Аффинные групповые схемы*

Александр Лузгарев

10 февраля 2012 г.

Содержание

*Конспект лекций спецкурса осени 2011 г.

Источники:

1. Jens Carsten Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, Pure and Applied Mathematics vol. 131, Academic Press, Orlando, 1987.

2. Michele Demazure, Pierre Gabriel. *Groupes algébriques I*, Mason/North-Holland, Paris/Amsterdam, 1970

3. William Charles Waterhouse, *Introduction to Affine Group Schemes*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1979.

Дополнительная литература:

4. M. Demazure, A. Grothendieck (dirig.). *Schémas en Groupes, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA3)*, (Lecture Notes in Mathematics **151–153**), Berlin/Heidelberg/New York (Springer), 1970.

5. Ngô Bảo Châu, *Groupes algébriques et schémas en groupes*, lecture notes (draft), 2008(?).

6. Jean Dieudonné, *Fondements de la Géometrie Algébrique Moderne*, 1964(?).

7. Carlos Sancho de Salas, *Grupos algebraicos y teoría de invariantes*, Aportaciones Matemáticas: Textos, 16. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2001.

8. Alexander Grothendieck, *Fondements de la géométrie algébrique (FGA) [Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957–1962]*, Paris: Secrétariat Mathématique, 1962.

9. Barbara Fantechi, Lothar Göttsche, Luc Illusie, Steven L. Kleiman, Nitin Nitsure, Angelo Vistoli, *Fundamental Algebraic Geometry [Grothendieck's FGA Explained]*, AMS, 2005.

1 Основные определения

1.1 Введение

1.1.1 Первые примеры

Все кольца будут предполагаться ассоциативными, коммутативными, с 1. Напомним, что для кольца R определена группа

$$\mathrm{SL}_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, R) \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

Кроме того, если $\varphi\, R \to S$ —гомоморфизм колец, то можно определить отображение

$$\mathrm{SL}_2(\varphi)\colon\ \mathrm{SL}_2(R) \to \mathrm{SL}_2(S),\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(a) & \varphi(b) \\ \varphi(c) & \varphi(d) \end{pmatrix},$$

поскольку $\varphi(a)\varphi(d) - \varphi(b)\varphi(c) = \varphi(ad - bc) = \varphi(1) = 1$. Отображение $\mathrm{SL}_2(\varphi)$ является гомоморфизмом групп. Это наводит нас на мысль, что SL_2 является функтором из категории (коммутативных) колец $\mathfrak{Ring}$ в категорию групп $\mathfrak{Grp}$. Нетрудно проверить, что это действительно так. Аналогично определяется функтор SL_n для произвольного натурального $n \geq 1$:

$$\mathrm{SL}_n(R) = \left\{x = (x_{ij})_{i,j=1}^n \in M(n,R) \mid \det(x_{ij}) = 1\right\}.$$

Небольшая хитрость позволяет определить и функтор GL_n, $n \geq 1$:

$$\mathrm{GL}_n(R) = \left\{x = (x_{ij})_{i,j=1}^n \in M(n,R), t \in R \mid t \cdot \det(x_{ij}) = 1\right\}.$$

В частности, для $n = 1$ получаем функтор, который сопоставляет кольцу R мультипликативную группу его обратимых элементов. Этот функтор также называется $\mathbb{G}_m$: $\mathbb{G}_m(R) = R^*$. Функтор $\mathbb{G}_a$ сопоставляет кольцу R аддитивную группу R; то есть, $\mathbb{G}_a(R) = R$ со структурой группы по сложению. Функтор μ_n сопоставляет кольцу R группу корней степени n из 1 в R. Часто полезно рассматривать функторы, определенные не для всех колец, а только для алгебр над фиксированным кольцом k; так, если k — некоторое кольцо характеристики p (то есть, $p = 0$ в k), то $\alpha_p(R) = \{x \in R \mid x^p = 0\}$ является группой по сложению (в силу тождества $(x+y)^p = x^p + y^p$) и задает функтор из категории (коммутативных) k-алгебр $k\text{-}\mathfrak{Alg}$ в категорию групп $\mathfrak{Grp}$. Заметим, что предыдущие примеры тоже можно трактовать как функторы, заданные на $k\text{-}\mathfrak{Alg}$ при $k = \mathbb{Z}$; каждое кольцо единственным образом можно снабдить структурой алгебры на $\mathbb{Z}$, поэтому $\mathfrak{Ring} = \mathbb{Z}\text{-}\mathfrak{Alg}$.

Упражнение 1. *Проверьте, что все приведенные выше примеры действительно являются функторами.*

1.1.2 Представимые функторы

Все эти примеры сопоставляют каждой k-алгебре R множество решений в R какого-то набора уравнений с коэффициентами из k. Можно рассмотреть «универсальное» решение набора уравнений: например, для SL_2 рассмотрим кольцо $A = \mathbb{Z}[a,b,c,d]/\langle ad - bc - 1\rangle$. Любая матрица $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(R)$ для любого кольца R задает гомоморфизм $f\colon \mathbb{Z}[a,b,c,d] \to R$ таким образом, что $a \mapsto a_0$, $b \mapsto b_0$, $c \mapsto c_0$, $d \mapsto d_0$. Кроме того, из равенства $a_0d_0 - b_0c_0 = 1$ следует, что $ad - bc - 1$ лежит в ядре этого гомоморфизма, поэтому f пропускается через фактор-кольцо A. Обратно, любой гомоморфизм $A \to R$ задает какой-то элемент $\mathrm{SL}_2(R)$; достаточно составить матрицу из образов элементов $a,b,c,d \in A$ (точнее, образов их канонических образов в фактор-кольце A). Нетрудно видеть, что это соответствие является биективным. Таким образом, $\mathrm{SL}_2(R)$ как множество совпадает с $\mathrm{Hom}(A,R)$. Более того, если $\varphi\colon R \to S$ — гомоморфизм колец, то определенный выше гомоморфизм $\mathrm{SL}_2(\varphi)\colon\ \mathrm{SL}_2(R) \to \mathrm{SL}_2(S)$ совпадает с гомоморфизмом $\varphi \circ -\colon\ \mathrm{Hom}(A,R) \to \mathrm{Hom}(A,S)$. Рассмотрим композицию функтора $\mathrm{SL}_2\colon \mathfrak{Ring} \to \mathfrak{Grp}$ с забывающим функтором $\mathfrak{Grp} \to \mathfrak{Set}$; мы только что показали, что эта композиция совпадает с $\mathrm{Hom}(A,R)$. Мы будем называть функтор $F\colon k\text{-}\mathfrak{Alg} \to \mathfrak{Set}$ представимым, если он изоморфен функтору $\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathfrak{Alg}}(A,-)$ для некоторой k-алгебры A. Допуская вольность речи, можно и функтор $F\colon k\text{-}\mathfrak{Alg} \to \mathfrak{Grp}$ называть представимым, если его композиция с забывающим является представимым функтором. **Аффинной групповой схемой** над k мы будем называть функтор из $k\text{-}\mathfrak{Alg}$ в $\mathfrak{Grp}$, изоморфный представимому. Представляющий объект групповой схемы G называется **аффинной алгеброй** G и обозначается через $k[G]$. Тот факт, что функтор $\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathfrak{Alg}}(k[G], -)$ пропускается через категорию $\mathfrak{Grp}$, накладывает некоторые условия на алгебру $k[G]$. Для того, чтобы записать эти условия, нам понадобится лемма Йонеды.

1.1.3 Лемма Йонеды

Пусть теперь $\mathcal{C}$ — произвольная категория, $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Построим функтор $\mathrm{Sp}(C)\colon \mathcal{C} \to \mathfrak{Set}$: для любого объекта $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ положим $\mathrm{Sp}(C)(R) = \mathrm{Mor}(C, R)$, а для любого морфизма $\varphi\colon R \to S$ из $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ положим $\mathrm{Sp}(C)(\varphi) = \varphi \circ -\colon\ \mathrm{Sp}(C)(R) \to \mathrm{Sp}(C)(S)$. Иными словами, всякому $\alpha\colon C \to R$ из $\mathrm{Sp}(C)(R) = \mathrm{Mor}(C, R)$ сопоставим $\varphi \circ \alpha\colon C \to S$ из $\mathrm{Sp}(C)(S) = \mathrm{Mor}(C, S)$. Полученный функтор $\mathrm{Sp}(C)$ также обозначается через h_C или $\mathrm{Hom}(C, -)$. Произвольный функтор $X\colon \mathcal{C} \to \mathfrak{Set}$ называется **представимым**, если он изоморфен функтору $\mathrm{Sp}(C)$ для некоторого $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Объект C называется **представляющим объектом** функтора X. Заметим, что сопоставление объекту C функтора $\mathrm{Sp}(C)$ само является функтором: для морфизма $f\colon C \to D$ определено естественное преобразование функторов $\mathrm{Sp}(D) \to \mathrm{Sp}(C)$ следующим образом: для всякого объекта $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ имеется морфизм $- \circ f\colon\ \mathrm{Sp}(D)(R) = \mathrm{Mor}(D, R) \to \mathrm{Mor}(C, R)\,\mathrm{Sp}(C)(R)$. Таким образом, можно рассматривать Sp как контравариантный функтор из $\mathcal{C}$ в категорию функторов $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathfrak{Set})$, или как ковариантный функтор из $\mathcal{C}^{op}$ в $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathfrak{Set})$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория, $F\colon \mathcal{C} \to \mathfrak{Set}$ — функтор. Для любого $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ существует естественная биекция*

$$F(X) \cong \mathrm{Nat}(\mathrm{Sp}(X), F).$$

Набросок доказательства. Пусть $n \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Sp}(X), F)$. Для каждого $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ определен морфизм $n(R)\colon\ \mathrm{Sp}(X, R) \to F(R)$. В частности, определен морфизм $n(X)\colon\ \mathrm{Sp}(X, X) \to F(X)$. Посмотрим, куда переходит тождественный морфизм id_X при этом морфизме: положим $f = n(X)(\mathrm{id}_X) \in F(X)$. Это уже задает отображение Φ из $\mathrm{Nat}(\mathrm{Sp}(X), F)$ в $F(X)$. Теперь построим Ψ в обратную сторону: возьмем $f \in F(X)$. Нам хочется определить естественное преобразование функтора $\mathrm{Sp}(X)$ в F. То есть, для каждого объекта $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ мы должны построить морфизм $\Psi(f)(R)\colon\ \mathrm{Mor}(X, R) = \mathrm{Sp}(X)(R) \to F(R)$. Он строится так: элементу $\varphi \in \mathrm{Mor}(X, R)$ мы ставим в соответствие образ f под действием $F(\varphi)\colon F(X) \to F(R)$, то есть $F(\varphi)(f)$. Осталось проверить, что это сопоставление действительно задает естественное преобразование функторов, и что Φ и Ψ взаимно обратны. Кроме того, слова «естественная биекция» в формулировке теоремы тоже что-то означают: если есть морфизм $\theta\colon X \to Y$, то определены морфизмы

$$F(\theta)\colon F(X) \to F(Y)$$

и (поскольку определено естественное преобразование $\mathrm{Sp}(\theta)\colon\ \mathrm{Sp}(Y) \to \mathrm{Sp}(X)$)

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Sp}(\theta), F)\colon\ \mathrm{Nat}(\mathrm{Sp}(X), F) \to \mathrm{Nat}(\mathrm{Sp}(Y), F).$$

Естественность соответствия Йонеды означает, что эти морфизмы множеств должны быть согласованы с построенными биекциями. Проверка всего этого оставляется терпеливому читателю в качестве упражнения. □

Следствие 1. *Если $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, то существует естественная биекция между $\mathrm{Mor}(Y, X)$ и $\mathrm{Nat}(\mathrm{Sp}(X), \mathrm{Sp}(Y))$.*

Иными словами, Sp является вполне строгим функтором из категории $\mathcal{C}^{op}$ в категорию $\mathfrak{Set}^{\mathcal{C}} = \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathfrak{Set})$. Применяя это утверждение к категории C^{op}, получаем, что Sp является строгим функтором из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{op}, \mathfrak{Set})$. В частности, представляющий объект представимого функтора определен однозначно с точностью до изоморфизма.

1.2 Аффинная алгебра групповой схемы

1.2.1 Алгебра Хопфа

Пусть E, F — два функтора из k-$\mathfrak{Alg}$ в $\mathfrak{Set}$. Определим их прямое произведение $E \times F$ «поточечно»: для всякого $R \in k$-$\mathfrak{Alg}$ положим $(E \times F)(R) = E(R) \times F(R)$. Если функторы E, F представимы объектами A, B соответственно, то $E \times F$ представим объектом $A \otimes_k B$; это легко следует из леммы Йонеды и того факта, что тензорное произведение над k является копроизведением в категории k-$\mathfrak{Alg}$. Опишем явно изоморфизм между $\mathrm{Hom}_k(A \otimes_k B, R)$ и $\mathrm{Hom}_k(A, R) \times \mathrm{Hom}_k(B, R)$: гомоморфизму $h\colon A \otimes_k B \to R$ соответствуют две композиции h с каноническими гомоморфизмами $A \to A \otimes_k B$ и $B \to A \otimes_k B$; обратно, паре гомоморфизмов $f\colon A \to R$, $g\colon B \to R$ соответствует гомоморфизм, который переводит $a \otimes b$ в $f(a)g(b)$.

Напомним, что группой называется множество Γ вместе с тремя отображениями $\mathrm{mult}\colon \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$, $\mathrm{inv}\colon \Gamma \to \Gamma$, $\mathrm{unit}\colon \{*\} \to \Gamma$ (здесь $\{*\}$ — некоторое одноточечное множество, служащее терминальным объектом в категории множеств, то есть, прямым произведением нуля экземпляров множества Γ), для которых следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \times \Gamma \times \Gamma \arrow[r, "\mathrm{id} \times \mathrm{mult}"] \arrow[d, "\mathrm{mult} \times \mathrm{id}"'] & \Gamma \times \Gamma \arrow[d, "\mathrm{mult}"] \\
\Gamma \times \Gamma \arrow[r, "\mathrm{mult}"] & \Gamma
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \times \Gamma \arrow[r, "\mathrm{unit} \times \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\cong"'] & \Gamma \times \Gamma \arrow[d, "\mathrm{mult}"] \\
 & \Gamma
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "(\mathrm{inv},\mathrm{id})"] \arrow[d] & \Gamma \times \Gamma \arrow[d, "\mathrm{mult}"] \\
\{*\} \arrow[r, "\mathrm{unit}"] & \Gamma
\end{tikzcd}$$

Пусть теперь X — аффинная групповая схема, то есть, функтор, изоморфный $\mathrm{Sp}(A)$ для некоторого $A \in k$-$\mathfrak{Alg}$. Рассмотрим X как функтор из k-$\mathfrak{Alg}$ в $\mathfrak{Set}$ (строго говоря, возьмем его композицию с забывающим). Тот факт, что X на самом деле является функтором в $\mathfrak{Grp}$, дает нам для любого $R \in k$-$\mathfrak{Alg}$ отображения $\mathrm{mult}_R\colon X(R) \times X(R) \to X(R)$, $\mathrm{inv}_R\colon X(R) \to X(R)$ и $\mathrm{unit}_R\colon \{*\} \to X(R)$. Пусть $\varphi\colon R \to S$ —гомоморфизм k-алгебр. Тогда $X(\varphi)$ должно быть гомоморфизмом групп, то есть, диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X(R) \times X(R) \arrow[r, "\mathrm{mult}_R"] \arrow[d, "X(\varphi) \times X(\varphi)"'] & X(R) \arrow[d, "X(\varphi)"] \\
X(S) \times X(S) \arrow[r, "\mathrm{mult}_S"] & X(S)
\end{tikzcd}$$

должна быть коммутативной. Кроме того, гомоморфизм групп обязан переводить обратные в обратные и сохранять единицу, поэтому диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X(R) \arrow[r, "\mathrm{inv}_R"] \arrow[d, "X(\varphi)"'] & X(R) \arrow[d, "X(\varphi)"] \\
X(S) \arrow[r, "\mathrm{inv}_S"] & X(S)
\end{tikzcd}
\quad \text{и} \quad
\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "\mathrm{unit}_R"] \arrow[d, "\cong"'] & X(R) \arrow[d, "X(\varphi)"] \\
\{*\} \arrow[r, "\mathrm{unit}_S"] & X(S)
\end{tikzcd}$$

также коммутативны. Но коммутативность этих диаграмм в точности означает, что отображения mult_R, inv_R, unit_R задают естественные преобразования функторов $\mathrm{mult}\colon X\times X\to X$, $\mathrm{inv}\colon X\to X$, $\mathrm{unit}\colon \{*\}\to X$ (здесь через $\{*\}$ мы обозначаем функтор, значение которого на любой k-алгебре равно выделенному одноточечному множеству — это тривиальная аффинная групповая схема, представимая k-алгеброй k). По лемме Йонеды, эти естественные преобразования соответствуют гомоморфизмам k-алгебр $\Delta\colon A\to A\otimes_k A$, $S\colon A\to A$, $\varepsilon\colon A\to k$ соответственно. Аксиомы группы теперь означают, что следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & A\otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] \\ A\otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] & A\otimes A\otimes A \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\cong"'] & A\otimes A \arrow[d, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"] \\ & k\otimes A \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & A\otimes A \arrow[d, "m\circ(\mathrm{id}\otimes S)"] \\ k \arrow[r] & A \end{tikzcd}.$$

Алгебра A над k с гомоморфизмами (над k) $\Delta\colon A\to A\otimes A$, $S\colon A\to A$, $\varepsilon\colon A\to k$, удовлетворяющая этим трем аксиомам, называется **алгеброй Хопфа** над k. Таким образом, структура группы на представимом функторе задает структуру алгебры Хопфа на представляющем объекте.

