

# Вопросы экзамена по алгебре

Группы 251, 253 (лектор А. Ю. Лузгарев)

Четвертый семестр, весна 2014

## Теория групп

1. Конструкция фактор-группы.
  2. Теорема о гомоморфизме.
  3. Равномощность множеств левых и правых смежных классов. Теорема Лагранжа.
- ### Эвклидовы и унитарные пространства
4. Эвклидовы и унитарные пространства: определения и первые примеры.
  5. Норма и угол.
  6. Матрица Грама.
  7. Поведение матрицы Грама при замене базиса, ее обратимость.
  8. Ортогонализация Грама–Шмидта.
  9. Ортогональные и унитарные матрицы, равносильные определения.
  10. Ортогональное дополнение, его свойства.
  11. Ортогональная прямая сумма, базис ортогонального дополнения.
  12. Сопряженное отображение: существование и единственность.
  13. Матрица сопряженного отображения, свойства сопряжения.
  14. Нормальные операторы в унитарных пространствах.
  15. Самосопряженные, кососимметрические, унитарные операторы в унитарных пространствах.
  16. Нормальные операторы в эвклидовых пространствах (без доказательства).
  17. Самосопряженные, кососимметрические, ортогональные операторы в эвклидовых пространствах. Изометрии.
  18. Теорема Эйлера о вращениях, приведение квадратичной формы к диагональному виду, разложение пространства в ортогональную прямую сумму собственных подпространств.
  19. Положительно определенные операторы.
  20. Извлечение квадратного корня из положительно определенного оператора.
  21. Полярное разложение.

## Полилинейная алгебра

22. Тензорное произведение двух пространств.
23. Тензорное произведение нескольких пространств. Ассоциативность, коммутативность. Тензорный базис.
24. Двойственное пространство. Изоморфизм пространства с дважды двойственным.
25. Выражение  $\text{Hom}$  через  $\otimes$ .
26. Двойственность и  $\otimes$ .
27. Сопряженность  $\otimes$  и  $\text{Hom}$ .
28. Тензорное произведение линейных отображений. Его свойства, тензорное произведение  $\text{Hom}$ -пространств.
29. Кронекерово произведение матриц. Матрица тензорного произведения.
30. Тензорные пространства. Координаты тензора.
31. Преобразование координат тензора при замене базиса.