Теория категорий*

Александр Лузгарев

13 января 2016 г.

Содержание

1 Первые понятия

1.1 Примеры конкретных категорий

Определение 1.1.1. Категорией называется

- набор **объектов** $(\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{Z}, \ldots)$;

*Конспект лекций спецкурса для магистратуры осени 2015 г.; предварительная версия.

- набор **морфизмов (стрелок)** $f\colon X \to Y$ (где X, Y — объекты);
- задание для каждой пары стрелок вида $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ их **композиции** $g \circ f\colon X \to Z$;
- задание для каждого объекта X **тождественного морфизма** $\mathrm{id}_X\colon X \to X$;

так, что выполняются следующие условия:

- композиция **ассоциативна**: если $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to T$ — морфизмы, то морфизмы $(h \circ g) \circ f$, $h \circ (g \circ f)\colon X \to T$ совпадают;
- тождественный морфизм играет роль **нейтрального** относительно композиции: для любого морфизма $f\colon X \to Y$ выполнено $f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f$.

Замечание 1.1.2. Тот факт, что X является объектом категории $\mathcal{C}$, мы будем обозначать так: $X \in \mathcal{C}$. Иногда полезно более вербозное обозначение: $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Тот факт, что $f\colon X \to Y$ — морфизм категории $\mathcal{C}$, мы будем обозначать так: $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (опуская индекс $\mathcal{C}$, если понятно, о какой категории идет речь). При этом объект X называется **областью** морфизма f (обозначение: $\mathrm{dom} f = X$), а объект Y — **кообластью** морфизма f (обозначение: $\mathrm{cod} f = Y$). Иногда нужно выразить тот факт, что f — морфизм в $\mathcal{C}$, не указывая явно его область и кообласть. Тогда можно писать так: $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$. Обратите внимание, что значок «$\in$» в выражениях $X \in \mathcal{C}$ и $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ имеет совсем не тот же смысл, который он имеет в теории множеств. А именно, объекты категории $\mathcal{C}$ не обязаны образовывать множеств, равно как и морфизмы из X в Y. Пока мы будем игнорировать теоретико-множественные тонкости, связанные с этим, но о них нужно помнить: первый же пример категории, приведенный ниже, в качестве набора объектов имеет *все* множества, и наивная трактовка понятия категории немедленно привела бы нас к «множеству всех множеств» и парадоксу Рассела.

Пример 1.1.3. Самый привычный нам пример категории — категория множеств $\mathfrak{Sets}$. Более точно, объекты $\mathfrak{Sets}$ — это множества, морфизмы (стрелки) — отображения между ними, композиция задается естественным образом (как композиция отображений: если $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ — отображения множеств, то отображение $g \circ f\colon X \to Z$ определяется так: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ для всех $x \in X$), а роль тождественных морфизмов играют тождественные отображения (для каждого множества X можно рассмотреть отображение $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, задаваемое формулой $\mathrm{id}_X(x) = x$ для всех $x \in X$).

Пример 1.1.4. Полезна также категория $\mathfrak{Sets}_{\mathrm{fin}}$ *конечных* множеств и отображений между ними. Часто мы будем опускать определение композиции и тождественных морфизмов; в этом случае подразумевается некоторое *естественное* задание этих данных. Иногда, впрочем, прояснение этих данных (и доказательство ассоциативности композиции и нейтральности тождественного морфизма) может составлять небанальное упражнение.

Пример 1.1.5. Ограничивая рассматриваемые множества и рассматриваемые отображения, можно получить и другие интересные примеры: например, категория конечных множеств и *инъективных* отображений между ними.

Упражнение 1.1.6. *Будет ли это категорией: объекты — множества, стрелки из* A *в* B *— все отображения* $f\colon A \to B$ *такие, что для всех* $b \in B$ *множество* $f^{-1}(b)$ *состоит не более чем из двух элементов?* $f^{-1}(b)$ *конечно?* $f^{-1}(b)$ *бесконечно?*

1.1.7. Следующий важный класс примеров категорий — категории, в которых берутся *множества с дополнительной структурой* в качестве объектов и *отображения, сохраняющие эту структуру* в качестве морфизмов. Например:

- группы и гомоморфизмы групп;
- векторные пространства и линейные отображения;
- графы и гомоморфизмы графов;
- открытые множества $U \subseteq \mathbb{R}$ и непрерывные отображение $f\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}$ между ними;
- топологические пространства и непрерывные отображения;
- дифференциальные многообразия и гладкие отображения;
- подмножества натуральных чисел и частично рекурсивные функции между ними;
- частично упорядоченные множества и монотонные (неубывающие) отображения между ними.

Определение 1.1.8. Рекурсивные функции — это следующие функции $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ нескольких натуральных аргументов:

1. **постоянные** (нуль-арные) функции;
2. унарная функция $S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto k+1$;
3. **проекции** $p_i\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$;
4. **композиции** рекурсивных функций: если $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ рекурсивны, и $g_1, \ldots, g_k\colon \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ рекурсивны, то и функция $h(x_1, \ldots, x_m) = f(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_m))$ рекурсивна.
5. **примитивная рекурсия** рекурсивных функций: если $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ рекурсивна и $g\colon \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ рекурсивна, то и следующим образом заданная функция $h\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ рекурсивна: $h(0, x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k)$; $h(y+1, x_1, \ldots, x_k) = g(y, h(y, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k)$.

Кроме того, разрешим функциям быть *частичными* — то есть, определенными не на $\mathbb{N}^n$, а на некотором подмножестве. Добавим также *минимизации* функций. А именно, если $f\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ — рекурсивная функция, то ее **минимизацией** называется функция $g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ со следующим свойством: $g(x_1, \ldots, x_n) = y$ тогда и только тогда, когда y — наименьшее натуральное число, для которого $f(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Если такого числа не существует, то функция g не определена на данном наборе $(x_1, \ldots, x_n)$ — поэтому g задает функцию из некоторого подмножества $U \subseteq \mathbb{N}^n$ в $\mathbb{N}$. Полученный класс частичных функций, содержащий «исходные функции» (постоянные, функцию S, проекции) и замкнутый относительно взятия композиции, взятия примитивной рекурсии и взятия минимизации, называется классом **частично рекурсивных функций**.

1.2 Отношения и порядки

1.2.1. Все приведенные выше примеры являются **конкретными категориями**: неформально говоря, конкретная категория — это та, объекты которой являются множествами (возможно, с некоторой дополнительной структурой), а морфизмы — некоторыми отображениями (как правило, сохраняющими данную структуру). Приведем несколько примеров категорий, в которых морфизмы не являются отображениями между множествами.

Упражнение 1.2.2. *Рассмотрим теперь следующую категорию $\mathfrak{Rel}$: объекты — множества, морфизмы — бинарные отношения. Напомним, что* ***бинарным отношением*** *между множествами X и Y называется любое подмножество в $X \times Y$. Если $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$ — бинарные отношения, то их* ***композицией*** *называется бинарное отношение $S \circ R \subseteq X \times Z$, заданное следующим образом: $(x, z) \in S \circ R$ тогда и только тогда, когда существует элемент $y \in Y$ такой, что $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in S$. Проверьте, что мы получили категорию (какое отношение играет роль тождественного)?*

Пример 1.2.3. Еще один пример категории, в которой стрелки не являются отображениями: объекты — конечные множества, морфизм из конечного множества X в конечное множество Y — это квадратная матрица из натуральных чисел, столбцы которой пронумерованы элементами множества X, а строки — элементами множества Y. Композиция представляет собой «обычное» произведение матриц, а роль тождественного морфизма играет единичная матрица.

1.2.4. Конечно, как покажут следующие примеры, и объекты категории вовсе не обязаны быть множествами.

Пример 1.2.5. Рассмотрим категорию 1, в которой лишь один объект (назовем его 0) и один морфизм $\mathrm{id}_0 \colon 0 \to 0$. Для задания композиции достаточно положить $\mathrm{id}_0 \circ \mathrm{id}_0 = \mathrm{id}_0$; разумеется, этот морфизм играет роль тождественного морфизма для объекта 0. Тривиально проверяется, что композиция ассоциативна, а тождественный морфизм нейтрален.

Пример 1.2.6. Рассмотрим категорию 2, в которой два объекта (назовем их 0 и 1) и три морфизма $\mathrm{id}_0 \colon 0 \to 0$, $\mathrm{id}_1 \colon 1 \to 1$, $f \colon 0 \to 1$. Для задания композиции нам нужно указать, чему равны морфизмы $\mathrm{id}_0 \circ \mathrm{id}_0$, $\mathrm{id}_1 \circ \mathrm{id}_1$, $f \circ \mathrm{id}_0$ и $\mathrm{id}_1 \circ f$ — но ответ в каждом случае очевиден, если мы хотим, чтобы id_0 и id_1 оказались тождественными морфизмами. Несложно убедить себя, что и в этом случае композиция ассоциативна.

Пример 1.2.7. Рассмотрим категорию 3, в которой три объекта (назовем их 0, 1 и 2) и шесть морфизмов: три тождественных id_0, id_1, id_2, а также $f \colon 0 \to 1$, $g \colon 1 \to 2$, $h \colon 0 \to 2$. Задание композиции в большинстве случаев снова оказывается тривиальным из требования нейтральности тождественных морфизмов, и есть ровно один случай, в котором это не так: нужно указать, чему равна композиция $g \circ f \colon 0 \to 2$. Но у нас есть только один морфизм из 0 в 2, поэтому ничего не остается как положить $g \circ f = h$. После этого можно убедить себя, что композиция окажется ассоциативной.

Пример 1.2.8. Наконец, существует и пустая категория 0, в которой нет ни объектов, ни морфизмов — все условия из определения выполняются для нее по тривиальным причинам.