1.2.2 Гомоморфизмы аффинных групповых схем

Гомоморфизм аффинных групповых схем — это естественное преобразование функторов $k\text{-}\mathfrak{Alg}\to\mathfrak{Grp}$. Иными словами, это естественное преобразование групповых схем, рассматриваемых как функторы $k\text{-}\mathfrak{Alg}\to\mathfrak{Set}$ с дополнительным условием — каждое из отображения групп точек должно быть гомоморфизмом групп. По лемме Йонеды гомоморфизму аффинных групповых схем соответствует отображение на их алгебрах Хопфа, которое является гомоморфизмом k-алгебр и, к тому же, сохраняет операции Δ, S, ε (на самом деле достаточно требовать лишь сохранения коумножения Δ, поскольку в определении гомоморфизма групп достаточно требовать сохранения умножения).

Пусть теперь $f\colon H'\to G$ — гомоморфизм аффинных групповых схем, $A=k[G]$, $B=k[H']$. Обозначим через $\varphi\colon A\to B$ индуцированный гомоморфизм алгебр Хопфа. Если отображение φ сюръективно, f называется **замкнутым вложением**. В этом случае B изоморфно фактор-алгебре $A/\operatorname{Ker}(\varphi)$. Аффинная групповая схема $H=Sp(A/\operatorname{Ker}(\varphi))$, называется **замкнутой подгруппой** G. Мы получили, что H' изоморфна замкнутой подгруппе H схемы G.

Вообще, если I — некоторый идеал алгебры $A=k[G]$, множество $\operatorname{Hom}(A/I,R)$ можно считать подмножеством в $\operatorname{Hom}(A,R)$ для всех k-алгебр R (оно состоит из всех гомоморфизмов $A\to R$, ядро которых содержит I). Конечно, не для всякого идеала I это множество будет подгруппой в группе $G(R)=\operatorname{Hom}(A,R)$. Вспомним критерий того, что подмножество является подгруппой: оно должно быть замкнуто относительно умножения, содержать единицу и содержать вместе с каждым элементом обратный к нему. Замкнутость относительно умножения означает, что для если два гомоморфизма $A\to R$ пропускаются через идеал I, то их произведение должно пропускаться через I; это в точности означает, что $\Delta(I)\subseteq A\otimes I+I\otimes A$, поскольку правая часть является ядром естественной проекции $A\otimes A\to A/I\otimes A/I$. Легко проверить, что остальные условия превращаются в $S(I)\subseteq I$ и $\varepsilon(I)=0$. Идеал, удовлетворяющий этим трем условиям, называется **хопфовым**; это в точности те условия, при которых фактор-алгебра по этому идеалу естественным образом снабжается структурой алгебры Хопфа. Например, наибольший такой идеал — это $\operatorname{Ker}(\varepsilon)$, который называется **идеалом аугментации**. Фактор-алгебра $A/\operatorname{Ker}(\varepsilon)$ изоморфна k, поэтому идеал аугментации соответствует тривиальной подгруппе $\{e\}<G$.

1.2.3 Ядро гомоморфизма

Пусть $f\colon G \to H$ — гомоморфизм аффинных групповых схем, $A = k[G]$, $B = k[H]$. Рассмотрим функтор N, сопоставляющий каждой k-алгебре R ядро гомоморфизма $f(R)\colon G(R) \to H(R)$: $N(R) = \mathrm{Ker}(f(R))$. Оказывается, этот функтор представим; то есть, ядро гомоморфизма f также является аффинной групповой схемой. Действительно, ядро может быть описано как расслоенное произведение G и тривиальной групповой схемы $\{e\}$ над H:

$$\begin{tikzcd} N \cong G \times_H \{e\} \arrow[r] \arrow[d] & \{e\} \arrow[d, "\mathrm{unit}"] \\ G \arrow[r, "f"] & H \end{tikzcd} .$$

Отсюда видно, что N является аффинной групповой схемой. Переходя к алгебрам Хопфа, получаем, что представляющий объект схемы N должен быть изоморфен $A \otimes_B k$, где A рассматривается как B-алгебра с помощью гомоморфизма $B \to A$, индуцированного f, а k рассматривается как B-алгебра с помощью гомоморфизма аугментации ε_B. Поскольку идеал аугментации I_B есть ядро ε_B, получаем $A \otimes_B k \cong A/(I_B \cdot A)$, то есть N представлено фактор-алгеброй A по идеалу, порожденному образом I_B в A. Это означает, что N является замкнутой подгруппой в G, соответствующей хопфовому идеалу $I_B \cdot A$.

В качестве примера гомоморфизма групп приведем возведение в квадрат как гомоморфизм групповых схем $\mathbb{G}_m = G \to H = \mathbb{G}_m$: для каждой k-алгебры R он переводит каждый $a \in R^*$ в $a^2 \in R^*$. Пусть $A = k[G] = k[x]$ и $B = k[H] = k[y]$. Нетрудно видеть, что индуцированное отображение алгебр Хопфа $B \to A$ переводит y в x^2. Вспомнив структуру алгебры Хопфа $k[\mathbb{G}_m]$, видим, что идеал аугментации I_B натянут на элементы вида $y^r - 1$, поэтому совпадает с главным идеалом, порожденным $y - 1$. Образ $I_B \cdot A$ идеала аугментации равен идеалу, порожденному $x^2 - 1$. Значит, ядро возведения в квадрат есть аффинная групповая схема, представленная алгеброй $k[x, 1/x]/(x^2 - 1) \cong k[x]/(x^2 - 1) \cong k[\mu_2]$. Получили, что ядро возведения в квадрат — это корни степени 2 из единицы, что не слишком и удивительно.

1.2.4 Групповые и примитивные элементы

Гомоморфизмы из аффинной групповой схемы G в $\mathbb{G}_m$ называются **характерами** G. Такой гомоморфизм соответствует гомоморфизму k-алгебр $\varphi\colon k[x, 1/x] \to k[G]$; он определяется образом элемента x. Пусть $b \in k[G]$ — этот образ. Из того, что φ является гомоморфизмом алгебр Хопфа, немедленно следует, что

$$\varphi(b) = b \otimes b, \quad S(b) = b^{-1}, \quad \varepsilon(b) = 1.$$

Обратно, если $b \in k[G]$ таков, что $\Delta(b) = b \otimes b$ и $\varepsilon(b) = 1$, то $1 = \varepsilon(b) = (S, id)\Delta(b) = (S, id)(b \otimes b) = S(b)b$, поэтому b обратим, $S(b) = b^{-1}$, и b задает характер групповой схемы G. Такие элементы b называются **групповыми** (`group-like`). Нетрудно видеть, что групповые элементы алгебры Хопфа $k[G]$ образуют группу по умножению. Это умножение согласовано с умножением характеров схемы G, определяемым поточечно: если $f, g\colon G \to \mathbb{G}_m$ — два характера, можно положить $(fg)(R) = f(R) \cdot g(R)$ для всех k-алгебр R, и это задаст характер группы G.

Аналогично, можно рассмотреть гомоморфизмы из G в $\mathbb{G}_a$; они соответствуют элементам $b \in k[G]$, для которых $\Delta(b) = b \otimes 1 + 1 \otimes b$, $S(b) = -b$, $\varepsilon(b) = 0$. Такие b называются **примитивными**; они образуют группу относительно сложения, соответствующую поточечному сложению в $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a)$.

1.2.5 Диагонализуемые схемы

Пусть M — абелева группа, kM — групповая алгебра M над k, то есть свободный k-модуль, базисом которого служат элементы M, с умножением, распространенным по линейности с умножения базисных элементов в группе M. Можно превратить kM в алгебру Хопфа с помощью отображений $\Delta(m) = m \otimes m$, $\varepsilon(m) = 1$, $S(m) = m^{-1}$. Соответствующую ей аффинную групповую схему мы будем называть **диагонализуемой**. Знание строения конечно порожденных абелевых групп позволяет нам описать диагонализуемые схемы с конечно порожденными алгебрами Хопфа.

Теорема 2. *Пусть диагонализуемая аффинная групповая схема G представима конечно порожденной k-алгеброй A. Тогда G является конечным произведением копий $\mathbb{G}_m$ и μ_n.*

Доказательство. Выберем конечный набор элементов, порождающий алгебру $A = kM$ и представим каждый элемент в виде линейной комбинации элементов группы M; пусть U — множество всех полученных элементов M. Обозначим через M' подгруппу в M, порожденную U; легко видеть, что kM' — некоторая подалгебра в kM, и по нашему выбору она должна совпадать с kM, поэтому $M = M'$ и группа M является конечно порожденной. По теореме о структурном строении конечно порожденных абелевых групп M изоморфно прямому произведению конечного числа копий $\mathbb{Z}$ и C_n. Поскольку $k(M \times N) = kM \otimes kN$, достаточно рассмотреть случаи $M = \mathbb{Z}$ и $M = C_n$. Если $M = \mathbb{Z}$, $kM = \sum_{i\in\mathbb{Z}} ke_i$, где e_i — базисный элемент, соответствующий числу $i \in \mathbb{Z}$. Положим $\varphi(e_1) = x$; можно проверить, что это определит изоморфизм $kM \to k[x, 1/x] = k[\mathbb{G}_m]$. Если же $M = C_n$, аналогичным образом $kM = ke_1 + \cdots + ke_n$, и формула $\varphi(e_1) = x$ определяет изоморфизм $kM \to k[x]/(x^n - 1) = k[\mu_n]$. □

Лемма 1. *Если A — алгебра Хопфа над полем, то групповые элементы в A линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $\{b_i\}, b$ — групповые элементы в A и $b = \sum_i \lambda_i b_i$ — линейная комбинация, в которой b_i линейно независимы. Тогда $1 = \varepsilon(b) = \sum_i \lambda_i \varepsilon(b_i) = \sum_i \lambda_i$. Но $\Delta(b) = b \otimes b = \sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j b_i \otimes b_j$, а с другой стороны, $\Delta(b) = \sum_i \lambda_i \Delta(b_i) = \sum_i \lambda_i b_i \otimes b_i$. Из линейной независимости b_i следует линейная независимость $b_i \otimes b_j$, и получаем, что $\lambda_i\lambda_j = 0$ для $i \neq j$, и $\lambda_i^2 = \lambda_i$. При этом $\sum_i \lambda_i = 1$, значит, $b = \sum_i \lambda_i b_i = b_i$ для некоторого i. □

Теорема 3. *Пусть k — поле. Аффинная групповая схема над k диагонализуема тогда и только тогда, когда представляющая ее алгебра порождена групповыми элементами. Существует анти-эквивалентность между диагонализуемыми аффинными групповыми схемами и абелевыми группами.*

Доказательство. См. [DG, II, § 1, 2.11]. □

1.3 Аффинные «схемы»

1.3.1 Спектр кольца

Обозначим через $\mathrm{Spec}(R)$ **спектр** R — множество простых идеалов кольца R. Факторкольцо $R/\mathfrak{p}$ является областью целостности, поэтому вкладывается в свое поле частных. Мы часто будем воспринимать элемент $f \in R$ как функцию на $\mathrm{Spec}(R)$, значение которой в точке $\mathfrak{p}$ — это образ f при композиции отображений $R \to R/\mathfrak{p} \to \mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p})$.

Для идеала $I \trianglelefteq R$ обозначим через $V(I)$ множество простых идеалов в R, содержащих I:

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Если идеал I — главный идеал, порожденный элементом $f \in R$, множество $V(I)$ есть «множество нулей» функции f. Нетрудно проверить следующие свойства:

1. $V(0) = \mathrm{Spec}(R)$, $V(R) = \emptyset$;

2. $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$;

3. $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$.

Это означает, что множества вида $V(I)$ являются замкнутыми множествами некоторой топологии на $\mathrm{Spec}(R)$; она называется **топологией Зариского**. Открытыми множествами, стало быть, в ней служат дополнения $V(I)$:

$$D(I) = \mathrm{Spec}(R) \setminus V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \not\subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Для множеств $D(I)$ нетрудно написать аналогичные свойства; в частности, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} D(I_\lambda) = D(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$, поэтому любое множество $D(I)$ является объединением множеств $D(f) = D((f))$, $f \in I$. Множество вида $D(f)$ называется **главным открытым множеством** топологии Зариского. Его элементами являются простые идеалы R, не содержащие f. Мы будем также обозначать $D(f)$ через $(\mathrm{Spec}(R))_f$.

Утверждение 1. *Пусть $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — набор элементов кольца R. Равенство*

$$\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (\mathrm{Spec}(R))_{f_\lambda}$$

выполнено тогда и только тогда, когда идеал, порожденный f_λ, совпадает с R. В частности, тогда можно выбрать конечное число f_λ таких, что соответствующие главные открытые множества $(\mathrm{Spec}(R))_{f_\lambda}$ покрывают $\mathrm{Spec}(R)$.

Следствие 2. *Топологическое пространство $\mathrm{Spec}(R)$ квазикомпактно.*

Лемма 2. *Для любых $f, g \in R$ выполнено*

1. *$D(f) \cap D(g) = D(fg)$;*

2. *$D(f) \supseteq D(g)$ тогда и только тогда $g \in \sqrt{(f)}$.*

Сопоставим каждому главному открытому множество $D(f)$ кольцо R_f. Оно состоит из дробей вида a/f^n, и поскольку f не обращается в 0 на множестве $D(f)$, такую дробь можно трактовать как регулярную функцию на $D(f)$. Более того, если $D(f) \supseteq D(g)$, то по лемме имеем $g^m = c \cdot f$ для некоторого натурального m и $c \in k$. Определим **гомоморфизм ограничения** $\mathrm{res}^{D(f)}_{D(g)} \colon D(f) \to D(g)$ так: $a/f^n \mapsto ac^n/g^{mn}$. Нетрудно проверить, что он корректно определен. Неформально он соответствует ограничению функции a/f^n на множество $D(g)$.

Рассмотрим частично упорядоченное множество, состоящее из всех главных открытых подмножество $\mathrm{Spec}(R)$, содержащих фиксированную точку $\mathfrak{p}$, с порядком, обратным к включению: $D(f) < D(g)$, если $D(f) \supseteq D(g)$. Сопоставим каждому $D(f)$ кольцо R_f, а каждой паре $D(f) < D(g)$ гомоморфизм ограничения $\mathrm{res}^{D(f)}_{D(g)} \colon D(f) \to D(g)$. Пусть $L_\mathfrak{p}$ — индуктивный предел полученной системы; можно считать, что $L_\mathfrak{p}$ состоит из всех пар вида $(D(f), x)$, где $D(f)$ содержит точку $\mathfrak{p}$, $x \in R_f$, и пары $(D(f), x)$, $D(g), y)$ отождествляются, если найдется $D(h)$, содержащее точку $\mathfrak{p}$ и содержащееся в $D(f)$ и $D(g)$, такое, что $\mathrm{res}^{D(f)}_{D(h)}(x) = \mathrm{res}^{D(g)}_{D(h)}(y)$. Элементы $L_\mathfrak{p}$ называются **ростками функций** в точке $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Канонический образ пары $(D(f), x)$ в $L_\mathfrak{p}$ мы будем обозначать через $x_\mathfrak{p}$.

На $L_\mathfrak{p}$ несложно ввести операции сложения и умножения, индуцированные с операций в локализациях, и получить коммутативное кольцо. Оказывается, оно изоморфно $R_\mathfrak{p}$. Действительно, элемент $s \in R_\mathfrak{p}$ можно записать как $s = a/f$, где $f \notin \mathfrak{p}$, поэтому $\mathfrak{p} \in D(f)$, и в $L_\mathfrak{p}$ есть класс пары $(D(f), s)$. Нетрудно проверить, что это отображение корректно определено и устанавливает изоморфизм между $L_\mathfrak{p}$ и $R_\mathfrak{p}$.

1.3.2 Предпучки и пучки

Напомним, что **предпучок** [коммутативных] колец $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве X — это набор колец $\mathcal{F}(U)$ для всех открытых множеств $U \subseteq X$ и гомоморфизмов колец $\mathrm{res}_V^U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ для всех включений открытых множеств $V \subseteq U$ в X такой, что

1. $\mathrm{res}_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$ для любого открытого $U \subseteq X$;
2. $\mathrm{res}_W^V \circ \mathrm{res}_V^U = \mathrm{res}_W^U$.

