
$\alpha \in \text{CH}^*(Q \times Q)$. Посмотрим на его образ $\bar{\alpha}$ в $\text{CH}^*(Q_{\bar{k}} \times Q_{\bar{k}})$. Сейчас мы хотим подправить α так, чтобы он оказался проектором. Для этого достаточно добиться, чтобы элемент $\bar{\alpha}$ был проектором, и воспользоваться теоремой нильпотентности Роста.

Мы знаем, что образ $\bar{\alpha}$ в $\text{CH}^*(Q_{\bar{k}(Q)})$ равен $\bar{\rho}$. В силу формулы Кюннета мы можем записать $\bar{\alpha} = \bar{\rho} \times 1 + (\dots) \times h + (\dots) \times h^2 + \dots + (\dots) \times h^{2^k-1} + c \cdot 1 \times \bar{\rho}$. Все, кроме крайних двух членов, является линейной комбинацией элементов вида $h^i \times h^j$ и содержится в образе отображения ges , поскольку цикл h рационален. Поэтому мы можем подправить $\bar{\alpha}$ и добиться того, что $\bar{\alpha} = \bar{\rho} \times 1 + c \cdot 1 \times \bar{\rho}$ для некоторого целого числа c . Кроме этого, цикл $2\bar{\rho}$ является рациональным, поскольку Q расщепляется квадратичным расширением.

Поэтому можно подправить $\bar{\alpha}$ до $\bar{\rho} \times 1$ или до $\bar{\rho} \times 1 + 1 \times \bar{\rho}$. Итак, один из этих циклов лежит в образе отображения ges , то есть, является рациональным. Предположим, что $\bar{\rho} \times 1$ рационален. Тогда и $1 \times \bar{\rho}$ рационален в силу симметрии. Поэтому их произведение $(\bar{\rho} \times 1) \cdot (1 \times \bar{\rho}) = \bar{\rho} \times \bar{\rho}$ рационально. Поэтому и циклы $\bar{h} \times 1, 1 \times \bar{h}$ рациональны, а значит, и цикл $\bar{r}t \times \bar{r}t$ рационален. После пушфорварда вдоль первой проекции мы получим рациональный цикл $\bar{r}t$ что противоречит предположению об анизотропности квадрики Q .

Значит, на самом деле цикл $\bar{\rho} \times 1 + 1 \times \bar{\rho}$ рационален. Из него мы можем изготовить несколько проекторов. Так, каждый цикл вида $\bar{h}^i \bar{\rho} \times \bar{h}^j + \bar{h}^i \times \bar{h}^j \bar{\rho}$ является рациональным. Посмотрим, при каком условии такой цикл является проектором. Размерность проектора должна быть равна размерности Q , то есть, $n = 2^k - 2$. При этом размерность $\bar{\rho}$ равна $n/2 = 2^{k-1} - 1$; значит, должно выполняться равенство $i + j = 2^{k-1} - 1$. Прямое вычисление показывает, что этого достаточно. Действительно, из известной формулы $(a \times b)(c \times d) = \text{deg}(ad)c \times b$ и равенства $\bar{h}^{-n/2} \bar{\rho} = \bar{r}t$ нетрудно получить, что $\rho^2 = \rho$.

Мы нашли, таким образом, $n/2 + 1 = 2^{k-1}$ проекторов. Каждый из них приводит к одному слагаемому в мотивном разложении, которые при расщеплении квадрики превращаются в два слагаемых. Изобразим это следующим образом:



Обозначим самое младшее слагаемое через $R(Q)$; оно называется **мотивом Роста** квадрики Пфистера Q . Остальные слагаемые, как нетрудно видеть, являются его сдвигами. Таким образом, $M(Q) = \bigoplus_{i=0}^{n/2} R(Q)\{i\}$.