1.2.9. Один из философских смыслов работы с категориями состоит в том, что мы абстрагируемся от внутренней структуры объектов и обращаем основное внимание на морфизмы между ними. Поэтому понятие категории немыслимо без понятия морфизма между категориями. Такие морфизмы называются *функторами.*

Определение 1.2.10. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ — категории. **Функтором** F из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ называется сопоставление

- каждому объекту X категории $\mathcal{C}$ объекта $F(X)$ категории $\mathcal{D}$;
- каждому морфизму $f \colon X \to Y$ категории $\mathcal{C}$ морфизма $F(f) \colon F(X) \to F(Y)$ категории $\mathcal{D}$;

такое, что

- если $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ — морфизмы категории $\mathcal{C}$, то $F(g \circ f) = F(g) \circ F(g)$;
- если X — объект категории $\mathcal{C}$, то $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.

Пример 1.2.11. Любой **предпорядок** (множество с бинарным отношением, которое рефлексивно и транзитивно) можно рассматривать как категорию. Действительно, пусть X — множество с рефлексивным транзитивным отношением $\leqslant$. Объектами нашей категории будут элементы множества X. Пусть $x, y \in X$. Если $x \leqslant y$, в нашей категории будет ровно один морфизм $x \to y$; если же $x \nleqslant y$, морфизмов из x в y не будет вовсе. Как задать композицию морфизмов? Если $x \to y$, $y \to z$ — морфизмы, то по определению это означает, что $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$. Из транзитивности отношения $\leqslant$ следует, что и $x \leqslant z$. Но это значит, что существует единственный морфизм $x \to z$ — его и объявим композицией наших морфизмов $x \to y$ и $y \to z$. Существование тождественных морфизмов следует из условия рефлексивности отношения $\leqslant$. Ассоциативность композиции очевидна: в нашей категории любые два морфизма из x в y совпадают. Поэтому, если мы смогли написать два морфизма вида $h \circ (g \circ f)$ и $(h \circ g) \circ f$, то они автоматически равны. Таким образом, мы получили категорию, которую мы будем обозначать так же, как и исходное множество: X. Обратно, категория, в которой между любыми двумя объектами не более одного морфизма, задает предпорядок (разумеется, если объекты этой категории вообще образуют множество! однако, мы обещали игнорировать теоретико-множественные тонкости).

Определение 1.2.12. Отношение R называется **антисимметричным**, если из xRy и yRx следует, что $x = y$. Антисимметричный предпорядок называется **частично упорядоченным множеством** (коротко: **частичным порядком**).

Пример 1.2.13. Частичный порядок является предпорядком, и потому, разумеется, тоже задает категорию. Например, для произвольного множества X можно рассмотреть частичный порядок $\subseteq$ на множестве 2^X всех подмножеств множества X.

Упражнение 1.2.14. *Функтор между частичными порядками (рассматриваемыми как категории) — это в точности монотонное отображение (если читатель не знает, что такое монотонное отображение между частичными порядками, то этот факт может служить определением!).*

Пример 1.2.15. Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{O}(X)$ — множество его открытых подмножеств. Они образуют частично упорядоченное множество относительно включения, и потому $\mathcal{O}(X)$ — категория.

Пример 1.2.16. Пусть, как и в предыдущем примере, X — топологическое пространство. Можно ввести предпорядок прямо на точках из X: пусть $x \leqslant y$, если для каждого открытого множества $U \subseteq X$ из $x \in U$ следует, что $y \in U$ (иными словами, y содержится во всех открытых множествах, содержащих x). Тогда x называется **специализацией** точки y, а y — **генерализацией** точки x. Если X удовлетворяет аксиоме отделимости T_1, то этот предпорядок вырождается, но вообще он может быть очень интересным (в алгебраической геометрии, например).

Упражнение 1.2.17. *Пусть X — топологическое пространство. Предпорядок на точках X, описанный в примере 1.2.16, является частичным порядком тогда и только тогда, когда X удовлетворяет аксиоме отделимости T_0 (если читатель не знает, что такое аксиома отделимости T_0, то этот факт может служить определением!).*

Замечание 1.2.18. Вообще, категория конечных частичных порядков изоморфна категории конечных T_0-пространств, а категория всех частичных порядков изоморфна категории T_0 пространств Александрова (топологическое пространство называется **пространством Александрова**, если в нем пересечение любого набора открытых подмножеств открыто).

1.3 Еще примеры

Пример 1.3.1. Пример из логики: рассмотрим **категорию доказательств**, объекты которой — формулы, а морфизмы — формальны выводы одних формул из других в некоторой системе дедуктивного вывода.. Композиция задается очевидным образом: приписывание одного вывода к другому. Тождественный морфизм — пустой вывод, который «ничего не делает» с формулой.

Пример 1.3.2. Пример из программирования: рассмотрим какой-нибудь функциональный язык программирования L, и сопоставим ему следующую категорию: объекты — типы данных языка L, стрелки — вычислимые функции в L («программы»).

Пример 1.3.3. Пусть X — множество. Его можно рассматривать как **дискретную категорию**: ее объекты — элементы x, а стрелки — только тождественные отображения, по одному для каждого $x \in X$ (разумеется, это весьма частный случай частичного порядка).

Пример 1.3.4. Пусть $\mathcal{C}$ — некоторая категория, в которой только один объект: X, и предположим (на всякий случай), что ее морфизмы (которые обязаны идти из X в X) образуют множество. Обозначим его через $\mathrm{Hom}(X, X)$. Определение категории говорит, что на этом множестве задана бинарная операция $\circ$, которая ассоциативна и обладает нейтральным элементом id_X. Это в точности означает, что $\mathrm{Hom}(X, X)$ — **моноид** относительно композиции; мы могли бы *определить* моноид как категорию с одним объектом (если морфизмы в ней образуют множество). Тогда, кстати, несложно определить и **гомоморфизм моноидов**: это в точности функтор между соответствующими категориями (проверьте это!). Все моноиды, как несложно понять, образуют категорию.

Пример 1.3.5. Если теперь $\mathcal{C}$ — произвольная категория, и X — некоторый объект в $\mathcal{C}$, можно рассмотреть множество (если это множество) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ морфизмов из X в X; как и в предыдущем примере, на нем задана бинарная операция композиции $\circ$, превращающая его в моноид.

1.3.6. На категории можно смотреть как на «обощенные частичные порядки» (в которых бывают разные морфизмы между одной и той же парой объектов) и как на «обобщенные моноиды» (в которых бывают разные объекты и морфизмы между ними).

1.4 Изоморфизм

Определение 1.4.1. Морфизм $f\colon X \to Y$ в категории $\mathcal{C}$ называется **изоморфизмом**, если у него есть *двусторонний обратный*, то есть, морфизм $g\colon Y \to X$ такой, что $g \circ f = \mathrm{id}_X$ и $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Нетрудно показать, что если такой морфизм g существует, то он единственный. Поэтому мы часто обозначаем его через f^{-1}.

Примеры 1.4.2. В некоторых конкретных категориях понятие изоморфизма оказывается привычным. Например, иногда изоморфизм групп определяется как *биективный гомоморфизм*, но нетрудно показать, что это определение совпадает с нашим: во-первых, если у отображение есть двусторонне обратное, то это отображение биективно: во-вторых, обратное отображение к биективному гомоморфизму само является гомоморфизмом. Понятия «изоморфизм» и «биективный гомоморфизм» совпадают в категории групп, абелевых групп, коммутативных колец с 1, векторных пространств и линейных отображений.

Упражнение 1.4.3. *В категории частичных порядков «биективный гомоморфизм» не обязан быть изоморфизмом.*

Определение 1.4.4. Категория, в которой любой объект является изоморфизмом, называется **группоидом**. Напомним, что категория с одним объектом называется моноидом; морфизмы такой категории образуют моноид в обычном смысле. Если категория с одним объектом является группоидом, то у каждого морфизма есть двусторонний обратный — это означает, что моноид морфизмов является группой. Поэтому группоид с одним объектом называется **группой**. Нетрудно проверить, что морфизм между группоидами с одним объектом — это в точности гомоморфизм групп в обычном смысле.

Пример 1.4.5. Пусть X — топологическое пространство. Рассмотрим следующую категорию ΠX: ее объекты — точки пространства X, а морфизмы $x \to y$ — классы гомотопности путей из x в y. Напомним, что **путь** из точки $x \in X$ в точку $y \in X$ — это непрерывное отображение $f\colon [0,1] \to X$ такое, что $f(0) = x$ и $f(1) = y$. На множестве всех путей из x в y можно ввести отношение гомотопности: говорят, что пути f и g из точки x в точку y **гомотопны** (обозначение: $f \sim g$), если между ними существует **гомотопия**, то есть, непрерывное отображение $H\colon I \times I \to X$ такое, что $H(t,0) = f(t)$, $H(t,1) = g(t)$ для всех $t \in [0,1]$, и $H(0,s) = x$, $H(1,s) = y$ для всех $s \in [0,1]$. Нетрудно проверить, что это отношение эквивалентности, и возникает фактор-множество всех путей из x в y по этому отношению. Это множество и объявляется множеством $\mathrm{Hom}_{\Pi X}(x,y)$. Композиция двух классов гомотопности путей устроена так: нужно взять по представителю из каждого класса, пройти последовательно эти два пути (в два раза быстрее), и посмотреть на класс гомотопности результата. Разумеется, необходимо проверить, что полученный класс не зависит от выбора представителей, что композиция классов ассоциативна, и что постоянные отображения играют роль тождественных морфизмов. Категория ΠX является группоидом: действительно, для каждого пути f из x в y можно рассмотреть путь f^{-1} из y в x, заданный равенством $f^{-1}(t) = f(1-t)$, и проверить, что их классы взаимно обратны. Этот группоид называется **фундаментальным группоидом** топологического пространства X.