Элементы колец $\mathcal{F}(U)$ называются **сечениями** предпучка $\mathcal{F}$ на множестве U, а отображения res_V^U — **отображениями ограничения**. Множество сечений $\mathcal{F}(U)$ предпучка $\mathcal{F}$ на открытом множестве U обозначается также через $\Gamma(U, \mathcal{F})$. Если рассмотреть топологию на X как категорию (объекты — открытые множества $U \subseteq X$, морфизмы — по одному морфизму из V в U для каждого включения $V \subseteq U$), получим, что предпучок колец — это контравариантный функтор из полученной категории X в категорию колец. Аналогично можно определить предпучок множеств, абелевых групп, $\ldots$.

Говоря неформально, пучок — это предпучок, сечения которого задаются локально. Модельный пример пучка — функции (непрерывные, дифференцируемые, $\ldots$) на открытых подмножествах в X (со значениями в $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\ldots$) с отображениями ограничения. Определение пучка отражает свойства, которыми обладает этот пример.

Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок на X, U — открытое подмножество в X, и $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ — открытое покрытие множества U. Набор сечений $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i \in I}$ назовем **согласованным**, если $\mathrm{res}_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = \mathrm{res}_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$ для всех $i, j \in I$. Предпучок $\mathcal{F}$ на X называется **пучком**, если для любого открытого покрытия $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ любого открытого множества $U \subseteq X$ и для любого согласованного набора сечений $(s_i)_{i \in I}$ существует единственное сечение $s \in \mathcal{F}(U)$ такое, что $\mathrm{res}_{U_i}^U(s) = s_i$ для всех $i \in I$.

Условие пучка выражает тот нехитрый факт, что функцию, заданную в окрестности каждой точки согласованным образом, можно собрать в глобальную функцию, причем единственным способом. Иногда определение пучка разбивают на две части: одна утверждает существование сечения, а другая — единственность. Вторую часть (для пучков со значениями в абелевой категории, например, для пучков колец) можно записать так: если $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ — открытое покрытие, и $s \in \mathcal{F}(U)$ — сечение, для которого $\mathrm{res}_{U_i}^U(s) = 0$ для всех $i \in I$, то $s = 0$.

1.3.3 Пучок на $\operatorname{Spec} R$

Вернемся к топологическому пространству $X = \operatorname{Spec}(R)$. Каждому главному открытому множеству $D(f) \subseteq X$ мы сопоставили кольцо R_f, и описали гомоморфизмы ограничения между ними. Наша задача — определить на X пучок $\mathcal{O}_X$, расширяющий это соответствие на все открытые подмножества. Это вполне стандартная процедура — построение [пред]пучка по объектам и морфизмам, заданным (хорошим образом) на базе топологии. «Функции» на открытом множестве U мы определим как наборы ростков функций во всех точках U, локально согласованные между собой. Согласованность здесь означает, что локально набор может быть получен взятием ростков какой-то одной функции на главном открытом подмножестве.

Итак, для произвольного открытого $U \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ положим

$$\mathcal{O}_X(U) = \{(s_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in U} \mid \text{для любого } \mathfrak{p} \text{ найдутся } f \in R\colon \mathfrak{p} \in D(f) \subseteq U \text{ и } t \in R_f \\ \text{такие, что } t_\mathfrak{q} = s_\mathfrak{q} \text{ для всех } \mathfrak{q} \in D(f)\}.$$

Множество $\mathcal{O}_X(U)$ мы будем рассматривать как кольцо относительно поточечных операций. Для пары открытых множеств $V \subseteq U$ в X гомоморфизм ограничения $\mathrm{res}^U_V\colon \mathcal{O}_X(U) \to O_X(V)$ задается очевидным образом. За счет такого «локального определения» колец достаточно просто проверяется, что $\mathcal{O}_X$ является пучком. Также несложно проверить, что $\mathcal{O}_X(D(f)) = R_f$: это следует из того, что элемент R_f однозначно восстанавливается по своим образам в $R_\mathfrak{p}$.

Аффинной «схемой» называется топологическое пространство $X = \mathrm{Spec}(R)$ вместе со **структурным пучком** $\mathcal{O}_X$ коммутативных колец на X, описанным выше. Главное открытое множество $D(f)$ пространства X изоморфно $\mathrm{Spec}(R_f)$ как топологическое пространство; можно проверить, что пучок $\mathcal{O}_{R_f}$ на $\mathrm{Spec}(R_f)$ совпадает с ограничением структурного пучка $\mathcal{O}_X$ на множество $D(f)$. Кроме того, для любой точки $\mathfrak{p} \in X$ индуктивный предел $\varinjlim_{\mathfrak{p}\in U} \Gamma(U, \mathcal{O}_x)$ совпадает с $R_\mathfrak{p}$.

Топологическое пространство с пучком колец на нем мы будем называть **окольцованным пространством**. Наша ближайшая цель — понять, что следует называть морфизмом окольцованных пространств. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — два окольцованных пространства, ($\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$ — их структурные пучки). Во-первых, для задания морфизма окольцованных пространств $(X, \mathcal{O}_x) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ нужно задать непрерывное отображение топологических пространств $f\colon X \to Y$. Заметим, что отображение f позволяет «перенести» пучок $\mathcal{O}_X$ на пространство Y: можно определить новый пучок $f^*\mathcal{O}_X$ на пространстве Y так: $(f^*\mathcal{O}_X)(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ для всех открытых множеств U в X, а отображения ограничения переносятся естественным образом.

Представим, что X, Y — это многообразия, а $\mathcal{O}_X$ (соответственно, $\mathcal{O}_Y$) — это пучок [непрерывных, дифференцируемых, ...] функций из X (соответственно, из Y) в $\mathbb{R}$. Пусть U — открытое подмножество в Y. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ позволяет каждой функции $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ поставить в соответствие функцию $\varphi \circ f\colon f^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ на X. То есть, каждому элементу кольца $\mathcal{O}_Y(U)$ ставится в соответствие элемент кольца $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = (f^*\mathcal{O}_X)(U)$. Очевидно, что это соответствие является гомоморфизмом колец. Эти гомоморфизмы для вложенных открытых множеств $V \subseteq U$ в Y согласованы с гомоморфизмами ограничения в структурных пучках. В такой ситуации говорят, что задан морфизм пучков $\mathcal{O}_Y \to f^*\mathcal{O}_X$.

Вернемся к ситуации, когда X, Y — произвольные окольцованные пространства. Теперь $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$ не являются буквально пучками функций в $\mathbb{R}$, но мы хотим, чтобы они вели себя как пучки функций. Оказывается, что для задания морфизма окольцованных пространств нужно задать еще и морфизм пучков $\mathcal{O}_Y \to f^*\mathcal{O}_X$. Итак, морфизмом окольцованных пространств $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ называется пара $(f, \varphi^\sharp)$, состоящая из непрерывного отображения топологических пространств $f\colon X \to Y$ и морфизма пучков $\varphi^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to f^*\mathcal{O}_X$.

Пусть $X = \mathrm{Spec}(R)$ — аффинная «схема». Для любой точки $\mathfrak{p} \in X$ предел $\varinjlim_{\mathfrak{p}\in U} \mathcal{O}_X(U)$ является локальным кольцом $R_\mathfrak{p}$. Окольцованное пространство $(X, \mathcal{O}_X)$, в котором для любой точки $x \in X$ предел $\varinjlim_{x\in U} \mathcal{O}_X(U)$ является локальным кольцом, называется **локально окольцованным пространством**. Таким образом, любая аффинная схема является локально окольцованным пространством.

Морфизмом локально окольцованных пространств $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ называется морфизм окольцованных пространств $(f, \varphi^\sharp)$ с дополнительным условием: для каждой точки $\mathfrak{p} \in Y$ морфизм локальных колец $(O_Y)_\mathfrak{p} \to (f^*\mathcal{O}_X)_\mathfrak{p}$, индуцированный $\varphi^\sharp$, является **локальным**, то есть прообразом (единственного) максимального идеала является максимальный идеал. Это условие соответствует тому факту, что если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, $x \in X$, $y = f(x) \in Y$, и $\varphi\colon Y \to \mathbb{R}$ — функция на Y, принимающая значение 0 в точке y, то функция $\varphi \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ принимает значение 0 в точке x.

Полученную категорию локально окольцованных пространств мы будем обозначать через $\mathfrak{Esg}$.

Теорема 4. *Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — локально окольцованное пространство, R — кольцо. Морфизмы локально окольцованных пространств $X \to \mathrm{Spec}(R)$ находятся в естественной биекции с гомоморфизмами колец $R \to \mathcal{O}_X(X)$. Иными словами, функтор $\mathrm{Spec}\colon \mathfrak{Ring}^{op} \to \mathfrak{Esg}$ является правым сопряженным к функтору, сопоставляющему локально окольцованному пространству кольцо его глобальных сечений.*

Следствие 3. *Пусть R, S — кольца. Морфизмы локально окольцованных пространств $\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ находятся в естественной биекции с гомоморфизмами колец $R \to S$.*

Наконец, **«схемой»** называется локально окольцованное пространство, у каждой точки которого есть окрестность, изоморфная (вместе с ограничением на нее структурного пучка) аффинной «схеме».

1.4 Аффинные схемы

1.4.1 k-функторы

Функтор из категории k-алгебр в категорию множеств мы будем называть **k-функтором**, а представимый k-функтор — **аффинной схемой над** k. Иными словами, аффинная схема — это схема X, изоморфная $\mathrm{Sp}(A)$ для некоторого $A \in k\text{-}\mathfrak{Alg}$.

Пусть X — k-функтор. **Подфунктор** функтора X — это k-функтор Y такой, что $Y(A) \subseteq X(A)$ для всех $A \in k\text{-}\mathfrak{Alg}$ и $Y(\varphi) = X(\varphi)|_{Y(A)}$ для всех морфизмов k-алгебр $\varphi\colon A \to B$. Альтернативное определение: Y сопоставляет каждой k-алгебре A подмножество $Y(A) \subseteq X(A)$ так, что $X(\varphi)Y(A) \subseteq Y(B)$ для всех $\varphi\colon A \to B$. Для любого набора $(Y_i)_{i\in I}$ подфункторов в X можно определить их **пересечение**: подфунктор $Y = \bigcap_{i\in I} Y_i$ такой, что $Y(A) = \bigcap_{i\in I} Y_i(A)$.

Для двух k-функторов X, X' определим $\mathrm{Mor}(X, X')$ — множество естественных преобразований функторов, которые мы будем называть **морфизмами** k-функторов. Для морфизма $f \in \mathrm{Mor}(X, X')$ и любого подфунктора Y' в X' определим **обратный образ** $f^{-1}(Y')$ подфунктора Y' относительно морфизма f формулой $f^{-1}(Y')(A) = f(A)^{-1}(Y'(A))$ для всех k-алгебр A. Очевидно, что $f^{-1}(Y')$ является подфунктором в X. **Расслоенное произведение** в категории k-функторов существует и берется поточечно: если $X \to Z$, $Y \to Z$ — морфизмы k-функторов, то можно определить $X \times_Z Y\colon k\text{-}\mathfrak{Alg} \to \mathfrak{Set}$ равенством $(X \times_Z Y)(R) = X(R) \times_{Z(R)} Y(R)$ для всех $R \in k\text{-}\mathfrak{Alg}$. В частном случае $Z = \mathrm{Sp}(k)$ мы пишем $X \times Y$ вместо $X \times_{\mathrm{Sp}(k)} Y$. Расслоенное произведение аффинных схем $\mathrm{Sp}(A)$ и $\mathrm{Sp}(B)$ над аффинной схемой $\mathrm{Sp}(C)$ также является аффинной схемой, представимой алгеброй $A \otimes_C B$.

Примером аффинной схемы может служить **аффинное пространство** $\mathbb{A}^n = \mathrm{Sp}(k[t_1, \ldots, t_n])$. Для любого k-функтора X множество $\mathrm{Mor}(X, \mathbb{A}^1)$ обозначается через $k[X]$ и снабжается структурой k-алгебры: для $f, g \in \mathrm{Mor}(X, \mathbb{A}^1)$, $\lambda \in k$ определим естественные преобразования $f + g$, fg, $\lambda f \in \mathrm{Mor}(X, \mathbb{A}^1)$ формулами $(f+g)(A)(x) = f(A)(x) + g(A)(x)$, $(fg)(A)(x) = f(A)(x) \cdot g(A)(x)$, $(\lambda f)(A)(x) = \lambda \cdot f(A)(x)$ для всех $A \in k\text{-}\mathfrak{Alg}$, $x \in X(A)$.

Полезно воспринимать $k[X]$ как алгебру функций на X; тогда каждая k-алгебра R оказывается алгеброй функций на $\mathrm{Sp}(R)$, поскольку (в силу леммы Йонеды) $k[\mathrm{Sp}(R)]$ отождествляется с R. Мы будем писать $f(x)$ вместо $f(A)(x)$ для $x \in X(A)$. Если $X = \mathrm{Sp}(R)$ —

аффинная схема, то для $x \in X(A) = \mathrm{Sp}(R)(A) = \mathrm{Hom}_k(R, A)$ и $f \in k[X] = R$ получаем $f(x) = x(f)$. Пусть $f\colon X \to X'$ — морфизм k-функторов; он индуцирует гомоморфизм k-алгебр $k[X'] \to k[X]$, который мы будем обозначать через f^*.

Заметим, что если X — локально окольцованное пространство, то можно определить $\mathbb{Z}$-функтор $\mathfrak{S}X$, сопоставляющий кольцу R множество $\mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}(R), X)$. При этом $\mathfrak{S}(\mathrm{Spec}(S))$ в силу леммы Йонеды (и антиэквивалентности между категориями коммутативных колец и аффинных «схем») естественно изоморфно $\mathrm{Hom}(R, S)$, поэтому $\mathfrak{S}(\mathrm{Spec}(S)) \cong \mathrm{Sp}(S)$.

1.4.2 Замкнутые подфункторы

Пусть X — аффинная схема над k, $I \subseteq k[X]$. Определим подфунктор $V(I)$ в X следующим образом:

$$V(I)(A) = \{x \in X(A) \mid f(x) = 0 \text{ для всех } f \in I\} = \{\alpha \in \mathrm{Hom}_k(k[X], A) \mid \alpha(I) = 0\}$$

(нетрудно проверить, что это действительно подфунктор). Конечно, $V(I)$ зависит только от идеала, порожденного I, в $k[X]$.

Лемма 3. *Пусть $I, I' \trianglelefteq k[X]$. $I \subseteq I'$ тогда и только тогда, когда $V(I) \supseteq V(I')$.*

Подфунктор Y в X мы будем называть **замкнутым**, если он имеет вид $Y = V(I)$ для некоторого идеала $I \trianglelefteq k[X]$.

Любой замкнутый подфунктор, очевидно, снова является аффинной схемой: $V(I) \cong \mathrm{Sp}(k[X]/I)$ для всякого идеала $I \trianglelefteq k[X]$. Для набора $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ идеалов в $k[X]$ легко проверить, что $\cap_\lambda V(I_\lambda) = V(\sum_\lambda I_\lambda)$. **Замыканием** подфунктора Y в X называется наименьший замкнутый подфунктор в X, содержащий Y.

Пусть I_1, I_2 — идеалы в $k[X]$. Из леммы следует, что замыкание подфунктора, сопоставляющего алгебре A множество $V(I_1)(A) \cup V(I_2)(A)$, равно $V(I_1 \cap I_2)$. Нетрудно проверить, что если A — область целостности, то $V(I_1)(A) \cup V(I_2)(A) = V(I_1 \cap I_2)(A)$. Для произвольного A это равенство не обязано выполняться, но мы *определим* **объединение** двух замкнутых подфункторов $V(I_1)$ и $V(I_2)$ как замкнутый подфунктор $V(I_1 \cap I_2)$.

Пусть $f\colon X' \to X$ — морфизм аффинных схем над k, $I \trianglelefteq k[X]$. Легко проверить, что $f^{-1}(V(I)) = V(k[X']f^*(I))$; поэтому прообраз замкнутого подфунктора является замкнутым подфунктором. Если же $I' \trianglelefteq k[X']$, замыкание подфунктора $A \mapsto f(A)(V(I')(A))$ равно $V((f^*)^{-1}I')$. Этот функтор также обозначается через $\overline{f(V(I'))}$.

Если X_1, X_2 — аффинные схемы над k, $I_1 \trianglelefteq k[X_1]$, $I_2 \trianglelefteq k[X_2]$, легко проверить, что

$$V(I_1) \times V(I_2) \cong V(I_1 \otimes k[X_2] + k[X_1] \otimes I_2).$$

1.4.3 Открытые подфункторы

Пусть X — аффинная схема над k. Подфунктор Y в X называется **открытым**, если он имеет вид $Y = D(I)$ для некоторого подмножества $I \subseteq k[X]$, где

$$D(I)(A) = \{x \in X(A) \mid \sum_{f\in I} Af(x) = A\} = \{\alpha \in \mathrm{Hom}_k(k[X], A) \mid A\alpha(I) = A\}.$$

Почему это подфунктор? Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(A, A')$, $x \in D(I)(A)$; нам нужно проверить, что $X(\varphi)(x)$ лежит в $D(I)(A')$. Тогда $\sum_{f\in I} A'f(X(\varphi)(x)) = \sum_{f\in I} A'\varphi(f(x)) = A'\varphi(\sum_{f\in I} Af(x)) = A'\varphi(A) = A'$.

