Вопросы экзамена по алгебре

Группы 151, 153 (лектор А. Ю. Лузгарев)

Второй семестр, весна 2013

1. Определение векторного пространства, простейшие свойства, примеры.
2. Линейно зависимые и линейно независимые системы. Лемма о добавлении вектора к линейно независимой системе.
3. Линейная оболочка, система образующих. Существование базиса в конечномерном пространстве.
4. Теорема о линейной зависимости линейных комбинаций. Корректность определения размерности. Число векторов в линейно независимых и порождающих системах.
5. Любую линейно независимую систему можно дополнить до базиса. Размерность подпространства.
6. Строчный, столбцовый и тензорный ранги. Инвариантность тензорного ранга относительно элементарных преобразований.
7. Совпадение трех понятий ранга, следствия.
8. Теорема Кронекера–Капелли. Ранг матрицы в терминах ее миноров.
9. Матрица перехода, ее свойства. Преобразование координат вектора при замене базиса.
10. Линейные отображения векторных пространств, примеры.
11. Фактор-пространство.
12. Ядро и образ линейного отображения. Теорема о гомоморфизме.
13. Сумма подпространств, прямая сумма.
14. Относительный базис: определение и связь с базисом фактор-пространства.
15. Размерности фактор-пространства, ядра и образа линейного отображения, прямой суммы, суммы и пересечения подпространств.
16. Операции над линейными отображениями. Кольцо эндоморфизмов векторного пространства.
17. Универсальное свойство базиса. Изоморфизм пространств и совпадение размерностей.
18. Матрица линейного отображения, ее единственность.

19. Операции над линейными отображениями (сложение, умножение на скаляр, композиция) и их матрицы.

20. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базисов. Каноническая форма матрицы линейного отображения.

21. Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений, критерий существования нетривиального решения однородной системы, теорема Кронекера–Капелли.

22. Собственные числа и векторы, собственные подпространства. Собственные числа как корни характеристического многочлена.

23. Диагонализуемость оператора и собственные векторы. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного числа, неравенство между ними.

24. Прямая сумма нескольких подпространств, критерий разложения в прямую сумму. Сумма собственных подпространств.

25. Критерий диагонализуемости.

26. Инвариантные подпространства и блочные матрицы.

27. Подстановка оператора в многочлен, свойства. Теорема Кэли–Гамильтона.

28. Аннулирующий многочлен, минимальный многочлен, их связь.

29. Корневые векторы и корневые подпространства.

30. Две леммы о ядрах многочленов от операторов. Разложение ядра многочлена в прямую сумму ядер взаимно простых сомножителей.

31. Разложение пространства в прямую сумму в соответствии с каноническим разложением характеристического многочлена. Следствие: корневое разложение.

32. Жордановы матрицы, жорданов базис. Формулировка теоремы о жордановой форме. Лемма об образе относительно линейно независимых векторов.

33. Доказательство теоремы о жордановой форме нильпотентного оператора (кроме леммы об образе относительно линейно независимых векторов).