Теорема 1.4.6. *Любая категория, в которой морфизмы образуют множество, изоморфна категории, объекты которой — множества, а морфизмы — отображения между ними.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}$ — категория, морфизмы которой образуют множество. Построим конкретную категорию $\widehat{\mathcal{C}}$ (она будет называться **представлением Кэли** категории $\mathcal{C}$) следующим образом:

- объекты $\widehat{\mathcal{C}}$ — множества вида
$$\widehat{C} = \{f \in \mathcal{C} \mid \mathrm{cod}(f) = C\}$$
для всех $c \in \mathcal{C}$;
- морфизмы $\widehat{\mathcal{C}}$ — отображения вида
$$\widehat{g}\colon \widehat{C} \to \widehat{D}$$
для всех морфизмов $g\colon C \to D$ в $\mathcal{C}$, определяемые следующим образом: для каждого элемента $f\colon X \to C$ в $\widehat{C}$ положим $\widehat{g}(f) = g \circ f$.

Нетрудно проверить, что сопоставление каждому $C \in \mathcal{C}$ объекта $\widehat{C} \in \widehat{\mathcal{C}}$, а каждому морфизму g в $\mathcal{C}$ морфизма $\widehat{g}$ в $\widehat{\mathcal{C}}$ является функтором из $\widehat{\mathcal{C}}$ в $\widehat{\mathcal{C}}$, устанавливающим изоморфизм категорий. □

Упражнение 1.4.7. *Завершите доказательство теоремы 1.4.6.*

Замечание 1.4.8. Теорема 1.4.6 намекает на то, что наивное определение «конкретной категории» бессмысленно. Лучше модифицировать определение так: стрелки $f\colon C \to D$ должны полностью определяться своими композициями с «тестовыми стрелками» $x\colon T \to C$ (то есть, если $fx = gx$ для всех таких x, то $f = g$). Будем говорить, что категория **конкретная**, если это требование выполняется для терминального объекта T.

1.5 Конструкции над категориями

Определение 1.5.1. Пусть $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ — категории. Рассмотрим категорию, объекты которой — пары (C, D) для всех $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$, а морфизмы из (C, D) в (C', D') — пары морфизмов (f, g), где $f\colon C \to C'$ — морфизм в $\mathcal{C}$, а $g\colon D \to D'$ — морфизм в $\mathcal{D}$. Композиция и тождественные морфизмы определяются покомпонентно. Полученная категория называется **произведением** категорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ и обозначается через $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$.

Определение 1.5.2. Пусть $\mathcal{C}$ — категория. Рассмотрим категорию с теми же объектами, что и $\mathcal{C}$, и с морфизмами вида $f\colon X \to Y$ для каждого морфизма $f\colon Y \to X$ в $\mathcal{C}$. Композиция морфизмов $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ в новой категории определяется как композиция морфизмов $g\colon Z \to Y$ и $f\colon Y \to X$ в $\mathcal{C}$, а единичные морфизмы совпадают с единичными морфизмами в $\mathcal{C}$. Полученная категория называется **противоположной** к категории $\mathcal{C}$ и обозначается через $\widehat{\mathcal{C}}$.

Определение 1.5.3. Пусть $\mathcal{C}$ — категория. **Категория стрелок** $\mathcal{C}^{\to}$ определяется как категория, объекты которой — стрелки категории $\mathcal{C}$, а морфизм g в $\mathcal{C}^{\to}$ из $f\colon X \to Y$ в $f'\colon X' \to Y'$ задается парой морфизмов $g_1\colon A \to A'$, $g_2\colon B \to B'$ в категории $\mathcal{C}$ таких, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g_1} & A' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ B & \xrightarrow{g_2} & B' \end{array}$$

коммутативна. Роль тождественного морфизма для объекта $f\colon X \to Y$ играет пара $(1_A, 1_B)$; композиция морфизмов происходит покомпонентно.

Определение 1.5.4. Пусть $\mathcal{C}$ — категория, C — фиксированный объект в $\mathcal{C}$. Категория $\mathcal{C}/C$ **объектов $\mathcal{C}$ над C (slice category)** определяется следующим образом: ее объекты — морфизмы $f \in \mathcal{C}$ такие, что $\mathrm{cod}(f) = C$, а морфизм из объекта $f\colon X \to C$ в объект $f'\colon X' \to C$ — это морфизм $a\colon X \to X'$ в категории $\mathcal{C}$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "f'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Композиция и тождественные морфизмы определяются очевидным образом. Двойственным образом определяется категория $C/\mathcal{C}$ **объектов $\mathcal{C}$ под C (coslice category)**.

Замечание 1.5.5. С построенной категорией $\mathcal{C}/C$ естественно связан «забывающий функтор» $U\colon \mathcal{C}/C \to \mathcal{C}$, отправляющий каждый объект $(f\colon X \to C) \in \mathcal{C}/C$ в $X \in \mathcal{C}$, а морфизм $a\colon X \to X'$ из категории $\mathcal{C}/C$ в тот же морфизм в $\mathcal{C}$. Конструкция slice category задает функтор $\mathcal{C}/(-)\colon \mathcal{C} \to \mathfrak{Cats}$ (cf. представление Кэли).

Пример 1.5.6. Категория $\mathfrak{Sets}_\bullet$ **множеств с отмеченной точкой** изоморфна coslice category объектов под 1, где $1 = \{*\}$ — произвольный синглтон.

Определение 1.5.7. Пусть $|-|\colon \mathfrak{Mons} \to \mathfrak{Sets}$ — забывающий функтор (он сопоставляет моноиду то множество, на котором он задан, а гомоморфизму моноидов — его же). **Свободным моноидом** на A называется моноид $M(A)$ вместе с отображением $A \to |M(A)|$ таким, что для любого моноида N и для любого отображения $f\colon A \to |N|$ существует единственный гомоморфизм моноидов $\bar{f}\colon M(A) \to N$ такой, что $|\bar{f}| \circ i = f$ (это свойство называется **универсальным свойством свободного моноида**).

Замечание 1.5.8. Из формулировки универсального свойства совершенно не очевидно, что свободный моноид (для данного множества A) существует. Для доказательства его существования проще всего предъявить конструкцию. Пусть $M(A)$ — множество [конечных] последовательностей вида $x_1x_2\ldots x_n$, где $x_n \in A$. Определим на этом множестве бинарную операцию **конкатенации** (приписывания одной последовательности к другой). Очевидно, что эта операция ассоциативна, а пустая последовательность (длины 0) играет роль нейтрального элемента. Таким образом, мы получили моноид $M(A)$.

Упражнение 1.5.9. *Проверьте, что построенный в замечании 1.5.8 моноид $M(A)$ вместе с отображением $A \to |M(A)|$, переводящим элемент $a \in A$ в последовательность a (длины 1), удовлетворяет определению свободного моноида 1.5.7.*

Определение 1.5.10. Напомним, что **[направленный] граф** состоит из множества вершин V и множества ребер E вместе с двумя отображениями $s\colon E \to V$ (начало) и $t\colon E \to V$ (конец). **Гомоморфизмом** из графа $G = (V, E, s, t)$ в граф $G' = (V', E', s', t')$ называется пара отображений $f = (f_V, f_E)$, $f_V\colon V \to V'$, $f_E\colon E \to E'$ такая, что $s' \circ f_E = f_V \circ s$ и $t' \circ f_E = f_V \circ t$. Графы их гомоморфизмы образуют категорию $\mathfrak{Graphs}$. Определим **забывающий функтор** $|-|\colon \mathfrak{Cats} \to \mathfrak{Graphs}$ из категории [малых] категорий в категорию графов, сопоставив категории $\mathcal{C}$ граф с множеством вершин $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и множеством ребер $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$, и положив $s = \mathrm{dom}$, $t = \mathrm{cod}$ (упражнение: как задать забывающий функтор на морфизмах?).

Определение 1.5.11. **Свободной категорией** на графе G называется категория $\mathcal{C}(G)$ вместе с гомоморфизмом графов $G \to \mathcal{C}(G)|$ таким, что для любой категории $\mathcal{D}$ и для любого гомоморфизма графов $f\colon G \to |\mathcal{D}|$ существует единственный функтор $\bar{f}\colon \mathcal{C}(G) \to \mathcal{D}$ такой, что $|\bar{f}| \circ i = f$ (это свойство называется **универсальным свойством свободной категории**).

Упражнение 1.5.12. *Для каждого графа G существует свободная категория $\mathcal{C}(G)$. Ее объекты — вершины G, а морфизмы —* пути *в G. Формализуйте эту конструкцию и проверьте универсальное свойство из определения свободной категории 1.5.11.*

Примеры 1.5.13. Если у G только одна вершина, то $\mathcal{C}(G)$ — свободный моноид на множестве ребер графа G. Если у G нет ребер, а есть только веришны, то $\mathcal{C}(G)$ — дискретная категория на множестве вершин G.

Определение 1.5.14. Категория $\mathcal{C}$ называется **малой**, если и объекты $\mathcal{C}$, и морфизмы $\mathcal{C}$ образуют множества. В противном случае $\mathcal{C}$ называется **большой**. Категория $\mathcal{C}$ называется **локально малой**, если для всех объектов X, Y в $\mathcal{C}$ морфизмы из X в Y образуют множество.

1.6 Мономорфизмы и эпиморфизмы

Определение 1.6.1. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория. Морфизм $f\colon A \to B$ в $\mathcal{C}$ называется **мономорфизмом**, если для любых $g, h\colon C \to A$ из $fg = fh$ следует $g = h$. Морфизм $f\colon A \to B$ в $\mathcal{C}$ называется **эпиморфизмом**, если для любых $i, j\colon B \to D$ из $if = jf$ следует $i = j$.