Если A — поле, то $D(I)(A) = \bigcup_{f\in I}\{x \in X(A) \mid f(x) \neq 0\}$. Если I состоит из одного элемента, $I = \{f\}$, мы пишем $X_f = D(f) = D(\{f\})$: $X_f(A) = \{\alpha \in \mathrm{Hom}_k(k[X], A) \mid \alpha(f) \in$

$A^*\}$. Видно, что $X_f \cong \mathrm{Sp}_k(k[X]_f)$. Поэтому *главный* открытый подфунктор аффинной схемы снова является аффинной схемой.

Например, в аффинной схеме $\mathbb{G}_a = \mathrm{Sp}(k[t])$ можно рассмотреть открытый подфунктор, соответствующий главному идеалу (t). Он представим алгеброй $k[t]_t = k[t, t^{-1}]$ и изоморфен аффинной схеме $\mathbb{G}_m$.

Конечно, $D(I)$ снова зависит только от идеала, порожденного множеством I. Любой идеал содержится в максимальном, поэтому

$$\begin{aligned} D(I)(A) &= \{\alpha \in \mathrm{Hom}_k(k[X], A) \mid \text{для всех } \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A), \alpha(I) \not\subset \mathfrak{m}\} \\ &= \{\alpha \in \mathrm{Hom}_k(k[X], A) \mid \text{для всех } \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A), \alpha_{\mathfrak{m}} \in D(I)(A/\mathfrak{m})\}, \end{aligned}$$

где $\alpha_{\mathfrak{m}}$ — композиция $\alpha\colon k[X] \to A$ с канонической проекцией $A \to A/\mathfrak{m}$. Это означает, что открытый подфунктор определяется своими значениями на полях.

Пусть I — идеал в $k[X]$. Для каждого простого идеала $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(k[X])$ пусть $\alpha_{\mathfrak{p}}$ — отображение $k[X] \to k[X]/\mathfrak{p} \to \kappa(\mathfrak{p})$. Понятно, что $\alpha_{\mathfrak{p}} \notin D(I)(\kappa(\mathfrak{p}))$ тогда и только тогда, когда $\alpha_{\mathfrak{p}}(I) = 0$, то есть, $\mathfrak{p} \supset I$. Но $\sqrt{I}$ является пересечением всех таких простых идеалов; поэтому $D(I) \subset D(I')$ тогда и только тогда, когда $\sqrt{I} \subset \sqrt{I'}$. В частности, $D(I) = D(\sqrt{I})$, и D устанавливает [сохраняющую включение] биекцию между радикальными идеалами в $k[X]$ и открытыми подфункторами в X. Нетрудно проверить, что $D(I) \cap D(I') = D(I \cap I') = D(I \cdot I')$ для идеалов $I, I' \trianglelefteq k[X]$; в частности, $X_f \cap X_{f'} = X_{ff'}$.

Если $I \trianglelefteq k[X]$ и A — поле, то $X(A)$ является [несвязным] объединением $D(I)(A)$ и $V(I)(A)$. Пусть $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — набор идеалов в $k[X]$. Если A — поле, то

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} D(I_\lambda)(A) = D(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda)(A).$$

Если $f\colon X' \to X$ — морфизм аффинных схем, то прообраз открытого подфунктора X является открытым подфунктором в X', поскольку для идеала $I \trianglelefteq k[X]$ имеем

$$f^{-1}D(I) = D(k[X']f^*(I)).$$

В частности, $f^{-1}X_g = X_{f^*(g)}$ для $g \in k[X]$.

Если $X_1 \times_S X_2$ — расслоенное произведение аффинных схем над k, $I_1 \trianglelefteq k[X_1]$, $I_2 \trianglelefteq k[X_2]$, то $D(I_1) \times_S D(I_2) = D(I_1 \otimes_{k[S]} I_2)$.

Аффинная схема X над k называется **алгебраической**, если $k[X]$ — конечно представимая k-алгебра, то есть, $k[X]$ изоморфна фактор-кольцу кольца многочленов $k[T_1, T_2, \ldots, T_n]$ по конечно порожденному идеалу. X называется **приведенной**, если $k[X]$ не содержит нетривиальных нильпотентов.

1.5 Схемы

1.5.1 Открытые подфункторы

Пусть X — k-функтор. Подфунктор Y в X называется **открытым**, если для любой аффинной схемы X' над k и для любого морфизма $f\colon X' \to X$ найдется идеал $I \trianglelefteq k[X']$ такой, что $f^{-1}(Y) = D(I)$. Покажем, что это определение согласуется с данным выше определением открытого подфунктора аффинной схемы. Мы уже доказали, что прообраз открытого подфунктора при морфизме аффинных схем является открытым подфунктором. Обратно, если подфунктор Y в $X = \mathrm{Sp}(A)$ открыт (в новом смысле), то достаточно взять в качестве X' аффинную схему X, а в качестве морфизма f — тождественный морфизм.

Переформулируем это определение: морфизм $f\colon \mathrm{Sp}(A) \to X$ соответствует элементу $\alpha \in X(A)$. Пусть Y — подфунктор X, R — произвольная k-алгебра. По определению $f^{-1}(Y)(R)$ состоит из таких отображений $\varphi\colon A \to R$ (то есть, элементов $\mathrm{Sp}(A)(R)$), что $X(\varphi)(\alpha)$ лежит в $Y(R)$. Таким образом, Y является открытым подфунктором тогда и только тогда, когда для любого A и для любого $\alpha \in X(A)$ найдется идеал $I \trianglelefteq A$ такой, что для $\varphi\colon A \to R$ включение $X(\varphi)(\alpha) \in Y(R)$ равносильно равенству $R\varphi(I) = R$.

Пусть, к примеру, $X = \mathfrak{S}T$ для локально окольцованного пространства T, и U — открытое подмножество T. Тогда $\mathfrak{S}U$ можно считать подфунктором в $\mathfrak{S}T$: $\mathfrak{S}U(R)$ состоит из тех морфизмов $\mathrm{Spec}(R) \to T$, образ которых лежит в U. Нетрудно доказать, что этот подфунктор открыт: возьмем k-алгебру A, $\alpha \in \mathfrak{S}T(A) = \mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}(A), T)$. Прообраз $\alpha^{-1}(U)$ является открытым подмножеством в $\mathrm{Spec}(A)$, поэтому он имеет вид $D(I)$ для некоторого идеала $I \trianglelefteq A$. Можно проверить, что этот идеал обладает нужным свойством из предыдущего абзаца.

Очевидно, что пересечение открытых подфункторов является открытым подфунктором, и прообраз открытого подфунктора — открытый подфунктор. К примеру, если X — произвольный k-функтор, и $f \in k[X] = \mathrm{Mor}(X, \mathbb{G}_a)$, можно рассмотреть $\mathbb{G}_m$ как подфунктор в $\mathbb{G}_a$ и взять прообраз $f^{-1}(\mathbb{G}_m)$. Этот открытый подфунктор мы будем обозначать через X_f; интуитивно это подфунктор X, на котором f не аннулируется.

Если X_1, X_2, S — k-функторы с морфизмами такими, что определено расслоенное произведение $X_1 \times_S X_2$, и $Y_1 \subset X_1$, $Y_2 \subset X_2$ — открытые подфункторы, то $Y_1 \times_S Y_2$ — открытый подфунктор в $X_1 \times_S X_2$; это следует из сохранения открытости при пересечении и взятии прообраза.

Лемма 4. *Пусть Y, Y' — открытые подфункторы X. $Y = Y'$ тогда и только тогда, когда $Y(A) = Y'(A)$ для любой k-алгебры A, являющейся полем.*

Доказательство. Если $Y \neq Y'$, то $Y(A) \neq Y'(A)$ для некоторой k-алгебры A. Можно считать, что найдется $x \in Y(A)$ такой, что $x \notin Y'(A)$. Поскольку $Y(A) \cong \mathrm{Nat}(\mathrm{Sp}(A), Y) \subseteq \mathrm{Nat}(\mathrm{Sp}(A), X)$, элемент x соответствует морфизму $\varphi\colon \mathrm{Sp}(A) \to X$; при этом $\varphi(A)(\mathrm{id}_A) = x \in X(A)$. Условия $x \in Y(A)$ и $x \notin Y'(A)$ теперь можно записать как $\mathrm{id}_A \in \varphi^{-1}(Y)(A)$, $\mathrm{id}_A \notin \varphi^{-1}(Y')(A)$, поэтому открытые подфункторы $\varphi^{-1}(Y)$ и $\varphi^{-1}(Y')$ в $\mathrm{Sp}(A)$ не совпадают. Но мы знаем, что открытые подфункторы аффинной схемы определяются своими значениями на полях. Значит, для некоторого поля B множества $\varphi^{-1}(Y)(B)$ и $\varphi^{-1}(Y')(B)$ не совпадают (как подмножества $\mathrm{Mor}(\mathrm{Sp}(B), \mathrm{Sp}(A))$). Возьмем композицию $\mathrm{Sp}(B) \to \mathrm{Sp}(A) \to X$ — получим, что $Y(B) \neq Y'(B)$. □

Семейство $(Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ открытых подфункторов в X называется **открытым покрытием** X, если $X(A) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda(A)$ для любой k-алгебры A, являющейся полем. Если X — аффинная схема, $Y_\lambda = D(I_\lambda)$ для $I_\lambda \trianglelefteq k[X]$, то для поля A множество $X(A)$ разбивается на $D(I_\lambda)(A)$ и $V(I_\lambda)(A)$; поэтому (Y_λ) образуют открытое покрытие X тогда и только тогда, когда $\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = k[X]$. В частности, для аффинной схемы X и элементов $f_1, \ldots, f_r \in k[X]$ множества X_{f_i} образуют открытое покрытие X тогда и только тогда, когда f_i порождают единичный идеал в $k[X]$.

Напомним, что R-модуль M называется **плоским**, если выполняется одно из следующих равносильных условий:

1. для любого идеала $I \trianglelefteq R$ гомоморфизм $M \otimes_R I \to M \otimes_R R = M$ инъективен;

2. для любой точной последовательности R-модулей $N' \to N \to N''$ последовательность $M \otimes_R N' \to M \otimes_R N \to M \otimes_R N''$ точна (иными словами, функтор тензорного умножения на M точен).

R-модуль M называется **строго плоским**, если выполняется одно из следующих равносильных условий:

1. M является плоским R-модулем и для любого R-модуля N из равенства $M \otimes_R N = 0$ следует, что $N = 0$.

2. точность последовательности R-модулей $N' \to N \to N''$ равносильна точности последовательности $M \otimes_R N' \to M \otimes_R N \to M \otimes_R N''$.

3. M является плоским и для любого максимального идеала $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$ имеет место $M \neq \mathfrak{m}M$.

Лемма 5. *Пусть Y — открытый подфунктор функтора X, $\varphi\colon A \to A'$ — гомоморфизм k-алгебр. Алгебру A' можно считать модулем над A. Если A' является строго плоским A-модулем, то $Y(A) = X(\varphi)^{-1}Y(A')$.*

Доказательство. Включение $\subset$ следует из определения подфунктора. Предположим сначала, что X — аффинная схема; тогда $Y = D(I)$ для некоторого $I \trianglelefteq k[X]$. Пусть $\alpha \in X(A) = \mathrm{Hom}_k(k[X], A)$ и $X(\varphi)(\alpha) \in Y(A')$. Второе условие означает, что $\varphi \circ \alpha \in D(I)(A')$, то есть, $A' = A'\varphi(\alpha(I))$. Очевидный изоморфизм $A \otimes_A A' \cong A'$, задаваемый формулой $a \otimes a' \mapsto \varphi(a)a'$ индуцирует изоморфизм $A\alpha(I) \otimes_A A' \cong A'\varphi(\alpha(I))$. Поскольку A' является плоским A-модулем, вложение $A\alpha(I) \hookrightarrow A$ приводит к вложению $A\alpha(I) \otimes_A A' \hookrightarrow A \otimes_A A'$. Профакторизуем $A \otimes_A A'$ по $A\alpha(I) \otimes_A A'$; получим, что

$$(A/A\alpha(I)) \otimes_A A' = A'/(A'\varphi(\alpha(I))) = 0,$$

поскольку $A' = A'\varphi(\alpha(I))$. Из того, что A' строго плоский, следует, что $A = A\alpha(I)$, то есть, $\alpha \in Y(A)$.

Пусть теперь X — произвольный k-функтор, $\alpha \in X(A) \cong \mathrm{Mor}(\mathrm{Sp}(A), X)$ по соответствию Йонеды; при этом $\alpha(A)(\mathrm{id}_A) = \alpha$ и, стало быть, $X(\varphi)(\alpha) = \alpha(A')\,\mathrm{Sp}(\varphi)(\mathrm{id}_{A'})$. Если $\alpha \in X(\varphi)^{-1}Y(A')$, то $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Sp}(\varphi)^{-1}(\alpha^{-1}(Y)(A'))$. Но $\alpha^{-1}(Y)$ — открытый подфунктор аффинной схемы $\mathrm{Sp}(A)$, для которого лемма уже доказана. Поэтому $\mathrm{id}_A \in \alpha^{-1}(Y)(A)$, и $\alpha = \alpha(A)\,\mathrm{id}_A \in Y(A)$, что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 4. *Лемму 4 можно усилить: достаточно требовать совпадения $Y(A)$ и $Y'(A)$ только для алгебраически замкнутых полей A. Кроме того, открытые подфункторы (Y_λ) образуют открытое покрытие X тогда и только тогда, когда $X(A) = \bigcup_\lambda Y_\lambda(A)$ для любой k-алгебры A, являющейся алгебраически замкнутым полем.*

1.5.2 Локальные функторы

Сейчас мы переформулируем условия из определения пучка на языке функторов. Пусть X, Y — некоторые k-функторы, и $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — открытое покрытие Y. Если X, Y соответствуют геометрическим объектам, то морфизм функторов может быть задан «локально» на покрытии. Более точно, морфизм $f\colon Y \to X$ должен однозначно определяться своими ограничениями $f|_{Y_\lambda}\colon Y_\lambda \to X$: из набора морфизмов на элементах покрытия (Y_λ), согласованных на всех пересечениях $(Y_\lambda \cap Y_\mu)$, можно однозначно склеить морфизм на всем Y. Это означает, что последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Mor}(Y, X) \xrightarrow{\ \alpha\ } \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Mor}(Y_\lambda, X) \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightrightarrows}} \prod_{\lambda,\mu\in\Lambda} \mathrm{Mor}(Y_\lambda \cap Y_\mu, X) \qquad (1)$$

точна, где компонента с индексом λ элемента $\alpha(f)$ равна f_{Y_λ}, а компоненты с индексом (λ, μ) наборов $\beta((f_i)_{i\in\Lambda})$ и $\gamma((f_i)_{i\in\Lambda})$ равны соответственно $f_\lambda|_{Y_\lambda\cap Y_\mu}$ и $f_\mu|_{Y_\lambda\cap Y_\mu}$. Точность этой последовательности означает, что α является инъекцией, композиции $\beta\alpha$ и $\gamma\alpha$ совпадают, и образ α совпадает с множеством наборов из $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Mor}(Y_\lambda, X)$ с одинаковыми образами под действием β и γ. Выражаясь категорным языком, α является уравнителем морфизмов β и γ.

Для произвольных функторов $X, Y, (Y_\lambda)$ эта последовательность не обязана быть точной. Назовем k-функтор X **локальным**, если эта последовательность точна для всех k-фунторов Y и для всех открытых покрытий (Y_λ). В частности, если R — некоторая k-алгебра, и элементы $f_1, \dots, f_n \in R$ порождают единичный идеал, то функторы $\mathrm{Sp}(R_{f_i})$ образуют открытое покрытие аффинной схемы $\mathrm{Sp}(R)$. По лемме Йонеды точную последовательность из определения локального функтора можно переписать так:

$$0 \longrightarrow X(R) \longrightarrow \prod_{i=1}^n X(R_{f_i}) \rightrightarrows \prod_{i,j=1}^n X(R_{f_if_j})\ , \qquad (2)$$

где морфизмы получаются применением функтора X к каноническим морфизмам колец в локализации. Этот частный случай на самом деле дает эквивалентное определение локальности.

Утверждение 2. *k-функтор X является локальным тогда и только тогда, когда последовательность (2) точна для любой k-алгебры R и для любых $f_1, \dots, f_n \in R$, порождающих единичный идеал в R.*

Доказательство. См. [DG, I, § 1, 4.13]. □

Заметим, что для таких R и $f_1, \dots, f_n \in R$ последовательность

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow \prod_{i=1}^n R_{f_i} \rightrightarrows \prod_{i,j=1}^n R_{f_if_j}$$

(с естественными морфизмами) является точной (это следует, например, из описания структурного пучка на $\mathrm{Spec}(R)$. Аффинная схема X является функтором $\mathrm{Hom}(k[X], -)$, точным слева, поэтому последовательность (1) точна для аффинной X. Поэтому любая аффинная схема является локальным функтором.