Примеры 1.6.2. В категории множеств $\mathfrak{Sets}$ мономорфизмы — это в точности инъективные отображения, а эпиморфизмы — это в точности сюръективные отображения. Вообще, очень часто [в конкретных категориях] мономорфизм — это инъективный гомоморфизм. Однако, гораздо реже эпиморфизм — это сюръективный гомоморфизм.

Упражнение 1.6.3. *Покажите, что в частично упорядоченном множестве любая стрелка является мономорфизмом и эпиморфизмом.*

Упражнение 1.6.4. *Покажите, что в категории $\mathfrak{Mons}$ моноидов гомоморфизм моноидов $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x$ является мономорфизмом и эпиморфизмом.*

Упражнение 1.6.5. *Любой изоморфизм является мономорфизмом и эпиморфизмом. Более точно, если у морфизма есть левый обратный, то это мономорфизм; если у морфизма есть правый обратный, то это эпиморфизм.*

Определение 1.6.6. Объект 0 в категории $\mathcal{C}$ называется **инициальным**, если для любого объекта C в $\mathcal{C}$ существует единственный морфизм $0 \to C$. Объект 1 в категории $\mathcal{C}$ называется **терминальным**, если для любого объекта C в $\mathcal{C}$ существует единственный морфизм $C \to 1$.

Примеры 1.6.7. В категории множеств пустое множество является инициальным объектом, а любое одноэлементное множество — терминальным. В категории $\mathfrak{Cats}$ категория 0 инициальна, а категория 1 терминальна. В категории групп одноэлементная группа является инициальным и терминальным объектом одновременно; аналогичная ситуация в категории векторных пространств, в категории моноидов. В категории колец $\mathbb{Z}$ является инициальным объектом, а одноэлементное кольцо 0 — терминальным. В частично упорядоченном множестве инициальный объект = наименьший, терминальный объект = наибольший. Если $X \in \mathcal{C}$, то тождественный морфизм $1_X\colon X \to X$ является терминальным объектом в slice-категории $\mathcal{C}/X$ и инициальным объектом в coslice-категории $X/\mathcal{C}$.

Определение 1.6.8. Частично упорядоченное множество B вместе с выделенными элементами $0, 1$, бинарными операциями $\vee$ (join) и $\wedge$ (meet), и унарной операцией $\neg b$ (дополнение) называется **булевой алгеброй**, если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant a;\\
a &\leqslant 1;\\
a \leqslant c \text{ и } b \leqslant c &\iff a \vee b \leqslant c;\\
c \leqslant a \text{ и } c \leqslant b &\iff c \leqslant a \wedge b;\\
a \leqslant \neg b &\iff a \wedge b = 0;\\
\neg\neg a &= a.
\end{aligned}$$

Пример 1.6.9. Типичный пример булевой алгебры: множество 2^X всех подмножеств множества X с частичным порядком включения, где $0 = \varnothing$, $1 = X$, $\vee$ — объединение, $\wedge$ — пересечение, $\neg A = X - A$. Гомоморфизмы булевых алгебр — отображения, сохраняющие все операции. Например, $2 = 2^1$ — булева алгебра из двух элементов. Это инициальный объект в категории булевых алгебр, а $1 = 2^0$ — терминальный.

Определение 1.6.10. Морфизм, у которого есть левый обратный, называется **расщепимым мономорфизмом**; морфизм, у которого есть правый обратный, называется **расщепимым эпиморфизмом**. Если $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to A$ таковы, что $fg = 1_B$, то морфизм g называется **сечением** морфизма f, а морфизм f называется **ретракцией** морфизма g; при этом объект B называется **ретракцией** объекта A.

Замечание 1.6.11. Очевидно, что любой функтор сохраняет расщепимые мономорфизмы и расщепимые эпиморфизмы (но не обязан сохранять мономорфизмы и эпиморфизмы).

Упражнение 1.6.12. *Какие мономорфизмы в $\mathfrak{Sets}$ расщепимы? Как называется утверждение, что все эпиморфизмы в $\mathfrak{Sets}$ расщепимы?*

Определение 1.6.13. Объект P называется **проективным**, если для любого эпиморфизма $e\colon E \to X$ и для любого морфизма $f\colon P \to X$ существует морфизм $\bar{f}\colon P \to E$ такой, что $e \circ \bar{f} = f$.

Замечание 1.6.14. В категории множеств все объекты проективны; как правило, свободные объекты в категориях алгебр проективны.

Упражнение 1.6.15. *Докажите, что ретракт проективного объекта проективен.*

1.6.16. Посмотрим, какие бывают стрелки в инициальный объект. В категории множеств стрелка $A \to 0$ существует только если A сам инициален; то же в категории частичных порядков. В категориях моноидов и групп у каждого объекта есть единственная стрелка в иницальный объект (который заодно является терминальным). Посмотрим теперь на категорию булевых алгебр. Гомоморфизмы $p\colon B \to 2$ в инициальный объект 2 соответствуют **ультрафильтрам** $U \subseteq B$.

Определение 1.6.17. Непустое подмножество F в булевой алгебре B называется **фильтром**, если оно замкнутое вверх и относительно пересечений: из $a \in F$, $a \leqslant b$ следует, что $b \in F$, из $a, b \in F$ следует, что $a \wedge b \in F$. Фильтр F называется **максимальным**, если любой строго больший фильтр $F' \supset F$ совпадает со всей алгеброй B. Максимальный фильтр называется **ультрафильтром**.

Упражнение 1.6.18. *Фильтр F является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $b \in B$ выполнено либо $b \in F$, либо $\neg b \in F$ (причем ровно одно из них). Теперь для любого гомоморфизма $p\colon B \to 2$ множество $U_p = p^{-1}(1)$ является ультрафильтром в B, а для любого ультрафильтра $U \subset B$ можно задать гомоморфизм булевых алгебр $p_U\colon B \to 2$ формулами $p_U(b) = 1$ для $b \in U$ и $p_U(b) = 0$ для $b \notin U$. Эти сопоставления взаимно обратны.*

1.6.19. Теперь посмотрим, какие бывают стрелки из терминальных объектов. Для любого множества X имеется биекция $X \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Sets}}(1, X)$ между элементами X и морфизмами $1 \to X$. То же в категории частичных порядков, в категории топологических пространств. Вообще, в любой категории с терминальным объектом 1 стрелки $1 \to A$ называются **глобальными элементами** A, или **точками** A. Морфизм $X \to A$ называется **обобщенным элементом** A, или **X-точкой** A.

1.7 Произведения и копроизведения

Определение 1.7.1. Пусть $X, Y \in \mathcal{C}$. Объект $X \times Y$ вместе с морфизмами $p_1\colon X \times Y \to X$, $p_2\colon X \times Y \to Y$ называется **произведением** объектов X и Y, если для любых двух морфизмов

$f\colon T \to X$, $g\colon T \to Y$ из некоторого объекта T в X и Y существует единственный морфизм $(f, g)\colon T \to X \times Y$ такой, что $f = p_1 \circ (f, g)$ и $g = p_2 \circ (f, g)$:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[dr, dotted, "{(f,g)}"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& X \times Y \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & Y \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Определение 1.7.2. Двойственным образом, если $X, Y \in \mathcal{C}$, то объект $X + Y$ вместе с морфизмами $i_1\colon X \to X + Y$, $i_2\colon X \to X + Y$ называется **копроизведением** объектов X и Y, если для любых двух морфизмов $f\colon X \to T$, $g\colon Y \to T$ из X и Y в некоторый объект T существует единственный морфизм $\binom{f}{g}\colon X + Y \to T$ такой, что $f = \binom{f}{g} \circ i_1$ и $g = \binom{f}{g} \circ i_2$:

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "i_2"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
X \arrow[r, "i_1"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & X + Y \arrow[dr, dotted, "\binom{f}{g}"] & \\
& & T
\end{tikzcd}$$

Примеры 1.7.3. В категории множеств роль произведения играет декартово произведение множеств (вместе с каноническими проекциями на сомножители), а роль копроизведения — несвязное объединение (вместе с каноническими вложениями). Аналогично, в категории топологических пространств произведение — это декартово произведение множеств с топологией произведения, а копроизведение — несвязное объединение (с понятно какой топологией). Разумеется, произведения и копроизведения объектов не обязаны существовать: например, если рассмотреть частично упорядоченное множество как категорию, то произведение объектов этой категории — это в точности наибольшая нижняя грань, а копроизведение — наименьшая верхняя грань.

Определение 1.7.4. Пусть $\mathcal{C}$ — локально малая категория, $A \in \mathcal{C}$. Рассмотрим функтор $\mathrm{Hom}(A, -)\colon \mathcal{C} \to \mathfrak{Sets}$, сопоставляющий каждому объекту $X \in \mathcal{C}$ множество $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$, а морфизму $f\colon X \to Y$ в $\mathcal{C}$ — отображение $\mathrm{Hom}(A, f)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y)$, отправляющее элемент $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ в элемент $f \circ \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y)$. Вместо $\mathrm{Hom}(A, f)$ мы часто будем писать $f \circ -$ или даже f_* (опуская указание на объект A). Функтор вида $\mathrm{Hom}(A, -)\colon \mathcal{C} \to \mathfrak{Sets}$ называется **[ковариантным] представимым** функтором (и A — его **представляющим объектом**).

Определение 1.7.5. Снова пусть $\mathcal{C}$ — локально малая категория, $A \in \mathcal{C}$. Двойственным образом, рассмотрим функтор $\mathrm{Hom}(-, A\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Sets}$, сопоставляющий каждому объекту $X \in \mathcal{C}$ множество $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$, а морфизму $f\colon X \to Y$ в $\mathcal{C}$ — отображение $\mathrm{Hom}(f, A)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A)$, отправляющее элемент $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A)$ в элемент $\varphi \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$. Вместо $\mathrm{Hom}(f, A)$ мы часто будем писать $- \circ f$ или даже f^* (опуская указание на объект A). Функтор вида $\mathrm{Hom}(-, A)\colon \mathcal{C} \to \mathfrak{Sets}$ называется **[контравариантным] представимым** функтором (и A — его **представляющим объектом**).

Замечание 1.7.6. Представимые функторы дают альтернативное определение произведения и копроизведения A именно, пусть заданы некоторые объекты $X, Y, X \times Y$ в локально малой категории $\mathcal{C}$ вместе с морфизмами $p_1\colon X \times Y \to X$ и $p_2\colon X \times Y \to X$. Каждому морфизму

$h\colon T \to X \times Y$ в $\mathcal{C}$ можно сопоставить пару морфизмов $(p_1 \circ h, p_2 \circ h)$. Таким образом, мы получаем естественное отображение множеств $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X \times Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y)$. При этом $X \times Y$ является произведением объектов X и Y тогда и только тогда, когда указанное отображение является биекцией. Действительно, условие «существует» из определения произведения означает сюръективность этого отображения, а условие «единственный» — его инъективность.

Пример 1.7.7. Рассмотрим категорию доказательств в дедуктивной логической системе. Правила введения дизъюнкции

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}, \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$

задают стрелки $i_1\colon \varphi \to \varphi \vee \psi$ и $i_2\colon \varphi \to \varphi \vee \psi$. Правило исключения

$$\frac{\varphi \vee \psi, \quad \begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \theta\end{matrix}, \quad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \theta\end{matrix}}{\theta}$$

превращают пару стрелок $p\colon \varphi \to \theta$, $q\colon \psi \to \theta$ в стрелку $[p, q]\colon \varphi \vee \psi \to \theta$. Это уже похоже на копроизведение; осталось добиться равенств $[p, q] \circ i_1 = p$ и $[p, q] \circ i_2 = q$. Они пока что не выполняются, но можно заставить их выполняться, перейдя от доказательств к классам эквивалентности доказательств относительно отношения эквивалентности, порожденного этими уравнениями вместе с равенством $[r \circ i_1, r \circ i_2] = r$ для любого $r\colon A + B \to C$. В полученной категории окажется, что стрелка $[p, q]$ единственна с этим свойством, и потому $\phi \vee \psi$ станет копроизведением. Соответствие Карри–Ховарда устанавливает связь этого с суммарным типом в λ-исчислении.

Определение 1.7.8. Пусть $f, g\colon A \to B$ — две параллельные стрелки в категории $\mathcal{C}$. их **уравнителем** называется объект E вместе со стрелкой $e\colon E \to A$, универсальной со свойством $f \circ e = g \circ e$: любая стрелка $z\colon Z \to A$ с $f \circ z = g \circ z$ пропускается через E единственным образом.

Пример 1.7.9. Уравнителем функций $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, где $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = 1$ (в категории топологических пространств) служит единичная окружность.

Пример 1.7.10. В категории множеств уравнитель двух функций $f, g\colon A \to B$ — это подмножество $\{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$ вместе со своим включением в A. Вообще, любое подмножество $U \subseteq A$ является уравнителем некоторой пары функций. А именно, пусть $2 = \{\top, \bot\}$ — множество «значений истинности». Рассмотрим **характеристическую функцию** $\chi_U\colon A \to 2$:

$$\chi_U(x) = \begin{cases} \top, & x \in U; \\ \bot, & x \notin U. \end{cases}.$$

Тогда следующая диаграмма является уравнителем:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] & A \arrow[r, bend left, "\top!"] \arrow[r, bend right, "\chi_U"'] & 2 \end{tikzcd}$$

где $\top! = \top \circ !\colon U \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{\top} 2$. Обратно, для каждой функции $\varphi\colon A \to 2$ можно рассмотреть соответствующее ее «многообразие» $V_\varphi = \{x \in A \mid \varphi(x) = \top\}$. Эти операции взаимно обратны: $V_{\chi_U} = U$, $\chi_{V_\varphi} = \varphi$. Мы получили изоморфизм $\mathrm{Hom}(A, 2) \cong P(A)$.

Замечание 1.7.11. Двойственное понятие коуравнителя полезно рассматривать как обобщение фактор-множества (по отношению эквивалентности).

Упражнение 1.7.12. *В любой категории уравнитель двух морфизмов является мономорфизмом, а коуравнитель — эпиморфизмом.*

1.8 Группы в категориях

Определение 1.8.1. Пусть $\mathcal{C}$ — категория с конечными произведениями. **Группой** в категории $\mathcal{C}$ называется объект $G \in \mathcal{C}$ вместе с морфизмами

$$\begin{aligned} m &: G \times G \to G, \\ i &: G \to G, \\ u &: 1 \to G \end{aligned}$$

такими, что

1. морфизм m **ассоциативен**, то есть, диаграмма

$$\begin{tikzcd} (G \times G) \times G \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d, "m \times 1"] & & G \times (G \times G) \arrow[d, "1 \times m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"'] & G & G \times G \arrow[l, "m"] \end{tikzcd}$$

   коммутативна;

2. морфизм u является единицей для m, то есть, диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(u!, \mathrm{id}_G)"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_G, u!)"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_G"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd}$$

   коммутативна, где $u! = u \circ !\colon G \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{u} G$;

3. морфизм i является обратным по отношению к m, то есть, диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times i"'] & G \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "u"] & G \times G \arrow[d, "i \times \mathrm{id}_G"] \\ G \times G \arrow[r, "m"'] & G & G \times G \arrow[l, "m"] \end{tikzcd}$$

Определение 1.8.2. **Гомоморфизмом** $f\colon G \to H$ групп в $\mathcal{C}$ называется морфизм $f\colon G \to H$ в $\mathcal{C}$, который

1. сохраняет m:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "m"] & H \times H \arrow[d, "m"] \\ G \arrow[r, "f"] & H \end{tikzcd}$$

2. сохраняет u:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] & H \\ 1 \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "u"] & \end{tikzcd}$$

3. сохраняет i:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \big\downarrow i & & \big\downarrow i \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

Категория групп в $\mathcal{C}$ обозначается через $\mathfrak{Groups}(\mathcal{C})$.

Примеры 1.8.3. Группа в категории $\mathfrak{Sets}$ — это группа в обычном смысле. Группа в категории $\mathfrak{Top}$ топологических пространств называется **топологической группой**. Группа в категории $\mathfrak{POSets}$ частично упорядоченных множеств называется [частично] упорядоченной группой (в этом случае, впрочем, от операции взятия обратного i требуют, чтобы она обращала порядок). Например, множественных чисел $\mathbb{R}$ является и топологической, и частично упорядоченной группой.

Пример 1.8.4. Пусть G — группа в категории групп с умножением $\circ$. Обозначим через $x \star y$ произведение $m(x, y)$ для $x, y \in G$. Заметим, что $m\colon G \times G \to G$ должно быть морфизмом в категории групп, то есть, гомоморфизмом групп. Это значит, что $m(g, h) = m(g) \circ m(h)$ для всех $g, h \in G \times G$. Запишем $g = (g_1, g_2)$, $h = (h_1, h_2)$. Получаем, что $(g_1 \circ h_1) \star (g_2 \circ h_2) = (g_1 \star g_2) \circ (h_1 \star h_2)$. Пусть $1_\circ$ — единица группы G относительно умножения $\circ$ а $1_\star$ — единица группы G относительно умножения $\star$, то есть, образ единственного элемента тривиальной группы при морфизме $u\colon 1 \to G$. Из теоремы 1.8.5 ниже следует, что группы в категории групп — это в точности абелевы группы.

Теорема 1.8.5 (Eckmann–Hilton). *Пусть G — множество с двумя бинарными операциями $\circ$ и $\star$, обладающими единицами $1_\circ$ и $1_\star$ соответственно, и пусть G является группой относительно $\circ$ и является группой относительно $\star$. Предположим, что $(g_1 \circ h_1) \star (g_2 \circ h_2) = (g_1 \star g_2) \circ (h_1 \star h_2)$ для всех $g_1, g_2, h_1, h_2 \in G$. Тогда $1_\circ = 1_\star$, $\circ = \star$, и операция $\circ = \star$ коммутативна.*

Доказательство. Подставим в наше тождество $g_1 = g_2 = h_1 = h_2 = 1_\circ$. Получим, что $1_\circ \star 1_\circ = (1_\circ \star 1_\circ) \circ (1_\circ \star 1_\circ)$. Значит, элемент $1_\circ \star 1_\circ$ является идемпотентом относительно операции $\circ$; из этого следует, что он равен $1_\circ$. Поэтому $1_\circ \star 1_\circ = 1_\circ$, откуда следует, что $1_\circ = 1_\star$. Будем обозначать $1 = 1_\circ = 1_\star$. Подставим теперь в наше тождество $g_2 = h_1 = 1$. Получим, что $(g_1 \circ 1) \star (1 \circ h_2) = (g_1 \star 1) \circ (1 \star h_2)$, откуда $g_1 \star h_2 = g_1 \circ h_2$ для всхе $g_1, h_2 \in G$. Поэтому операции $\circ$ и $\star$ совпадают. Наконец, подставляя $g_1 = h_2 = 1$, получаем, что $h_1 \star g_2 = g_2 \circ h_1$, откуда (с учетом $\circ = \star$) следует, что эти операции коммутативны. □

Определение 1.8.6. Категория $\mathcal{C}$ с функториальной бинарной ассоциативной операцией $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ и выделенным объектом I таким, что три функтора $I \otimes (-)$, $(-) \otimes I$, $\mathrm{id}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ совпадают, называется **строгой моноидальной категорией**. Объект I при этом называется **единицей** этой категории.