Приведем полезный пример покрытия аффинной схемы: пусть $A_1, \dots, A_n$ — k-алгебры, $R = \prod_{i=1}^n A_i$, $f_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Если функтор X локальный, то, применяя (2), получаем, что $X(\prod_{i=1}^n A_i)$ изоморфно произведению $\prod_{i=1}^n X(A_i)$.

1.5.3 Схемы

Пусть X — k-функтор. X называется **схемой** (над k), если X локален и может быть покрыт аффинными схемами. Очевидно, что любая аффинная схема является схемой. В качестве морфизмов в категории схем мы рассматриваем морфизмы k-функторов; таким образом, категория схем над k является полной подкатегорией в категории k-функторов. Оказывается, что категория схем замкнута относительно многих естественных операций.

Лемма 6. *Если X — локальный k-функтор (соответственно, схема над k), и X' — открытый подфунктор в X, то X' является локальным (соответственно, схемой).*

Доказательство. Посмотрим на (1). Инъективность первого отображения для X' следует из инъективности для X. Для точности остается доказать, что если $f \in \mathrm{Mor}(Y, X)$ таков, что все ограничения $f|_{Y_j}$ пропускаются через X', то f пропускается через X'. По предположению $Y_j \subset f^{-1}(X')$ для всех j; по определению открытого покрытия имеем $f^{-1}(X')(A) = Y(A)$ для любой k-алгебры A, являющейся полем. Мы видим два открытых подфунктора в Y, точки которых над полями совпадают; значит, $Y \subset f^{-1}(X')$, и f пропускается через X'. Чтобы получить открытое покрытие X' в случае, когда X является схемой, достаточно рассмотреть случай аффинной X; тогда $X' = D(I)$, и $(X_f)_{f\in I}$ образуют аффинное покрытие X'. □

Несложно доказать, что если X_1, X_2, S — локальные функторы (соответственно, схемы), для которых определено расслоенное произведение X_1 и X_2 над S, то $X_1 \times_S X_2$ тоже является локальным функтором (соответственно, схемой).

Важнейшим примером неаффинных схем являются **грассманианы** $\mathfrak{G}_{r,n}$, где r, n — натуральные числа. Для k-алгебры A положим $\mathfrak{G}_{r,n}(A)$ равным множеству прямых слагаемых A-модуля A^{r+n}, имеющих ранг r. Если $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм k-алгебр, отображение $\mathfrak{G}_{r,n}(\varphi)$ переводит A-модуль P в канонический образ $B \otimes_A P$ в B^{r+n}. В частности, при $r = 1$ получаем $\mathbb{P}^n = \mathfrak{G}_{1,n}$ — **проективное пространство** размерности n.

Построим покрытие $\mathfrak{G}_{r,n}$ аффинными схемами. Зафиксируем прямое слагаемое Q ранга n в k-модуле k^{r+n}. Для каждой k-алгебры A отождествим $A \otimes_k Q$ с его образом в A^{r+n} при изоморфизме $A \otimes_k k^{r+n} \cong A^{r+n}$, и пусть π_A — каноническая проекция A^{r+n} на $A^{r+n}/(A \otimes_k Q)$. Обозначим через U_Q подфунктор в $\mathfrak{G}_{r,n}$, сопоставляющий k-алгебре A множество подмодулей, дополняющих $A \otimes_k Q$ до A^{r+n}. Покажем, что U_Q открыт. Для k-алгебры A и элемента $P \in \mathfrak{G}_{r,n}(A)$ нам нужно найти идеал I в A такой, что для гомоморфизма $\varphi\colon A \to B$ равенство $B\varphi(I) = B$ равносильно тому, что $B \otimes_A P = (\mathfrak{G}_{r,n}(\varphi))(P)$ является дополняющим к $B \otimes_k Q$ в B^{r+n}. Тот факт, что $B \otimes_A P$ является дополняющим к $B \otimes_k Q$, равносилен тому, что отображение $\nu_B\colon B \otimes_A P \to B^{r+n}/(B \otimes_k Q)$, индуцированное π_B, является биекцией; поскольку речь идет о проективных модулях конечного ранга, достаточно показать его сюръективность, то есть, что $\operatorname{Coker}(\nu_B) \cong B \otimes_A (\operatorname{Coker}(\nu_A)) = 0$. Поскольку $\operatorname{Coker}(\nu_A)$ является A-модулем конечного типа, это условие эквивалентно тому, что $B\varphi(I) = B$, где $I = \operatorname{Ann}_A(\operatorname{Coker}(\nu_A))$ (см. [B, II, §4, № 4, Предложения 17, 19]).

Докажем теперь, что U_Q является аффинной схемой. Выберем базис $e_1, e_2, \ldots, e_{r+n}$ в k^{r+n} так, что $Q = \oplus_{i=r+1}^{r+n} ke_i$. Для k-алгебры A и модуля P, дополняющего $A \otimes_k Q$ до A^{r+n}, можно записать

$$1 \otimes e_i = p_i + \sum_{j=r+1}^{r+n} a_{ij} \otimes e_j, \quad i \leq r,$$

где $p_i \in P$, $a_{ij} \in R$. Задание P эквивалентно заданию a_{ij}, поэтому U_Q изоморфно аффинному пространству $\mathbb{A}^{rn}$.

Теперь проварьируем Q: для каждого n-элементного подмножества фиксированного базиса $e_1, \ldots, e_{r+n}$ модуля k^{r+n} возьмем в качестве k-модуля Q модуль, натянутый на элементы этого подмножества. Если k-алгебра A является полем, нетрудно понять, что $\mathfrak{G}_{r,n}(A)$ является объединением множеств U_Q по всем таким Q. Стало быть, функторы U_Q покрывают $\mathfrak{G}_{r,n}$.

Можно показать, что $\mathfrak{G}_{r,n}$ является схемой (осталось доказать локальность этого функтора). Доказательство этого см. в [DG, I, §1, 3.13].

1.5.4 Замена базы

Пусть k' — k-алгебра. Любая k'-алгебра A естественным образом превращается в k-алгебру, которую мы тоже будем обозначать буквой A. По любому k-функтору X можно построить k'-функтор $X_{k'}$, положив $X_{k'}(A) = X(A)$ для всякой k'-алгебры A и $X_{k'}(\varphi) = X(\varphi)$ для всякого морфизма k'-алгебр φ. Сопоставление $X \mapsto X_{k'}$ можно продолжить до функтора из категории k-функторов в категорию k'-функторов, определив для морфизма k-функторов $f\colon X \to X'$ морфизм $f_{k'}\colon X_{k'} \to X'_{k'}$ как естественное преобразование с компонентами $f_{k'}(A) = f(A)$, $A \in k\text{-}\mathfrak{Alg}$. Этот функтор называется **заменой базы** с k на k'.

Если Y — подфунктор k-функтора X, то $Y_{k'}$ является подфунктором $X_{k'}$. Пересечение подфункторов, взятие обратных образов и вообще любое расслоенное произведение коммутирует с заменой базы.

Нетрудно понять, что $(\mathrm{Sp}_k(R))_{k'} \cong \mathrm{Sp}_{k'}(R \otimes k')$ для любой k-алгебры R. То есть, если X аффинная схема над k, то $X_{k'}$ — аффинная схема над k', и $k[X_{k'}] \cong k[X] \otimes k'$. Например,

$$\mathrm{SL}_{2,k} = \mathrm{Sp}_k(k[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}]/(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} - 1)),$$

поэтому

$$\begin{aligned}(\mathrm{SL}_{2,k})_{k'} &= \mathrm{Sp}_{k'}(k' \otimes k[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}]/(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} - 1)) \\ &= \mathrm{Sp}_{k'}(k'[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}]/(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} - 1)) \\ &= \mathrm{SL}_{2,k'}\,.\end{aligned}$$

Если $I \trianglelefteq k[X]$, то $V(I)_{k'} = V(I \otimes k')$, $D(I)_{k'} = D(I \otimes k')$, где под $I \otimes k'$ имеется в виду образ $I \otimes k'$ при каноническом изоморфизме $k[X] \otimes k' \cong k[X']$.

Пусть теперь R — k'-алгебра. Для любой k'-алгебры A выполнено

$$(\mathrm{Sp}_{k'}(R))(A) = \mathrm{Hom}_{k'}(R, A) \subset \mathrm{Hom}_k(R, A) = (\mathrm{Sp}_k(R))_{k'}(A).$$

Это означает, что $\mathrm{Sp}_{k'}(R)$ является подфунктором в $(\mathrm{Sp}_k(R))_{k'}$. Нетрудно понять, что открытые и замкнутые подфункторы в $\mathrm{Sp}_{k'}(R)$ являются пересечениями $\mathrm{Sp}_{k'}(R)$ с открытыми и замкнутыми подфункторами в $(\mathrm{Sp}_k(R))_{k'}$, соответствующими тем же идеалам алгебры R. Поэтому если Y — открытый подфунктор k-функтора X, то $Y_{k'}$ — открытый подфунктора $X_{k'}$. Если X — локальный k-функтор, то $X_{k'}$ — локальный k'-функтор. Поэтому если X — схема над k, то $X_{k'}$ — схема над k'.

Пусть k_1 — подкольцо k. Будем говорить, что k-функтор X **определен над** k_1, если $X = (X')_k$ для некоторого k_1-функтора X'.

1.5.5 Геометрическая реализация

Напомним, что функтор $\mathfrak{S}\colon \mathfrak{Esg} \to \mathrm{Func}(\mathfrak{Ring}, \mathfrak{Set})$ сопоставляет локально окольцованному пространству X $\mathbb{Z}$-функтор $A \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Esg}}(\mathrm{Spec}(A), X)$.

Теорема 5. *Существует функтор, являющийся левым сопряженным к функтору* $\mathfrak{S}$.

Доказательство. См. [DG, I, §1, 4.1]. Приведенное там доказательство воспроизводит доказательство теоретико-категорной *теоремы Кана.* Мы приведем лишь конструкцию. Пусть X — $\mathbb{Z}$-функтор. Обозначим через $\mathfrak{Ring}_X$ категорию **колец над** X: объектами этой категории являются пары (R, ρ), где R — кольцо, и $\rho \in X(R) = \mathrm{Nat}(\mathrm{Sp}(R), X)$, а морфизм $\varphi\colon (R, \rho) \to (S, \sigma)$ — это гомоморфизм колец, сохраняющий вторые компоненты: $X(\varphi)(\rho) = \sigma$. Рассмотрим функтор $d_X\colon \mathfrak{Ring}_X \to \mathfrak{Esg}$, сопоставляющий паре (R, ρ) локально окольцованное пространство $\mathrm{Spec}(R)$. Предел этого функтора — локально окольцованное пространство $|X| = \varinjlim d_X$, которое мы будем называть **геометрической реализацией** функтора X. Сопоставление $X \mapsto |X|$ и является функтором, левым сопряженным к $\mathfrak{S}$. □

Пусть X — $\mathbb{Z}$-функтор. Единица описанного сопряжения индуцирует морфизм $X \to \mathfrak{S}|X|$. Этот морфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда X является схемой. Коединица сопряжения индуцирует морфизм $|\mathfrak{S}T| \to T$ для каждого локально окольцованного пространства T, который является изоморфизмом тогда и только тогда, когда T является «схемой» (доказательство этих утверждений приведено в [DG, I, §1, 4.4]). Из этого следует, что указанное сопряжение устанавливает эквивалентность между подкатегорией «схем» в $\mathfrak{Esg}$ и подкатегорией схем в $\mathrm{Func}(k\text{-}\mathfrak{Alg}, \mathfrak{Set})$. Эту эквивалентность можно описать иначе: чтобы по функтору X построить «схему», рассмотрим его покрытие (X_λ) аффинными схемами: $X_\lambda \cong \mathrm{Sp}(R_\lambda)$. Нам нужно «склеить» соответствующие аффинные «схемы» $\mathrm{Spec}(R_\lambda)$ в соответствии с этим покрытием. Построим копроизведение $\coprod \mathrm{Spec}(R_\lambda)$ в категории локально окольцованных пространств. Каждое пересечение $X_\lambda \cap X_\mu$ дает нам изоморфные открытые подфункторы в X_λ и X_μ, соответствующие некоторым идеалам R_λ и R_μ. Этим идеалам соответствуют изоморфные открытые подпространства в $\mathrm{Spec}(R_\lambda)$ и $\mathrm{Spec}(R_\mu)$. После отождествления всех таких подпространств мы получим фактор-пространство $\coprod \mathrm{Spec}(R_\lambda)$, которое изоморфно геометрической реализации $|X|$ функтора X.

Эквивалентность между схемами и «подсхемами» можно перенести на «относительный случай», если рассматривать k-функторы вместо $\mathbb{Z}$-функторов и *«схемы» над k* (то есть, схемы с фиксированным морфизмом в $\mathrm{Spec}(k)$) вместо «схем».

1.5.6 Замкнутые подфункторы

Подфунктор Y в X называется **замкнутым**, если для любой аффинной схемы X' и для любого морфизма функторов $f\colon X' \to X$ подфунктор $f^{-1}(Y)$ в X' является замкнутым в старом смысле. Заметим, что это определение совпадает со старым для аффинной схемы X. Очевидно, что пересечение замкнутых подфункторов замкнуто, прообраз замкнутого подфунктора замкнут, расслоенное произведение замкнутых подфункторов замкнуто. Для любого подфунктора Y в X можно определить его замыкание $\overline{Y}$ как пересечение всех замкнутых подфункторов, содержащих Y.

Лемма 7. *Пусть X — аффинная схема, (X_λ) — открытое покрытие X. Если Y, Y' — локальные подфункторы X и $Y \cap X_\lambda = Y' \cap X_\lambda$ для всех λ, то $Y = Y'$.*

Доказательство. Сначала измельчим покрытие до конечного аффинного: открытые подфункторы X_λ соответствуют некоторым идеалам I_λ алгебры $k[X]$, сумма которых является единичным идеалом. Поэтому можно выбрать конечное число элементов $f_i = f_{\lambda_i} \in I_{\lambda_i}$, сумма которых равна 1. Теперь можно считать, что мы получили конечное покрытие подфункторами $X_{\lambda_i} = X_{f_i}$. Условие $Y \cap X_\lambda = Y' \cap X_\lambda$, очевидно, сохранится при ограничении на X_{f_i}. Пусть $x \in X(A) = \mathrm{Hom}(k[X], A)$, $f_i' = x(f_i) \in A$ и $x_i \in X(A_{f_i'}$ соответствует композиции $k[X] \to A \to A_{f_i'}$. Теперь $A = \sum Af_i'$, и по локальности Y и Y' имеем $x \in Y(A) \Leftrightarrow x_i \in Y(A_{f_i'}) \Leftrightarrow x_i \in (Y \cap X_i)(A_{f_i'}) \Leftrightarrow x_i \in (Y' \cap X_i)(A_{f_i'}) \Leftrightarrow x \in Y'(A)$. □

Лемма 8. *Пусть (X_λ) — открытое покрытие X; Y — замкнутый подфунктор X, $Y \supset X_\lambda$ для всех λ. Тогда $Y = X$.*

Доказательство. Пусть A — некоторая k-алгебра и $x \in X(A) = \mathrm{Mor}(\mathrm{Sp}\, A, X)$. Функторы $x^{-1}(X_\lambda)$ образуют открытое покрытие $\mathrm{Sp}\, A$, а функторы $x^{-1}(Y)$ и $x^{-1}(X) = \mathrm{Sp}\, A$ замкнуты в $\mathrm{Sp}\, A$, следовательно, локальны. Кроме того, из $Y \supset X_\lambda$ следует, что $x^{-1}(Y) \supset x^{-1}(X_\lambda)$, откуда $x^{-1}(Y) \cap x^{-1}(X_\lambda) = x^{-1}(X_\lambda) = x^{-1}(X) \cap x^{-1}(X_\lambda)$. Значит, подфункторы $x^{-1}(Y)$ и $x^{-1}(X)$ удовлетворяют условию предыдущей леммы, откуда $x^{-1}(Y) = x^{-1}(X) = \mathrm{Sp}\, A$, поэтому $x \in Y(A)$. □

Лемма 9. *Любой замкнутый подфунктор Y локального функтора X (схемы X) снова является локальным (схемой).*

Доказательство. Рассмотрим морфизм $f\colon X' \to X$ и открытое покрытие (X_λ') функтора X'; пусть каждый $f|_{x_\lambda'}$ пропускается через Y, то есть $X_\lambda' \subset f^{-1}(Y)$. Правая часть замкнута, поэтом по предыдущей лемме $f^{-1}(Y) = X'$, то есть f пропускается через Y. Отсюда и из локальности X легко следует локальность Y. Открытое покрытие Y получается пересечением открытого покрытия X с Y. □

Лемма 10. *Если Y — замкнутый подфунктор k-функтора X, k' — k-алгебра, то $Y_{k'}$ — замкнутый подфунктор $X_{k'}$.*