Замечание 1.8.7. Строгая моноидальная категория — это в точности моноид в категории категорий $\mathfrak{Cats}$.

Пример 1.8.8. Выше мы видели, что любое частично упорядоченное множество P является категорией. Иногда оно является строгой моноидальной категорией как относительно операции $\wedge$ (с терминальным объектом 1 в качестве единицы), так и относительно операции $\vee$ (с начальным объектом 0 в качестве единицы) — если эти операции определены в P.

Пример 1.8.9. Если P — частично упорядоченное множество, можно рассмотреть частично упорядоченное множество $\mathrm{End}(P)$, элементы которого — монотонные отображения $f\colon P \to P$, а порядок задается поточечно. Оказывается, $\mathrm{End}(P)$ является моноидальной категорией относительно бинарной операции композиции $\circ$ и единицы id_P.

Замечание 1.8.10. Определение строгой моноидальной категории довольно жесткое: равенство $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ должно выполняться *буквально*, поэтому на свете не так много примеров строгих моноидальных категорий. Гораздо больше примеров, в которых тождество ассоциативности (и тождества для единичного объекта) выполняются «с точностью до изоморфизмов». Ниже мы увидим, как формализовать эти слова.

Пример 1.8.11. Рассмотрим категорию конечных кардиналов $\mathfrak{Cards}_{\mathrm{fin}}$. Ее объекты — конечные кардинальные числа $0 = \varnothing$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}, \ldots, n+1 = \{0, \ldots, n\}, \ldots$, а морфизмы — все отображения между этими множествами. Эта категория является моноидальной относительно операции $m + n$; роль единицы играет объект 0.

Определение 1.8.12. **Конгруэнцией** на категории $\mathcal{C}$ называется отношение эквивалентности $\sim$ на ее морфизмах такое, что

1. из $f \sim g$ следует, что $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(f)$ и $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$;
2. если $f, g\colon X \to Y$, то из $f \sim g$ следует, что $bfa \sim bga$ для всех стрелок $a\colon A \to X$, $b\colon Y \to B$.

Определение 1.8.13. Пусть $\sim$ — конгруэнция на категории $\mathcal{C}$. Рассмотрим категорию $\mathcal{C}^\sim$, объекты которой те же, что и в $\mathcal{C}$, а морфизмы — пары (f, g) морфизмов в $\mathcal{C}$ такие, что $f \sim g$. Композиция в $\mathcal{C}^\sim$ задается правилом $(f', g') \circ (f, g) = (f'f, g'g)$, а тождественный морфизм на объекте X — это пара $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)$. Очевидным образом задаются два функтора проекции $p_1, p_2\colon \mathcal{C}^\sim \to \mathcal{C}$. Рассмотрим также **фактор-категорию** $\mathcal{C}/\sim$, объекты которой такие же, как в $\mathcal{C}$, а морфизмы — классы эквивалентности морфизмов в $\mathcal{C}$ по отношению $\sim$. Таким образом, морфизмы имеют вид $[f]$, где f — морфизм в $\mathcal{C}$. Композиция задается правилом $[g] \circ [f] = [g \circ f]$, а тождественный морфизм — это класс тождественного морфизма в $\mathcal{C}$. Очевидный функтор проекции $\pi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\sim$ превращает диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\sim \arrow[r, bend left, "p_1"] \arrow[r, bend right, "p_2"'] & \mathcal{C} \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{C}/\sim \end{tikzcd}$$

в коуравнитель (упражнение!)

Теорема 1.8.14. *Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ — категории, $F\colon C \to D$ — некоторый функтор. Определим на $\mathcal{C}$ конгруэнцию $\sim_F$, положив $f \sim_F g$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$, $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$ и $F(f) = F(g)$. Обозначим через $\ker(F) = \mathcal{C}^{\sim_F}$* ***ядро*** *$F$. Построенная конгруэнция $\sim_F$ и ядро $\ker(F)$ удовлетворяют следующему универсальному свойству: для любой конгруэнции $\sim$ на $\mathcal{C}$ условие $f \sim g \Rightarrow f \sim_F g$ выполняется для всех f, g тогда и только тогда, когда существует функтор $\widetilde{F}\colon \mathcal{C}/\sim \to \mathcal{D}$ такой, что $F = \widetilde{F} \circ \pi$, где $\pi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\sim$ — каноническая проекция.*

Следствие 1.8.15. *Любой функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ представляется в виде композиции $\mathcal{C} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}/\ker(F) \xrightarrow{\widetilde{F}} \mathcal{D}$, где π биективен на объектах и сюръективен на Hom-ах, а $\widetilde{F}$ инъективен на Hom-ах (то есть, является строгим).*

Определение 1.8.16. Пусть G — конечный граф, а $\mathcal{C}(G)$ — соответствующая свободная категория. Зафиксируем конечное множество Σ соотношений вида $(g_1 \circ \ldots g_n) = (g'_1 \circ \cdots \circ g'_m)$, где все $g_i \in G$, $\mathrm{dom}(g_n) = \mathrm{dom}(g'_m)$ и $\mathrm{cod}(g_1) = \mathrm{cod}(g'_1)$. Пусть $\sim_\Sigma$ — наименьшая конгруэнция на $\mathcal{C}$ такая, что $g \sim g'$ для каждого соотношения вида $g = g'$ в Σ. Фактор-категория по этой конгруэнции называется **конечно представимой категорией** $\mathcal{C}(G, \Sigma) = \mathcal{C}(G)/{\sim_\Sigma}$.

1.9 Естественные преобразования

1.9.1. Пусть $\mathcal{C}$ — локально малая категория. Тогда определены представимые функторы вида $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)\colon \mathcal{C} \to \mathfrak{Sets}$ для всех объектов $C \in \mathcal{C}$. Этот функтор является строгим, если объект C обладает следующим свойством: для любых объектов X, Y и стрелок $f, g\colon X \to Y$ из $f \neq g$ следует, что существует стрелка $x\colon C \to X$ такая, что $f \circ x = g \circ x$. Иными слоами, стрелки в нашей категории можно различить, применяя их к выделенным элементам с базой в C. Такой объект C называется **генератором** категории $\mathcal{C}$.

Примеры 1.9.2. В категории множеств терминальный объект 1 является генератором. В категории групп свободная группа $F(1)$ на одном элементе является генератором: $\mathrm{Hom}(F(1), G) \cong U(G)$, где $U\colon \mathfrak{Groups} \to \mathfrak{Sets}$ — забывающий функтор. Более того, этот изоморфизм ведет себя естественно по G.

1.9.3. Если $\mathcal{C}$ — группа в [локально малой] категории $\mathcal{C}$, то контравариантный представимый функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G)$ имеет структуру группы и может рассматриваться как функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Groups}$. Например, в категории $\mathfrak{Sets}$ для каждого множества X множество $\mathrm{Hom}(X, G)$ снабжено групповой операцией. В этом случае $\mathrm{Hom}(X, G) \cong \prod x \in XG$ функториально по X.

1.9.4. В категории топологических пространств, к примеру, содержится кольцо $\mathbb{R}$ вещественных чисел, и потому для любого пространства X можно рассмотреть кольцо $C(X) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}}(X, \mathbb{R})$ вещественных непрерывных функций на X. Мы получили функтор $C\colon \mathfrak{Top}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Rings}$. Отметим, что на представимые функторы переносятся только свойства, задаваемые уравнениями (а, например, аксиома поля не переносится).

1.9.5. Рассмотрим категорию $\mathfrak{BA}$ булевых алгебр. Множество $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Sets}}(X, 2)$ для любого множества X снабжается структурой булевой алгебры (с покомпонентными операциями). Получаем контравариантный функтор $\mathrm{Hom}(-, 2)\colon \mathfrak{Sets}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{BA}$. Заметим также, что $\mathrm{Hom}(X, 2) \cong P(X)$ для любого множества X, и $P(X)$ также имеет естественную структуру булевой алгебры (операции над множествами). Поэтому имеется функтор $P^{\mathfrak{BA}}\colon \mathfrak{Sets}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{BA}$.

Определение 1.9.6. Собственное подмножество $U \subset B$ в булевой алгебре B называется **фильтром**, если выполняются следующие три условия:

1. $1 \in U$;
2. если $x, y \in U$, то $x \wedge y \in U$;
3. если $x \in U$ и $x \leqslant y$, то $y \in U$.

Максимальный по включению фильтр называется **ультрафильтром**.

Упражнение 1.9.7. *Фильтр U является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $x \in B$ выполнено ровно одно из $x \in U$, $\neg x \in U$.*

1.9.8. Мы знаем, что есть изоморфизм между множеством $\mathrm{Ult}(B)$ ультрафильтров на B и гомоморфизмов булевых алгебр $B \to 2$: $\mathrm{Ult}(B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{BA}}(B, 2)$. Нетрудно видеть, что Ult является контравариантным функтором. Действительно, пусть $h\colon B' \to B$ — гомоморфизм булевых алгебр. Положим $\mathrm{Ult}(h) = h^{-1}\colon \mathrm{Ult}(B) \to \mathrm{Ult}(B')$. Необходимо, разумеется, проверить, что если $U \subseteq B$ — ультрафильтр, то $h^{-1}(U) \subseteq B$ — тоже ультрафильтр. Но мы знаем, что $U = \chi_U^{-1}(1)$ для некоторой характеристической функции $\chi_U\colon B' \to 2$. Поэтому $\mathrm{Ult}(h)(U) = h^{-1}(\chi_U^{-1}(1)) = (\chi_U \circ h)^{-1}(1)$. Мы получили функтор $\mathrm{Ult}\colon \mathfrak{BA}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Sets}$, и функтор в обратную сторону $P^{\mathfrak{BA}}\colon \mathfrak{Sets}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{BA}$. Иногда удобно рассматривать $P^{\mathfrak{BA}}$ как функтор из $\mathfrak{Sets}$ в $\mathfrak{BA}^{\mathrm{op}}$

Замечание 1.9.9. Функторы Ult и $P^{\mathfrak{BA}}$ не взаимно обратны: например, $\mathrm{Ult}(P(X))$ гораздо больше, чем X. Дело в том, что, как правило, есть много ультрафильтров в $P(X)$, которые не являются главными (то есть, не имеют вид $\{U \subseteq X \mid x \in U\}$ для некоторого $x \in X$).

1.9.10. Обозначим $\mathcal{U} = \mathrm{Ult} \circ (P^{\mathfrak{BA}})^{\mathrm{op}}\colon \mathfrak{Sets} \to \mathfrak{BA}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Sets}$. Таким образом, $\mathcal{U}(X) = \{U \subseteq P(X) \mid U$ — ультрафильтр$\}$. Это ковариантный функтор на категории множеств. Для любого множества X есть отображение $\eta\colon X \to \mathcal{U}(X)$, сопоставляющее каждому элементу $x \in X$ главный ультрафильтр $\eta(x) = \{U \subseteq X \mid x \in U\}$. Это сопоставление естественно по X. Действительно, если V — ультрафильтр в $P(X)$, то $U(f)(V) = \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in V\}$. Поэтому $(\mathcal{U}(f) \circ \eta_X)(x) = \mathcal{U}(f)(\eta_X(x)) = (\eta_Y \circ f)(x)$.

1.9.11. Наконец, для каждой булевой алгебры B можно рассмотреть гомоморфизм булевых алгебр $\varphi_B\colon B \to P(\mathrm{Ult}(B))$ такой, что $\varphi_B(b) = \{V \in \mathrm{Ult}(B) \mid b \in V\}$. Это отображение всегда инъективно (для любых двух различных элементов $b, b' \in B$ найдется ультрафильтр, содержащий один из них, но не другой).

Определение 1.9.12. Булева алгебра $P(\mathrm{Ult}(B))$ вместе с гомоморфизмом φ_B называется **представлением Стоуна** алгебры B.

Определение 1.9.13. Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ — категории, $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ — функторы между ними. **Естественным преобразованием** $\alpha\colon F \to G$ из функтора F в функтора G называется задание для каждого объекта $C \in \mathcal{C}$ морфизма $\alpha_C\colon F(C) \to G(C)$ в категории $\mathcal{D}$ таким образом, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \longrightarrow & G(C) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ F(C') & \longrightarrow & G(C') \end{array}$$

коммутативна для любого морфизма $f\colon C \to C'$ в категории $\mathcal{C}$. Морфизмы α_C называются **компонентами** естественного преобразования α. Иногда встречается специальное обозначение $\alpha\colon F \Rightarrow G$ для естественного преобразования.

Определение 1.9.14. Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ — категории, $F, G, H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ — функторы между ними, $\alpha\colon F \to G$, $\beta\colon G \to H$ — естественные преобразования. Их **[вертикальной] композицией** называется естественное преобразование $\beta \circ \alpha\colon F \to H$, компоненты которого равны $(\beta \circ \alpha)_C = \beta_C \circ \alpha_C\colon F(C) \to H(C)$ для всех $C \in \mathcal{C}$ (нетрудно проверить, что это действительно естественное преобразование). Композиция естественных преобразований ассоциативна, а тождественное естественное преобразование $\mathrm{id}_F\colon F \to F$ функтора F в себя (все компоненты которого — тождественные морфизмы) является нейтральным элементом относительно этой композиции.

Определение 1.9.15. Естественное преобразование $\alpha\colon F \to G$ между функторами $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ называется **естественным изоморфизмом**, если существует естественное преобразование $\beta\colon G \to F$ (называемое **обратным** к α) такое, что $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_F$ и $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_G$.

Замечание 1.9.16. Рассмотрим категорию функторов $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$: объекты — функторы из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$, морфизмы — естественные преобразования. Тогда естественный изоморфизм — это естественное преобразование, являющееся изоморфизмом в этой категории.

Примеры 1.9.17. Выше нам встретились естественные изоморфизмы $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Groups}}(F(1), G) \cong U(G)$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Sets}}(X, 2) \cong P(X)$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{BA}}(B, 2) \cong \mathrm{Ult}(B)$ и естественные преобразования η_X, φ_B.

Упражнение 1.9.18. *Естественное преобразование* $\alpha\colon F \to G$ *вяляется естественным изоморфизмом тогда и только тогда, когда каждая его компонента* $\alpha\colon F(C) \to G(C)$ *— изоморфизм.*

Упражнение 1.9.19. *Покажите, что функторы* $F(A) = (A \times B) \times C$ *и* $G(A) = A \times (B \times C)$ *из* $\mathfrak{Sets}$ *в* $\mathfrak{Sets}$ *(для фиксированных множеств* B, C*) естественно изоморфны.*

Пример 1.9.20. Пусть $\mathrm{Vect}(\mathbb{R})$ — категория вещественных векторных пространств и линейных отображений, $V^* = \mathrm{Vect}(V, \mathbb{R})$ для любого векторного пространства V. Оказывается, $(\{-\})^* = \mathrm{Vect}(-, \mathbb{R})\colon \mathrm{Vect}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Vect}$ является контравариантным представимым функтором. Как и в примерах выше, есть каноническое линейное преобразование $\eta_V\colon V \to V^{**}$, $x \mapsto \mathrm{ev}_x$. Это компонента естественного преобразования $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathrm{Vect}} \to **$. Пространство V конечномерно тогда и только тогда, когда η_V — изоморфизм.

Пример 1.9.21. Аналогичная ситуация в категории множеств. Положим $A^* = P(A) \cong \mathfrak{Sets}(A, 2)$. Есть отображение $\eta_A\colon A \to PP(A) = A**$, $\eta_A(a) = \{U \subseteq A \mid a \in U\}$. Получаем естественное преобразование $\mathrm{id}_{\mathfrak{Sets}} \to **$.

1.9.22. Далее мы обозначаем категорию функторов $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ через $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

1.10 Моноидальные категории

Пример 1.10.1. Эндофункторы на произвольной категории $\mathcal{D}$ образуют строгую моноидальную категорию $\mathrm{End}(\mathcal{D})$.

Определение 1.10.2. **Моноидальная категория** — это категория $\mathcal{C}$ вместе с функтором $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, выделенным объектом I и естественными изоморфизмами

$$\begin{aligned}\alpha_{ABC}\colon A \otimes (B \otimes C) &\to (A \otimes B) \otimes C,\\ \lambda_A\colon I \otimes A &\to A,\\ \rho_A\colon A \otimes I &\to A,\end{aligned}$$

такая, что следующие диаграммы коммутируют:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[dl, "1_A \otimes \alpha_{BCD}"'] \arrow[dr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"] & \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D)) \arrow[d, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"'] & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[d, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"] \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[rr, "\alpha_{ABC} \otimes 1_D"] & & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (I \otimes A) \arrow[rr, "\alpha_{AIA}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A \otimes \lambda_A"'] & & (A \otimes I) \otimes A \arrow[dl, "\rho_A \otimes \mathrm{id}_A"] \\
& A \otimes A &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes I \arrow[rr, dash, "\alpha_{AIA}"] \arrow[dr, "\lambda_I"'] & & I \otimes I \arrow[dl, "\rho_I"] \\
& I &
\end{tikzcd}
$$

Теорема 1.10.3 (Маклейн). *Любая диаграмма, составленная из «переменных» объектов, «константы» I при помощи морфизмов α, λ, ρ и тензорных произведений, коммутативна.*

1.11 Эквивалентность категорий

Пример 1.11.1. Пусть $\mathfrak{Cards}_{\mathrm{fin}}$ — категория конечных кардинальных чисел; ее объекты — множества $0, 1, 2, \ldots$, где $0 = \varnothing$ и $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, а морфизмы — все отображения между этими множествами. Выберем для каждого конечного множества A кардинал $|A|$ и изоморфизм $A \cong |A|$. Мы получили функтор $|-|\colon \mathfrak{Sets}_{\mathrm{fin}} \to \mathfrak{Cards}_{\mathrm{fin}}$. Есть и функтор включения $\mathfrak{Cards}_{\mathrm{fin}} \to \mathfrak{Sets}_{\mathrm{fin}}$. Нетрудно понять, что имеется естественный изоморфизм между функторами $1_{\mathfrak{Sets}_{\mathrm{fin}}}$ и $i \circ |-|$, а также естественный изоморфизм (даже равенство) между $|i(-)|$ и $1_{\mathfrak{Ords}_{\mathrm{fin}}}$.

Определение 1.11.2. Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются **эквивалентными**, если существуют функторы $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ и естественные изоморфизмы $\alpha\colon G \circ F \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, $\beta\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. При этом говорят, что функтор F (и функтор G) является **эквивалентностью** категорий.

Пример 1.11.3. Категория конечных булевых алгебр эквивалентна категории $\mathfrak{Sets}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{op}}$. А именно, есть функтор $P^{\mathfrak{BA}}\colon \mathfrak{Sets}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{BA}_{\mathrm{fin}}$ и функтор $A\colon \mathfrak{BA}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Sets}_{\mathrm{fin}}$, сопоставляющий булевой алгебре $\mathcal{B}$ множество ее **атомов** $A(\mathcal{B}) = \{a \in \mathcal{B} \mid 0 < a \text{ и из } b < a \text{ следует } b = 0\}$. Для конечных булевых алгебр множество атомов изоморфно множеству ультрафильтров.