Доказательство. Упражнение. $\square$

Лемма 11. *Пусть X — локальный функтор, $Y \subset X$ — локальный подфунктор X, (X_λ) — открытое покрытие X. Тогда Y замкнут в X тогда и только тогда, когда $Y \cap X_\lambda$ замкнут в X_λ для всех λ.*

Доказательство. В одну сторону это очевидно. Обратно, пусть $f\colon X' \to X$ — морфизм с аффинной X', тогда $f^{-1}(Y) \cong X' \times_X Y$ является локальным, $f^{-1}(X_j)$ образуют открытое покрытие X', и каждое пересечение $f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(X_\lambda) = f^{-1}(Y \cap X_\lambda)$ замкнуто в $f^{-1}(X_\lambda)$. Поэтому достаточно разобрать случай аффинной схемы X. Опять можно считать, что $X_\lambda = X_{f_i}$ для конечного набора $f_i \in k[X]$. Пусть $I = \operatorname{Ker}(k[X] \to k[Y])$, $I_\lambda = \operatorname{Ker}(k[X] \to k[X_\lambda \cap Y]$ — ядра ограничений. Тогда $\overline{Y} = V(I)$. Поскольку $Y \cap X_i$ замкнут, то $Y \cap X_i = V(I_i)_{f_i}$. $Y \cap X_i$ образуют открытое покрытие Y. Поэтому ограничение индуцирует инъективное отображение $k[Y] \to \prod_{i=1}^r k[Y \cap X_i]$, откуда $I = \bigcap I_i$. Для всех i, j имеем $(V(I_j)_{f_j})_{f_i} = (Y \cap X_j)_{f_i} = Y \cap X_j \cap X_i = (Y \cap X_i)_{f_j} = (V(I_i)_{f_i})_{f_j}$, откуда $(I_j)_{f_i f_j} = (I_i)_{f_i f_j}$. Поэтому для $a \in I_i$ найдется n такое, что $(f_i f_j)^n a \in I_j$ для всех j, откуда $f_i^n a \in I_j$ для всех j и $f_i^n a \in I = \cap I_j$. Следовательно, $I_{f_i} = (I_i)_{f_i}$ для всех i. Это означает, что $\overline{Y} \cap X_i = Y \cap X_i$. По одной из предыдущих лемм, примененной к локальным подфункторам $Y, \overline{Y}$ функтора $\overline{Y}$, получаем, что $Y = \overline{Y}$. $\square$

1.5.7 Функторы морфизмов

Для любых k-функторов X, Y положим $\mathfrak{Mor}(X,Y)(A) = \operatorname{Mor}(X_A, Y_A)$ для любой k-алгебры A. Для гомоморфизма $\varphi\colon A \to A'$ определим $\mathfrak{Mor}(X,Y)(\varphi)$ на морфизме $f\colon X_A \to Y_A$ как морфизм $f_{A'}\colon X_{A'} \cong (X_A)_{A'} \to (Y_A)_{A'} \cong Y_{A'}$, полученный с помощью структуры A-алгебры на A' из морфизма φ.

Очевидно, что $\mathfrak{Mor}$ является бифунктором. Если Y' — подфунктор Y, можно считать, что $\mathfrak{Mor}(X, Y')$ — подфунктор $\mathfrak{Mor}(X,Y)$. Пусть (X_λ) — открытое покрытие X, Y' — замкнутый подфунктор Y, $\rho_\lambda\colon \mathfrak{Mor}(X,Y) \to \mathfrak{Mor}(X_\lambda, Y)$ — отображение ограничения. Тогда $\mathfrak{Mor}(X,Y') = \bigcap_\lambda \rho_j^{-1} \mathfrak{Mor}(X_\lambda, Y')$. Действительно, пусть $f \in \mathfrak{Mor}(X,Y)(A) = \operatorname{Mor}(X_A, Y_A)$ для некоторой k-алгебры A и $\rho_j(A) f \in \operatorname{Mor}(X_{\lambda,A}, Y'_A)$ для всех λ. Это означает, что $X_{\lambda,A} \subset f^{-1}(Y'_A)$ для всех λ. Но $X_{\lambda,A}$ образуют открытое покрытие X_A, $f^{-1}(Y'_A)$ — замкнутый подфунктор X_A, поэтому можно применить лемму 8, и получаем $f^{-1}(Y'_A) = X_A$, откуда $f \in \mathfrak{Mor}(X,Y')(A)$.

Если $X = \operatorname{Sp}_k R$ — аффинная схема, то $\mathfrak{Mor}(X,Y)$ можно описать так: $\mathfrak{Mor}(\operatorname{Sp}_k R, Y)(A) \cong \operatorname{Mor}((\operatorname{Sp}_k R)_A, Y_A) \cong \operatorname{Mor}(\operatorname{Sp}_A(R \otimes A), Y) \cong Y(R \otimes A)$. Элементу $y \in Y(R \otimes A)$ по лемме Йонеды соответствует морфизм функторов $f_y\colon \operatorname{Sp}_k(R \otimes A) \to Y$, переводящий $\gamma \in \operatorname{Hom}_k(R \otimes A, B) = \operatorname{Sp}_k(R \otimes A)(B)$ в $Y(\gamma)(y)$. Кроме того, при отождествлении $Y(R \otimes A)$ с $\mathfrak{Mor}(Sp_k R, Y)(A)$ элементу y соответствует морфизм $f'_y\colon \operatorname{Sp}_k A \to \mathfrak{Mor}(\operatorname{Sp}_k R, Y)$. Он действует так: для k-алгебры B морфизм $f'_y(B)$ — это отображение $\operatorname{Hom}_k(A,B) \to Y(R \otimes B)$, переводящее β в $Y(\mathrm{id}_R \otimes \beta)(y)$. Иными словами, $f'_y(B)$ является композицией отображения $\beta \mapsto \mathrm{id}_R \otimes \beta$ с $f_y(R \otimes B)$.

Лемма 12. *Если R — свободный k-модуль, Y' — замкнутый подфунктор Y, то подфунктор $f_y'^{-1} \mathfrak{Mor}(\operatorname{Sp}_k R, Y')$ замкнут в $\operatorname{Sp}_k(A)$.*

Доказательство. Поскольку $f_y^{-1}(Y')$ замкнут в $\operatorname{Sp}_k(R \otimes A)$, существует идеал $I' \subset R \otimes A$ такой, что $f_y^{-1}(Y') = V(I')$. По определению f'_y для любой k-алгебры B получаем

$$\begin{aligned} f_y'^{-1} \mathfrak{Mor}(\operatorname{Sp}_k R, Y')(B) &= \{\beta \in \operatorname{Hom}_k(A,B) \mid I' \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_R \otimes \beta)\} \\ &= \{\beta \in \operatorname{Hom}_k(A,B) \mid I' \subset R \otimes \operatorname{Ker}(\beta)\}, \end{aligned}$$

поскольку R свободный. Из того, что R свободный, также следует, что тензорное произведение с R коммутирует с пересечениями идеалов. Рассмотрим все идеалы I_i, для которых $R \otimes I_i \supset I'$; тогда их пересечение I — это наименьший идеал A, для которого $I' \subset R \otimes I$. Поэтому $I' \subset R \otimes \operatorname{Ker}(\beta) \Leftrightarrow I \subset \operatorname{Ker}(\beta) \Leftrightarrow \beta \in V(I)(B)$, и $f_y'^{-1}\,\mathfrak{Mor}(\operatorname{Sp}_k R, Y') = V(I)$ замкнут. $\square$

Лемма 13. *Пусть X, Y — k-функторы, и $Y' \subset Y$ — замкнутый подфунктор. Если X покрыт аффинными схемами (X_λ) такими, что каждая алгебра $k[X_\lambda]$ является свободным k-модулем, то $\mathfrak{Mor}(X, Y')$ замкнут в $\mathfrak{Mor}(X, Y)$.*

Доказательство. Применим предыдущую лемму ко всем A и всем y. $\square$

Если для схемы X существует такое аффинное покрытие, она называется **локально свободной**.

2 Групповые схемы и представления

2.1 Определения

2.1.1 Действие групповой схемы на функторе

Пусть G — групповой функтор над k. **Левым действием** G на k-функторе X называется морфизм $\alpha\colon G \times X \to X$ такой, что для любой k-алгебры A отображение $\alpha(A)\colon G(A) \times X(A) \to X(A)$ является (левым) действием группы $G(A)$ на множестве $X(A)$. Пусть $g \in G(A)$, $x \in X(A)$. Вместо $\alpha(A)(g, x)$ мы обычно пишем просто gx. **Правое действие** определяется аналогично. Пусть k' — k-алгебра. Действие G на k-функторе X индуцирует естественным образом действие $G_{k'}$ на $X_{k'}$.

Для действия G на X положим $X^G(k) = \{x \in X(k) \mid gx = x \text{ для всех } g \in G(A) \text{ и для всех } A\}$. Теперь можно определить **функтор неподвижных точек**:

$$X^G(A) = (X_A)^{G_A}(A) = \{x \in X(A) \mid gx = x \text{ для всех } g \in G(A') \text{ и для всех } A\text{-алгебр } A'\}$$

Пусть Y — подфунктор X. Можно определить его стабилизатор в G

$$\operatorname{Stab}_G(Y)(A) = \{g \in G(A) \mid gY(A') \subset Y(A') \text{ для всех } A\text{-алгебр A'}\}$$

и централизатор

$$\operatorname{Cent}_G(Y)(A) = \{g \in G(A) \mid gy = y \text{ для всех } y \in Y(A') \text{ и всех } A\text{-алгебр } A'\}.$$

Функторы $\operatorname{Stab}_G(Y)$ и $\operatorname{Cent}_G(Y)$ являются подгрупповыми функторами в G.

Действие G на X определяет морфизм $\gamma\colon G \to \mathfrak{Mor}(X, X)$, сопоставляющее каждому $g \in G(A)$ морфизм $X_A \to X_A$, заданный действием g. Для любого подфунктора Y в X ограничением можно получить морфизм $\gamma_Y\colon G \to \mathfrak{Mor}(Y, X)$. Очевидно, что

$$\operatorname{Stab}_G(Y) = \gamma_Y^{-1}\,\mathfrak{Mor}(Y, Y).$$

Пусть $\varphi\colon G \to \mathfrak{Mor}(Y, X \times X)$ — морфизм, сопоставляющий каждому g морфизм $y \mapsto (gy, y)$; D_X — диагональный подфунктор в $X \times X$. Тогда

$$\operatorname{Cent}_G(Y) = \varphi^{-1}\,\mathfrak{Mor}(Y, D_X).$$

Пусть $\psi\colon X \to \mathfrak{Mor}(G, X \times X)$ — морфизм, сопоставляющий каждому x морфизм $g \mapsto (gx, x)$. Тогда

$$X^G = \psi^{-1}\,\mathfrak{Mor}(G, D_X).$$

По лемме 13 теперь

- Если Y замкнут в X и является локально свободной схемой над k, то $\mathrm{Stab}_G(Y)$ замкнут в G;

- Если Y — локально свободная k-схема и диагональ D_X замкнута в $X \times X$, то $\mathrm{Cent}_G(Y)$ замкнут в G;

- Если G локально свободная и диагональ D_X замкнута в $X \times X$, то X^G замкнут в X.

Функтор X называется **отделимым**, если D_X замкнут в $X \times X$. Любая аффинная схема является отделимой.

Если $X = G$ и G действует сопряжением, $\mathrm{Stab}_G(Y)$ обычно называется **нормализатором** Y и обозначается через $N_G(Y)$. Более того, мы обычно пишем $C_G(Y)$ вместо $\mathrm{Cent}_G(Y)$ и $Z(G)$ вместо $C_G(G)$ — это **центр** G.

Пусть k' — k-алгебра, являющаяся алгебраически замкнутым полем. Предположим, что схема $X_{k'}$ алгебраическая и отделимая (схема называется **алгебраической**, если ее можно покрыть конечным числом открытых аффинных подсхем, алгебраических в старом смысле — то есть, спектров конечно представимых алгебр над k). Тогда имеется биекция между замкнутыми приведенными подфункторами $X_{k'}$ и замкнутыми подмножествами $X(k')$. Если теперь Y — замкнутый подфунктор X такой, что $Y_{k'}$ приведен, то $\mathrm{Stab}_G(Y)(k') = \mathrm{Stab}_{G(k')}(Y(k'))$, $\mathrm{Cent}_G(Y)(k') = \mathrm{Cent}_{G(k')}(Y(k'))$.

Пусть G действует на k-групповом функторе H так, что каждая $G(A)$ индуцирует автоморфизм группы $H(A)$. Тогда можно определить **полупрямое произведение** $G \ltimes H$, где $(G \ltimes H)(A)$ — обычное полупрямое произведение $G(A)$ на $H(A)$. Заметим, что как k-функтор $G \ltimes H$ изоморфен $G \times H$.

Если H, N — подгрупповые функторы в G и H нормализует N (то есть, каждая $H(A)$ нормализует $N(A)$), то можно определить $H \ltimes N$ и гомоморфизм $\varphi\colon H \ltimes N \to G$ так: $(h, n) \mapsto hn$ для всех $h \in H(A)$, $n \in N(A)$ и для всех A. Его ядро изоморфно $H \cap N$ ($h \mapsto (h, h^{-1})$). Если φ — изоморфизм, мы говорим, что G является полупрямым произведением H и N и пишем $G = H \ltimes N$.

2.1.2 Представления

Пусть G — групповой функтор над k, M — k-модуль. **Представлением** G на M (или **структурой G-модуля на** M) называется действие G на k-функторе M_a ($M_a(A) = M \otimes A$) с помощью A-линейных отображений. Таким образом, для каждого A имеется гомоморфизм групп $G(A) \to \mathrm{End}_A(M \otimes A)^\times$, приводящий к гомоморфизму групповых функторов $G \to \mathrm{GL}(M)$. Очевидным образом определяются гомоморфизмы G-модулей (или G-эквивариантные отображения) из M в M'. Все такие гомоморфизмы образуют k-модуль $\mathrm{Hom}_G(M, M')$.

Например, представление G на k-модуле k — это в точности гомоморфизм групп $G \to \mathrm{GL}_1 = \mathbb{G}_m$, то есть, элемент группы характеров $X(G)$. Для каждого $\lambda \in X(G)$ мы будем обозначать k с таким действием G через k_λ.

Естественным образом структура G-модуля переносится на прямую сумму, тензорное произведение, симметрические и внешние степени G-модулей. Если M — G-модуль, который является конечно порожденным проективным над k, то M^* снабжается естественной структурой G-модуля. Поскольку $M^* \otimes M' \cong \mathrm{Hom}(M, M')$ для всякого k-модуля M', то и $\mathrm{Hom}(M, M')$ является G-модулем. Если M — G-модуль, k' — k-алгебра, то $M \otimes k'$ является $G_{k'}$-модулем.

Пусть G действует на аффинной схеме X. Тогда на $k[X]$ можно определить структуру G-модуля: если A — k-алгебра, то для $g \in G(A)$ и $f \in k[X] \otimes A = A[X_A]$ определим $gf \in A[X_A]$ так: $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$ для левого действия или $f(xg)$ для правого действия, для всех $x \in X(A') = X_A(A')$ и для всех A-алгебр A'. В частности, для действия G на себе левыми (или правыми) сдвигами получаем **левое** (или **правое**) представление G на $k[G]$. Соответствующие гомоморфизмы $G \to \mathrm{GL}(k[G])$ мы будем обозначать через ρ_l и ρ_r. Действие G на себе сопряжение также порождает представление G на $k[G]$, называемое **перестановочным**.

2.1.3 Комодули

Пусть G — групповая схема над k, M — G-модуль. Тогда $\mathrm{id}_{k[G]} \in G(k[G]) = \mathrm{End}_k(k[G])$ действует на $M \otimes k[G]$, откуда получаем k-линейное отображение $\Delta_M \colon M \to M \otimes k[G]$: $\Delta_M(m) = \mathrm{id}_{k[G]}(m \otimes 1)$ для всех $m \in M$. Отображение Δ_M называется **комодульным отображением** G-модуля M. По нему полностью определяется представление G на M: для любой k-алгебры A и для любого $g \in G(A) = \mathrm{Hom}_k(k[G], A)$ имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
G(k[G]) \times (M \otimes k[G]) \arrow[r] \arrow[d, "G(g)\times(\mathrm{id}_M \otimes g)"'] & M \otimes k[G] \arrow[d, "\mathrm{id}_M \otimes g"] \\
G(A) \times (M \otimes A) \arrow[r] & M \otimes A
\end{tikzcd}$$

Действие элемента g на $M \otimes A$ — это A-линейное отображение $M \otimes A \to M \otimes A$. Оно определяется своим ограничением на элементы вида $m \otimes 1 \in M \otimes A$. Из диаграммы видно, что $g(m \otimes 1) = (\mathrm{id}_M \otimes g)\Delta_M(m)$. Таким образом, если $\Delta_M(m) = \sum_{i=1}^r m_i \otimes f_i$, то $g(m \otimes 1) = \sum_{i=1}^r m_i \otimes f_i(g)$.

Поскольку группа $G(A)$ действует на каждом $M \otimes A$, диаграммы

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Delta_M"] \arrow[d, "\Delta_M"'] & M \otimes k[G] \arrow[d, "\mathrm{id}_M \otimes \Delta_G"] \\
M \otimes k[G] \arrow[r, "\Delta_M \otimes \mathrm{id}_{k[G]}"] & M \otimes k[G] \otimes k[G]
\end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Delta_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & M \otimes k[G] \arrow[d, "\mathrm{id}_M \otimes \varepsilon_G"] \\
M \arrow[r, "\cong"] & M \otimes k
\end{tikzcd}$$

коммутативны. **Комодулем** над алгеброй Хопфа $k[G]$ называется k-модуль M вместе с линейным отображением $\Delta_M \colon M \to M \otimes k[G]$, для которого эти две диаграммы коммутативны. **Гомоморфизм** комодулей — это линейное отображение $\varphi \colon M \to M'$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Delta_M"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \otimes k[G] \arrow[d, "\varphi \otimes \mathrm{id}_{k[G]}"] \\
M' \arrow[r, "\Delta_{M'}"] & M' \otimes k[G]
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Мы построили функтор из категории G-модулей в категорию $k[G]$-комодулей. Обратно, из каждого $k[G]$-комодуля можно получить G-модуль по указанной выше формуле. Поэтому категории G-модулей и $k[G]$-комодулей эквивалентны.

Если G действует на аффинной схеме X, то $k[X]$ естественным образом превращается в G-модуль. В частности, если $X = G$ действует на себе правым умножением, то соответствующее комодульное отображение равно Δ_G. Для левого умножения комодульное отображение равно $tw \circ (S_G \otimes \mathrm{id}_{k[G]}) \circ \Delta_G$, где tw — естественный изоморфизм, меняющий порядок сомножителей в тензорном произведении. Для действия группы на себе сопряжением комодульное отображение равно $t \circ (\mathrm{id}_{k[G]} \otimes \Delta_G) \circ \Delta_G$, где $t(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3) = f_2 \otimes S_G(f_1)f_3$.

2.1.4 Подмодули

Пусть G — групповой функтор над k, M — G-модуль. Если k — поле, можно определить подмодуль M как подпространство N в M такое, что $N \otimes A$ устойчиво относительно $G(A)$ для любой k-алгебры A. При этом условии N сам является G-модулем. Для произвольного k это не вполне работает, поскольку отображение $N \otimes A \to M \otimes A$, индуцированное вложением $N \to M$, не обязано быть инъективным для всех A. Оно будет инъективным, например, если N является прямым слагаемым M. Подмодуль N в M называется **чистым**, если $N \otimes R \to M \otimes R$ инъективно для любого R; тогда N_a является подфунктором M_a.

Чистые подмодули образуют довольно узкий класс, и не все ядра и образы гомоморфизмов в него входят. Поэтому мы определим **подмодуль** G-модуля M так: это k-подмодуль N в M, снабженный собственной структурой G-модуля так, что вложение $N \to M$ (точнее, индуцированное им отображение $N_a \to M_a$ является гомоморфизмом G-модулей. В этом случае и M/N снабжается естественной структурой G-модуля за счет точной последовательности $G(A)$ модулей $N \otimes A \to M \otimes A \to (M/N) \otimes A \to 0$ для любой k-алгебры A. M/N называется **фактор-модулем** M по N.

Неудобство этого определения подмодуля состоит в том, что данный k-подмодуль N в M может обладать несколькими структурами G-модуля, превращающими его в несколько разных G-подмодулей. Для того, чтобы избежать таких ситуаций, мы наложим дополнительные условия на группу. Аффинная схема X над k называется **плоской**, если $k[X]$ является плоским k-модулем. Групповая схема называется плоской, если она является плоской аффинной схемой. Это свойство сохраняется при замене базы.

Пусть теперь G — плоская групповая схема над k. Если N — подмодуль G-модуля M, то $N \otimes k[G]$ является подмодулем в $M \otimes k[G]$, устойчивым относительно действия $G(k[G])$. Тогда $\Delta_M(N) \subset N \otimes k[G]$ и $\Delta_N = (\Delta_M)|_N$. Поскольку действие восстанавливается из $k[G]$, структура G-модуля на N единственна. Поэтому имеется соответствие между G-подмодулями в M и k-подмодулями, удовлетворяющими этим двум условиям.

С этим определением легко проверить, что для плоской групповой схемы G ядро и образ гомоморфизма G-модулей являются G-подмодулями; пересечение и сумма подмодулей являются подмодулями. В категории G-модулей существуют инъективные пределы.

2.1.5 Неподвижные точки

Пусть G — групповая схема над k, M — G-модуль. Положим $M^G = \{m \in M \mid g(m \otimes 1) = m \otimes 1$ для всех $g \in G(A)$ и всех $A\}$. Это k-подмодуль в M, его элементы называются **неподвижными точками** G на M. G-модуль M называется **тривиальным**, если $M = M^G$. Связь с определением неподвижных точек действия группы на множестве такова: $M^G = (M_a)^G(k)$. Переходя к общей точке $g = \mathrm{id}_{k[G]} \in G(k[G])$, получаем $M^G = \{m \in M \mid \Delta_M(m) = m \otimes 1\}$.

Пусть k' — k-алгебра, которая является плоским k-модулем. M^G является ядром $\Delta_M - \mathrm{id}_M \otimes 1$, поэтому $(M \otimes k')^{G_{k'}} = m^G \otimes k'$. К примеру, если k — поле, то $(M_a)^G = (M^G)_a$.

Если $\varphi\colon M \to M'$ — гомоморфизм G-модулей, то $\varphi(M^G) \subseteq (M')^G$, поэтому $M \mapsto M^G$ является функтором из категории G-модулей в категорию k-модулей, он называется **функтором неподвижных точек** (относительно G). Нетрудно видеть, что он аддитивен и (для плоской G) точен слева. Кроме того, он коммутирует с прямыми суммами, пересечениями подмодулей, и прямыми пределами.

Например, если $k[G]$ рассмотреть как G-модуль посредством левого или правого регулярного представления, получим, что $k[G]^G = k$.

2.2 Ассоциированные пучки и фактор-схемы

2.2.1 Определение фактор-схемы

Для групповой схемы G над k и ее замкнутой групповой подсхемы H мы хотим определить фактор G/H. Функтор $A \mapsto G(A)/H(A)$ не подходит на эту роль, поскольку он может не являться схемой. Поэтому мы дадим универсальное определение факторов (в более общей ситуации), а потом перейдем к конструкции.

Пусть групповая схема G над k действует на схеме X над k. **Фактор-схема** X по G — это пара (Y, π), где Y — схема, и $\pi\colon X \to Y$ — морфизм, постоянный на G-орбитах, и такой, что для любого морфизма $f\colon X \to Y'$ схем, постоянного на G-орбитах, существует единственный морфизм $f'\colon Y \to Y'$, для которого $f' \circ \pi = f$. Постоянность на G-орбитах морфизма π означает, что каждое $\pi(A)\colon X(A) \to Y(A)$ постоянно на $G(A)$-орбитах.

Переформулируем это определение. Пусть G действует на X справа. Рассмотрим морфизмы $\alpha, \alpha'\colon X \times G \to X$: $\alpha(x, g) = xg$ и $\alpha'(x, g) = x$. Морфизм $f\colon X \to Y'$ постоянен на G-орбитах если и только если $f \circ \alpha = f \circ \alpha'$. Таким образом, фактор-схема X по G — это коуравнитель пары (α, α') в категории схем над k.

2.2.2 fppf-топология

С помощью универсального свойства можно определить факторы по действиям групповых схем не в категории схем над k, а в некоторых надкатегориях. К примеру, фактор в категории всех k-функторов — это упоминавшийся выше функтор $A \mapsto X(A)/G(A)$. Если бы мы нашли функтор из категории k-функторов в категорию схем над k, левый сопряженный к забывающему, то его применение к поточечному фактору $A \mapsto X(A)/G(A)$ дало бы фактор в категории схем. Однако, такого функтора не существует. Мы заменим категорию схем над k на другую, несколько бо́льшую категорию, для которой такой левый сопряженный функтор существует.

Напомним, что по определению любая схема является локальным функтором, то есть, для схемы X сопоставление $Y \mapsto \mathrm{Mor}(Y, X)$ является пучком. Точнее, если (Y_j) — открытое покрытие Y, то согласованный набор $\alpha_j \in \mathrm{Mor}(Y_j, X)$ можно единственным образом склеить в морфизм $\alpha \in \mathrm{Mor}(Y, X)$. Открытые покрытия определялись с помощью топологии Зариского. Можно рассматривать другие обобщения понятия топологии (топологии Гротендика), в которых некоторые морфизмы (уже не обязательно подфункторы) объявляются *открытыми*, и выделяются некоторые наборы открытых морфизмов, образующие *покрытия*. Мы рассмотрим fppf-топологию (fidèlement plate de présentation finie, по-русски — строго плоскую топологию), и k-функторы, обладающие свойствами пучков в этой топологии, будем называть пучками.

Достаточно определить открытые покрытия аффинных схем аффинными схемами. Пусть R — k-алгебра. **fppf-открытое покрытие** алгебры R — это конечный набор $R_1, R_2, \dots, R_n$ R-алгебр такой, что каждая R_i является конечно представимой R-алгеброй и $R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ является строго плоским R-модулем. Заметим, что $R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ является строго плоской над R тогда и только тогда, когда каждая R_i является плоским R-модулем и $\mathrm{Spec}(R)$ является объединением образов всех $\mathrm{Spec}(R_i)$.

Если $f \in R$, то R-алгебра R_f является конечно представимой, поскольку $R_f \cong R[T]/(Tf-1)$, и плоским R-модулем. Если $f_1, f_2, \dots, f_n \in R$ порождают единичный идеал в R, то $\prod_{i=1}^n R_{f_i}$ является строго плоской R-алгеброй (см. [B, II, §5, Предложение 3]), поэтому R_{f_i} образуют fppf-открытое покрытие R.

2.2.3 Пучки

k-функтор X называется **пучком**, если для каждой k-алгебры R и для каждого fppf-открытого покрытия $R_1, R_2, \dots, R_n$ алгебры R последовательность

$$X(R) \longrightarrow \prod_i X(R_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} X(R_i \otimes_R R_j) \tag{3}$$

является точной (отображения здесь индуцированы структурными гомоморфизмами очевидным образом)

Для любых k-алгебр $R_1, R_2, \dots, R_n$ мы можем рассмотреть каждую R_i как алгебру над $R = \prod_{i=1}^n R_i$. Очевидно, что алгебры R_i образуют строго плоское покрытие R. При этом $R_i \otimes_R R_j = 0$ для $i \neq j$, поэтому точность последовательности (3) в этом случае означает, что $X(R_1 \times \dots \times R_n) \cong X(R_1) \times \dots \times X(R_n)$ (изоморфизм индуцирован проекциями). Иными словами, если X является пучком, то X коммутирует с произведениями.

Одна R-алгебра R' образует fppf-открытое покрытие R тогда и только тогда, когда она является строго плоским R-модулем и конечно представимой R-алгеброй. Мы будем называть такую алгебру fppf-R-алгеброй. Для нее из точности (3) следует, что последовательность

$$X(R) \longrightarrow X(R') \rightrightarrows X(R' \otimes_R R')\ , \tag{4}$$

если X является пучком. Мы вывели из определения пучка два класса частных случаев. Оказывается, достаточно требовать их выполнения для того, чтобы функтор был пучком.

Лемма 14. *k-функтор X является пучком тогда и только тогда, когда он коммутирует с произведениями и последовательность (4) точна для любой k-алгебры R и fppf-R-алгебры R'.*

Доказательство. Мы только что доказали следствие в одну сторону; для обратного применим (4) к $R' = \prod_i R_i$, и свойство коммутирования с произведениями — к $\prod_i R_i$ и $\prod_i R_i \otimes_R \prod_j R_j$. □

Как мы знаем, если $f_1, \dots, f_n \in R$ порождают единичный идеал в R, то алгебры R_{f_i} образуют fppf-открытое покрытие алгебры R. Можно отождествить $R_{f_i} \otimes_R R_{f_j}$ с $R_{f_i f_j}$; получаем, что каждый пучок является локальным функтором.

Пусть R' — строго плоская R-алгебра. Покажем, что имеется точная последовательность

$$0 \to R \to R' \to R' \otimes_R R',$$

где $R \to R'$ — структурный гомоморфизм, а отображение $R' \to R' \otimes_R R'$ задается формулой $a \mapsto a \otimes 1 - 1 \otimes a$. Действительно, в силу строгой плоскости R' достаточно показать точность последовательности $0 \to R \otimes_R R' \to R' \otimes_R R' \to R' \otimes_R R' \otimes_R R'$. Последнее отображение посылает $a \otimes a'$ в $a \otimes 1 \otimes a' - 1 \otimes a \otimes a'$. Если образ $a \otimes a'$ равен 0, то $0 = a \otimes a' - 1 \otimes aa'$, поэтому $a \otimes a'$ лежит в образе предыдущего отображения.

Точность указанной последовательности можно также переформулировать как точность последовательности

$$R \longrightarrow R' \rightrightarrows R' \otimes_R R'\ , \tag{5}$$

где два отображения справа — это $a \mapsto a \otimes 1$ и $a \mapsto 1 \otimes a$. Из точности функтора $\mathrm{Hom}_k(A, -)$ теперь следует, что аффинная схема $\mathrm{Sp}_k A$ над k является пучком. Можно доказать, что любая схема над k является пучком. Вообще, для всякого локально окольцованного пространства X функтор $\mathfrak{S}X$ является пучком; действительно, $\mathfrak{S}X$ очевидным образом коммутирует с произведениями, а второе условие из предыдущей леммы вытекает из точности последовательности

$$\mathrm{Spec}(B \times_A B) \rightrightarrows \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A) ,$$

которая получается применением анти-эквивалентности между k-алгебрами и аффинными «схемами» над k к последовательности 5.

Пусть M — k-модуль, k' — строго плоская k-алгебра. Аналогичное рассуждение показывает, что имеется точная последовательность

$$0 \to M \to M \otimes k' \to M \otimes k' \otimes k'$$

с отображениями $m \mapsto m \otimes 1$ и $m \otimes b \mapsto m \otimes b \otimes 1 - m \otimes 1 \otimes b$. Применяя это рассуждение ко всем модулями $M \otimes A$, получаем, что функтор M_a является пучком для всякого k-модуля M. Очевидно, что если k-функтор X является пучком и k' — k-алгебра, то $X_{k'}$ является пучком.

2.2.4 Пухлые подфункторы

По любому k-функтору X можно естественным образом построить k-пучок $\tilde{X}$ (называемый **ассоциированным пучком**) вместе с морфизмом $i\colon X \to \tilde{X}$ так, что для любого k-пучка F отображение $f \mapsto f \circ i$ является биекцией $\mathrm{Mor}(\tilde{X}, F) \to \mathrm{Mor}(X, F)$. Таким образом, функтор $X \mapsto \tilde{X}$ из категории k-функторов в категорию k-пучков является левым сопряженным к забывающему функтору. Эта конструкция является аналогом конструкции пучка, ассоциированного с предпучком.

Для построения ассоциированного пучка нам необходимо ввести следующее понятие. Подфунктор Y функтора X называется **пухлым** (в X), если для всякой k-алгебры A и для всякого $\alpha \in X(A)$ существует fppf-открытое покрытие (B_i) алгебры A такое, что все образы α_{B_i} элемента α в $X(B_i)$ лежат в $Y(B_i)$.

Нетрудно проверить, что прообраз пухлого подфунктора является пухлым, и отношение «пухлый в» является транзитивным (нужно объединить fppf-открытые покрытия алгебр, покрывающих A). Кроме того, пересечение пухлых подфункторов является пухлым.

Опишем пухлые подфункторы аффинных схем.

Утверждение 3. *Пусть A — k-алгебра; подфунктор Y в $\mathrm{Sp}(A)$ является пухлым тогда и только тогда, когда существует fppf-открытое покрытие (B_i) алгебры A такое, что канонические морфизмы $\mathrm{Sp}(B_i) \to \mathrm{Sp}(A)$ пропускаются через Y.*

Доказательство. Если Y является пухлым, рассмотрим общую точку $\alpha = \mathrm{id}_A \in (\mathrm{Sp}(A))(A)$. Пусть (B_i) — fppf-открытое покрытие из определения пухлого подфунктора. Элемент $\alpha_{B_i} \in (\mathrm{Sp}(A)(B_i) = \mathrm{Hom}(A, B_i)$ совпадает со структурным гомоморфизмом $A \to B_i$ и содержится в $Y(B_i) = \mathrm{Mor}(\mathrm{Sp}(B_i), Y)$. Это и означает, что $\alpha_{B_i}\colon \mathrm{Sp}(B_i) \to \mathrm{Sp}(A)$ пропускается через Y. Обратно, если (B_i) — покрытие из условия предложения, для каждого морфизма k-алгебр $\varphi\colon A \to C$ можно рассмотреть набор $(C_i = C \otimes_A B_i)$, являющийся покрытием алгебры C. Тогда композиция $\varphi_{C_i}\colon A \to C \to C_i$ пропускается через B_i, поэтому φ_{C_i} лежит в образе $(\mathrm{Sp}\, B_i)(C_i)$ в $(\mathrm{Sp}\, A)(C_i)$ и, кроме того, лежит в $Y(C_i)$. □

Следствие 5. *Если A — k-алгебра и алгебраически замкнутое поле, всякий пухлый подфунктор $\mathrm{Sp}(A)$ совпадает с $\mathrm{Sp}(A)$.*

Доказательство. Пусть Y — пухлый подфунктор $\mathrm{Sp}(A)$; в силу предыдущего предложения найдется *одна* R-алгебра конечного типа B такая, что $\mathrm{Sp}(B) \to \mathrm{Sp}(R)$ пропускается через Y (поскольку $\mathrm{Spec}(A)$ состоит из одной точки, из fppf-открытого покрытия можно выбрать одну алгебру). Для максимального идеала $\mathfrak{m}$ в B фактор-алгебра $B/\mathfrak{m}$ изоморфна R, поэтому композиция $\mathrm{Sp}(B/mfm) \to \mathrm{Sp}(B) \to Y \to \mathrm{Sp}(R)$ является изоморфизмом. Значит, $Y = \mathrm{Sp}(R)$. □

Рассмотрим k-алгебру A и набор A-алгебр (B_i). Обозначим через $\psi_i\colon \mathrm{Sp}(B_i) \to \mathrm{Sp}(A)$ канонические морфизмы, через T прямую сумму $\mathrm{Sp}(B_i)$ в категории k-функторов и через $\psi\colon T \to \mathrm{Sp}(A)$ морфизм, индуцированный набором ψ_i. Морфизм ψ индуцирует морфизм $\overline{\psi}\colon T \to \mathrm{Im}(\psi)$, и последовательность k-функторов

$$T \times_{\mathrm{Sp}(A)} T \rightrightarrows T \xrightarrow{\overline{\psi}} \mathrm{Im}(\psi)$$

точна. При этом $T \times_{\mathrm{Sp}(A)} T$ — это просто прямая сумма $\coprod_{i,j}(\mathrm{Sp}(B_i) \times_{\mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Sp}(B_j)$, которая в свою очередь изоморфна $\coprod_{i,j} \mathrm{Sp}(B_i \otimes_A B_j)$. Применяя к этой последовательности функтор $X(-) \cong \mathrm{Mor}(\mathrm{Sp}(-), X)$, получаем точную последовательность

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Im}(\psi), X) \longrightarrow \prod_i X(B_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} X(B_i \otimes_A B_j)\ .$$

Из определения пучка теперь видно, что X является пучком тогда и только тогда, когда для всякой k-алгебры A и для всякого fppf-открытого покрытия (B_i) любой морфизм функторов $\varphi\colon \mathrm{Im}(\psi) \to X$ единственным образом продолжается на $\mathrm{Sp}(A)$ (здесь нужно заметить, что для fppf-открытого покрытия (B_i) подфунктор $\mathrm{Im}(\psi)$ в $\mathrm{Sp}(A)$ является пухлым). Более того, верно следующее утверждение.

Утверждение 4. *Пусть X — k-функтор. X является пучком тогда и только тогда, когда для любого k-функтора Y и любого пухлого подфунктора Z в Y всякий морфизм $\varphi\colon Z \to X$ однозначно продолжается на Y.*

Доказательство. Приведенное выше утверждение показывает, что если морфизмы в X продолжаются с пухлого подфунктора на функтор, то X является пучком. Обратно, если X пучок, нам нужно по алгебре A и элементу $\alpha \in Y(A)$ построить соответствующий ему элемент $\alpha' \in X(A)$. Определение пухлости Z в Y означает, что найдется fppf-открытое покрытие (B_i) алгебры A такое, что α_{B_i} лежит в $Z(B_i)$ для всех i. Заметим, что $(\alpha_{B_i})_{B_i \otimes_A B_j} = \alpha_{B_i \otimes_A B_j} = (\alpha_{B_j})_{B_i \otimes_A B_j}$. Поэтому в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_i Z(B_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\prod_i \varphi(B_i)"'] & \prod_{i,j} Z(B_i \otimes_A B_j)) \arrow[d, "\prod_{i,j} \varphi(B_i \otimes_A B_j"] \\
X(A) \arrow[r, "u"] & \prod_i X(B_i) \arrow[r, shift left, "v"] \arrow[r, shift right, "w"'] & \prod_{i,j} X(B_i \otimes_A B_j)
\end{tikzcd}$$

морфизмы v и w совпадают на наборе $(\varphi(\alpha_{B_i})) \in \prod_i X(B_i)$. Поэтому такой набор является образом единственного $\alpha' \in X(A)$. Нетрудно показать, что построенное продолжение φ на Y единственно. □

2.2.5 Конструкция ассоциированного пучка

Последнее предложение дает полезную переформулировку определения пучка: нам нужно, чтобы каждый морфизм в X продолжался с пухлого подфунктора на функтор. Поэтому естественно попытаться определить ассоциированный пучок путем добавления всех нужных продолжений.

Теорема 6. *Вложение категории пучков в качестве полной подкатегории в категорию k-функторов обладает сопряженным слева функтором, который коммутирует с проективными пределами.*

Доказательство. Мы не будем приводить полного доказательства этой теоремы; см. [DG, III,§1, 1.8–1.12]. Укажем лишь конструкцию и наметим план доказательства.

Итак, для каждого k-функтора X и k-алгебры A положим $(\mathfrak{L}X)(A) = \varinjlim \mathrm{Mor}(Y, X)$, где Y пробегает направленное множество пухлых подфункторов $\mathrm{Sp}(A)$. В силу доказанного описания пухлых подфункторов аффинной схемы это равносильно построения индуктивного предела ядер двойных морфизмов $\prod_i X(B_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} X(B_i \otimes_A B_j)$ по всем fppf-открытым покрытиям (B_i) алгебры A.

Несложно определить естественный морфизм $j_X \colon X \to \mathfrak{L}X$, сопоставляющий элементу $\alpha \in X(A)$ соответствующий ему по Йонеде морфизм $\mathrm{Sp}(A) \to X$, рассматриваемый как элемент $(\mathfrak{L}X)(A)$. Положим теперь $\tilde{X} = \mathfrak{L}(\mathfrak{L}X)$ и $i = j_{\mathfrak{L}X} \circ j_X \colon X \to \tilde{X}$. Мы утверждаем, что отображение $\mathrm{Mor}(i, F) \colon \mathrm{Mor}(\tilde{X}, F) \to \mathrm{Mor}(X, F)$ является биекцией; более того, $\mathrm{Mor}(j_X, X)$ является биекцией для любого X. Также мы утверждаем, что если j_X мономорфно, то $\mathfrak{L}X$ является пучком, и что $j_{\mathfrak{L}X} \colon \mathfrak{L}X \to \mathfrak{L}(\mathfrak{L}X) = \tilde{X}$ — мономорфизм. Из этого следует, что $\tilde{X}$ является пучком. После этого несложно показать, что $\tilde{X}$ коммутирует с проективными пределами (ключевое соображение состоит в том, что индуктивные пределы коммутируют с проективными). □

Теперь мы можем определить фактор X/G для действия аффинной групповой схемы G на схеме X как пучок, ассоциированный с поточечным фактором $R \mapsto X(R)/G(R)$. Можно изучать различные условия, при которых фактор будет схемой, и получать более простые описания фактор-схемы. Приведем без доказательства пару таких результатов.

Утверждение 5. *Пусть X — аффинная схема, G — аффинная групповая схема над k, свободно действующая на X. Если $k[G]$ является конечно порожденным проективным k-модулем, то X/G — аффинная схема, изоморфная $\mathrm{Sp}_k(k[X]^G)$.*

Доказательство. См. [DG, III, § 2, 4.* и § 1, 2.10]. □

Утверждение 6. *Пусть X — подфунктор k-пучка Y, коммутирующий с произведениями. Тогда $\tilde{X}(A) = \{x \in Y(A) \mid$ найдется fppf-алгебра B такая, что $x \in X(B)\}$.*

Аффинная групповая схема G, для которой $k[G]$ является конечно порожденным проективным модулем, называется **конечной**.

2.2.6 Пример: PGL_n vs. PSL_n

Пусть $G = \mathrm{GL}_n$ — аффинная групповая схема с алгеброй функций $k[G] = k[\{x_{ij}\}_{i,j=1}^n, (\det(x_{ij}))^{-1}]$; $H = \mathbb{G}_m$. Рассмотрим морфизм $\varphi \colon H \to G$, переводящий элемент $h \in H$ в скалярную матрицу $hE_n \in \mathrm{GL}_n$. Более точно, для каждого R определим $\varphi(R) \colon H(R) \to G(R)$, $h \mapsto hE_n \in \mathrm{GL}_n(R)$. Нетрудно видеть, что это сопоставление функториально и $\varphi(R)$ является гомоморфизмом групп. Поэтому φ является гомоморфизмом аффинных групповых схем. Соответствующий ему морфизм алгебр Хопфа $\varphi^\sharp \colon k[G] \to k[H] = k[t, t^{-1}]$ выглядит так: $x_{ii} \mapsto t$, $x_{ij} \mapsto 0$ при $i \neq j$. Морфизм φ инъективен и , так что можно отождествить H с групповым подфунктором в G.

Аффинную групповую схему SL_n также можно рассматривать как групповой подфунктор в G. Вложению $\mathrm{SL}_n \to \mathrm{GL}_n$ соответствует факторизация алгебры Хопфа $k[G]$ по идеалу, порожденному $\det(x_{ij})$. Нетрудно видеть, что пересечение подфункторов SL_n и H в GL_n

состоит из скалярных матриц с определителем 1, то есть, изоморфно групповой схеме μ_n корней степени n из 1.

Наша ближайшая цель — попытаться профакторизовать G по H (или SL_n по μ_n). Фактор G/H обозначается через PGL_n, а SL_n/μ_n (иногда) обозначается через PSL_n. На самом деле эти два фактора совпадают, так что предпочтительнее использовать обозначение PGL_n для обоих. На этом примере мы увидим, что сопоставление $R \mapsto G(R)/H(R)$ не является схемой, так что значение схемного фактора G/H на кольце R не всегда совпадает с $G(R)/H(R)$. Иными словами, $\mathrm{PGL}_n(R)$ не всегда совпадает с $\mathrm{GL}_n(R)/R^*$ (и, тем более, не всегда совпадает с $\mathrm{SL}_n(R)/\mu_n(R)$). При этом $\mathrm{SL}_n(R)/\mu_n(R) \subseteq \mathrm{GL}_n(R)/R^* \subseteq \mathrm{PGL}_n(R)$. Во втором включении равенство имеет место тогда и только тогда, когда группа Пикара $\mathrm{Pic}(R)$ не имеет нетривиального 2-кручения. В частности, для локального кольца R группа Пикара тривиальна, поэтому для него PGL_n совпадает с поточечным фактором $\mathrm{GL}_n(R)/R^*$. Второе включение может быть строгим уже для локального кольца, если $R^n \neq R$.

Посмотрим на ситуацию с точки зрения алгебр Хопфа: алгебра функций фактор-группы SL_n/μ_n должна быть подалгеброй Хопфа в $k[\mathrm{SL}_n]$, удовлетворяющей некоторому универсальному свойству. Нетрудно понять, что это в точности множество тех многочленов от x_{ij}, в которых каждый моном имеет общую степень, делящуюся на n. Обозначим эту алгебру через A. Элемент $\mathrm{PSL}_n(R)$ для кольца R — это гомоморфизм $A \to R$, но он не обязан быть образом элемента из $\mathrm{SL}_n(R)$; то есть, он не обязан продолжаться до гомоморфизма $k[\mathrm{SL}_n] \to R$. Рассмотрим, к примеру, такой гомоморфизм $k[\mathrm{SL}_2] \to \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ для некоторого простого числа p: $x_{11} \mapsto \sqrt{p}$, $x_{22} \mapsto 1/\sqrt{p}$, $x_{12} \mapsto 0$, $x_{21} \mapsto 0$. Образ подалгебры A при этом гомоморфизме лежит в $\mathbb{Q}$, поскольку A состоит из многочленов, в которых все мономы имеют четную степень (нетрудно видеть, что образы всех таких мономов лежат в $\mathbb{Q}$). Поэтому при ограничении этого гомоморфизма на A мы получим $\mathbb{Q}$-точку схемы PSL_2, то есть, элемент $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q})$. Однако наш гомоморфизм не продолжается на $k[\mathrm{SL}_n]$. Иными словами, матрица $\begin{pmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{p} \end{pmatrix}$ лежит в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q})$, хотя и не пропорциональна никакой матрице из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$. Впрочем, она пропорциональна матрице $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, поэтому содержится в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})/\mathbb{Q}^*$. Таким образом, для поля рациональных чисел $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})/\mu_2(\mathbb{Q})$ строго содержится в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})/\mathbb{Q}^* = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$.

Посмотрим теперь на эту ситуацию с геометрической точки зрения. Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ — пучки абелевых групп на X, а $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — гомоморфизм пучков. Напомним, что гомоморфизм пучков задается отображениями $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ для каждого открытого $U \subseteq X$, согласованными с отображениями ограничения пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Попытаемся определить ядро и коядро гомоморфизма φ. Нетрудно показать, что сопоставление $U \mapsto \mathrm{Ker}(\varphi(U))$ задает подпучок в $\mathcal{F}$. Положим теперь $\mathcal{I}(U) = \mathrm{Im}(\varphi(U)) \subseteq \mathcal{G}(U)$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{I}$ является подпредпучком в $\mathcal{G}$. Является ли $\mathcal{I}$ пучком? Если $U = \bigcup U_i$ и $t \in \mathcal{I}(U)$ — такое сечение, что $\mathrm{res}^U_{U_i}(t) = 0$, то $t = 0$, поскольку $\mathcal{G}$ является пучком. Далее, пусть $t_i \in \mathcal{I}(U_i)$ — сечения, совпадающие на пересечениях $U_i \cap U_j$. Можно ли их склеить в одно сечение $t \in \mathcal{I}(U) = \mathrm{Im}\,\varphi(U)$? Выберем у каждого t_i есть прообраз $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Если бы можно было склеить s_i в одно сечение $s \in \mathcal{F}(U)$, его образ был бы искомым сечением t. Заметим, что выбор s_i неоднозначен: можно заменить s_i на $s_i + u_i$, где $u_i \in (\mathrm{Ker}\,\varphi)(U)$. Чтобы склеить сечение s, нужно добиться, чтобы s_i были согласованы на всех пересечениях, то есть, $\mathrm{res}^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i + u_i) = \mathrm{res}^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j + u_j)$. Преобразуем это равенство и обозначим $\mathrm{res}^{U_i}_{U_i \cap U_j} = s_{ij}$; получим, что необходимо добиться $s_{ij} = u_j - u_i$. Нетрудно видеть, что $s_{ij} \in (\mathrm{Ker}\,\varphi)(U_i \cap U_j)$ и сечения s_{ij} удовлетворяют равенствам $s_{ji} = -s_{ij}$ и $s_{ij} + s_{jk} + s_{kj}$. Набор таких сечений называется **1-коциклом**, а если можно подобрать $u_i \in (\mathrm{Ker}\,\varphi)(U_i)$ такие, что $s_{ij} = u_j - u_i$, то этот набор назывется **1-кограницей**. Таким образом, вопрос склейки сечений в образе гомоморфизма пучков φ свелся к вопросу про ядро φ: любой ли 1-коцикл является там 1-кограницей. Хорошо известно, что ответ на этот вопрос дает первая группа когомологий $\operatorname{Ker}\varphi$ (в случае PGL это группа когомологий $\mathbb{G}_m$, то есть, группа Пикара кольца). Итак, $\mathcal{I}$ не обязан быть пучком; образом гомоморфизма пучков φ называется пучок, ассоциированный с $\mathcal{I}$. Для его определения нужно формально добавить сечения t, которые будут служить результатами склеек всех согласованных сечений t_i. Поэтому элемент $(\operatorname{Im}\varphi)(U)$ — это не обязательно образ элемента $\mathcal{F}(U)$, но набор элементов $\mathcal{F}(U_i)$ для некоторого покрытия $U = \bigcup U_i$. Совершенно аналогично, элемент фактора $(G/H)(R)$ — это не обязательно образ какого-то элемента $G(R)$, но набор элементов $G(S_i)$ для каких-то R-алгебр S_i. Построение факторов с помощью fppf-топологии говорит нам, что (для достаточно хороших G и H) эти алгебры S_i можно выбирать из определенного класса (fppf-открытые покрытия).

На категории пучков можно вводить другие топологии (fpqc, этальная,…), аналогичным образом определять пучки в этих топологиях и строить пучки, ассоциированные с предпучками. Можно рассматривать построение ассоциированных пучков как частный случай теории спуска; разные топологии включаются в единый контекст с помощью теории стэков.

Список литературы

[B] Н. Бурбаки, *Коммутативная алгебра*, М., Мир, 1971.

[DG] M. Demazure, P. Gabriel. *Groupes algébriques I*, Paris/Amsterdam 1970 (Mason/North-Holland)