Двойственность $\mathfrak{BA}_{\mathrm{fin}} \cong \mathfrak{Sets}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{op}}$ продолжается до двойственности (Стоуна) между $\mathfrak{Sets}$ и категорией полных атомарных булевых алгебр. Булева алгебра $\mathcal{B}$ называется **полной**, если у каждого подмножества $U \subseteq \mathcal{B}$ есть джойн $\bigvee U \in \mathcal{B}$; гомоморфизм полных булевых алгебр обязан их сохранять. Булева алгебра $\mathcal{B}$ называется **атомарной**, если для любого ненулевого $b \in \mathcal{B}$ существует атом $a \leqslant b$.

Наконец, полная версия теоремы двойственности Стоуна устанавливает эквивалентность между категорией всех булевых алгебр и противоположной к категории пространств Стоуна (компактных хаусдорфовых вполне несвязных топологических пространств).

2 Симплициальные множества

2.1 Категории функторов

2.1.1. Пусть $\mathcal{C}$ — локально малая категория. Рассмотрим категорию $\mathfrak{Sets}^{\mathcal{C}}$. Ее объекты — функторы из $\mathcal{C}$ в категорию множеств $\mathfrak{Sets}$, а морфизмы — естественные преобразования между функторами. Очевидно, что для каждого объекта $C \in \mathcal{C}$ есть **функтор эвалюоации** $\mathrm{ev}_C\colon \mathfrak{Sets}^{\mathcal{C}} \to \mathfrak{Sets}$, сопоставляющий функтору $F \in \mathfrak{Sets}^{\mathcal{C}}$ его значение $F(C)$ на объекте C, а естественному преобразованию $\alpha\colon F \to G$ — его компоненту $\alpha_C\colon F(C) \to G(C)$.

Пример 2.1.2. Пусть $\mathcal{C} = \Gamma$ — категория с двумя объектами и двумя нетривиальными стрелками:

$$1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} 0$$

Задать объект G категории $\mathfrak{Sets}^{\Gamma}$ — значит, задать два множества G_1 и G_0 вместе с отображениями $s_G, t_G \colon G_1 \to G_0$. Это в точности определение **графа** (в котором G_0 – множество вершин, G_1 — множество ребер, и отображения s_G и t_G сопоставляют каждому ребру его начало и конец, соответственно). Нетрудно убедиться, что естественное преобразование между функторами $G, G' \in \mathfrak{Sets}^{\Gamma}$ — это в точности гомоморфизм графов. Поэтому категория $\mathfrak{Sets}^{\Gamma}$ изоморфна категории графов $\mathfrak{Graphs}$.

2.2 Симплициальные множества

Определение 2.2.1. Пусть Δ — категория, объекты которой — конечные непустые вполне упорядоченные множества вида

$$[n] = \{0, 1, \dots, n\},$$

а морфизмы — монотонные (неубывающие) отображения. Контравариантный функтор из Δ в категорию $\mathcal{C}$ называется **симплициальным объектом** в категории $\mathcal{C}$. В частности, функтор вида $X \colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Sets}$ называется **симплициальным множеством**. **Морфизмом** симплициальных объектов называется естественное преобразование функторов; таким образом, категория симплициальных объектов в категории $\mathcal{C}$ — это просто категория функторов $\mathcal{C}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$.

Определение 2.2.2. Пусть $X \colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Sets}$ — симплициальное множество. Вместо $X([n])$ мы часто будем писать X_n; элементы множества X_n называются **n-симплексами**.

Замечание 2.2.3. Морфизм симплициальных множеств $f \colon X \to Y$ — это набор отображений $f_n \colon X_n \to Y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, коммутирующих с образами морфизмов в Δ. Категория $\mathfrak{Sets}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ симплициальных множеств будет обозначаться через $\mathfrak{sSets}$.

2.2.4. У категории Δ имеется естественное представлениями образующими и соотношениями. А именно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим инъективные **отображения кограни**

$$d^i \colon [n-1] \to [n],$$
$$k \mapsto \begin{cases} k, & k < i; \\ k+1, & k \geqslant i, \end{cases}$$

где $i = 0, \dots, n$, и **отображения ковырождения**

$$s^i \colon [n+1] \to [n],$$
$$k \mapsto \begin{cases} k, & k \leqslant i; \\ k-1, & k > i, \end{cases}$$

где $i = 0, \dots, n$. Отображение d^i, таким образом, принимает все значения, кроме i, а отображение s^i принимает значение i дважды. Обратите внимание, что мы не указываем n в обозначениях для этих отображений, поскольку оно обычно восстанавливается из контекста.

Упражнение 2.2.5. *Проверьте, что отображения кограни и ковырождения удовлетворяют соотношениям*

$$d^j \circ d^i = d^i \circ d^{j-1}, \quad i < j;$$
$$s^j \circ s^i = s^i \circ s^{j+1}, \quad i \leqslant j;$$
$$s^j \circ d^i = \begin{cases} 1, & i = j,\ j+1; \\ d^i \circ s^{j-1}, & i < j; \\ d^{i-1} \circ s^j, & i > j+1. \end{cases}$$

Упражнение 2.2.6. *Любой морфизм в категории Δ раскладывается в композицию отображений кограни и ковырождения. Более того, категория Δ может быть описана как категория, заданная образующими d^i, s^i, и соотношениями из упражнения 2.2.5.*

2.2.7. Из упражнения 2.2.6 следует, что для задания симплициального множества X достаточно задать набор множеств X_n вместе с отображениями $X(d^i)$, $X(s^i)$, которые удовлетворяют соотношениям, полученным применением (контравариантного!) функтора X к соотношениям из упражнения 2.2.5 (см. 2.2.12). Далее, для проверки того, что набор отображений $f_n \colon X_n \to Y_n$ задает морфизм симплициальных множеств $f \colon X \to Y$, достаточно проверить, что f_n коммутируют с образами отображений d^i и s^i.

Определение 2.2.8. Пусть X — симплициальное множества. Отображения $d_i = X(d^i) \colon X_n \to X_{n-1}$ и $s_i = X(s^i) \colon X_n \to X_{n+1}$ называются отображениями **грани и вырождения**, соответственно.

Замечание 2.2.9. Таким образом, отображения грани сопоставляют каждому n-симплексу $x \in X_n$ его грани $d_0(x), \dots, d_n(x) \in X_{n-1}$ (неформально говоря, грань $d_i(x)$ получена пропусканием i-ой вершины). Соотношение $d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i$ для $i < j$ означает, что если x — некоторый n-симплекс, то грань с номером i симплекса $d_j(x)$ совпадает с гранью с номером $j-1$ симплекса $d_i(x)$. Аналогично, отображения вырождения сопоставляют каждому n-симплексу $x \in X_n$ некоторые $(n+1)$-симплексы $s_0(x), \dots, s_n(x) \in X_{n+1}$. При этом в $(n+1)$-симплексе $s_i(x)$ грани с номерами i и $i+1$ — это просто симплекс x. Неформально говоря, симплекс $s_i(x)$ вырожденный: он получен «схлопыванием» ребра, соединяющего вершины i и $i+1$ в «невырожденном» $(n+1)$-мерном симплексе, и потому фактически является n-мерным.

Определение 2.2.10. Симплекс $x \in X_n$ называется **вырожденным**, если он лежит в образе некоторого отображения вырождения s_i, и **невырожденным** в противном случае.

Упражнение 2.2.11. *(Лемма Эйленберга–Зильбера). Любой вырожденный n-симплекс $x \in X_n$ единственным образом представляется в виде $X(\varphi)(y)$ для некоторого невырожденного m-симплекса $y \in X_m$ и сюръекции $\varphi \colon [n] \to [m]$ в категории Δ.*

Упражнение 2.2.12. *Покажите, что следующее определение симплициального множества равносильно обычному: симплициальным множеством X называется набор множеств X_n для $n \geqslant 0$ вместе с отображениями $d_i \colon X_n \to X_{n-1}$ и $s_i \colon X_n \to X_{n+1}$*

для всех $0 \leqslant i \leqslant n$ *такие, что*

$$\begin{aligned} d_i \circ d_j &= d_{j-1} \circ d_i, \quad i < j; \\ s_i \circ s_j &= s_{j+1} \circ s_i, \quad i \leqslant j; \\ d_i \circ s_j &= \begin{cases} 1, & i = j,\ j+1; \\ s_{j-1} \circ d_j, & i < j; \\ s_j \circ d_{i-1}, & i > j+1. \end{cases} \end{aligned}$$

2.2.13. Напомним, что для любой категории $\mathcal{C}$ и любого объекта $X \in \mathcal{C}$ определен представимый функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathfrak{Sets}$, переводящий объект $Z \in \mathcal{C}$ в множество $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, а морфизм $f\colon Z \to Z'$ в отображение $f^* = (-) \circ f\colon \mathrm{Hom}(Z', X) \to \mathrm{Hom}(Z, X)$. Более того, по морфизму $\varphi\colon X \to Y$ можно построить естественное преобразование функторов $\varphi_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$. Его компонента $(\varphi_*)_Z$ для $Z \in \mathcal{C}$ выглядит так:

$$\begin{aligned} (\varphi_*)_Z\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y), \\ f &\mapsto \varphi \circ f. \end{aligned}$$

Определение 2.2.14. Сопоставление каждому $X \in \mathcal{C}$ функтора $\mathrm{Hom}(-, X)$ задает **функтор Йонеды** $\mathfrak{y}\colon \mathcal{C} \to \mathfrak{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}$. Оказывается, этот функтор вполне строг (то есть, отображение на Hom биективно) — см. следствие 2.2.18.

Пример 2.2.15. Рассмотрим образ объекта $[n] \in \Delta$ под действием функтора Йонеды $\mathfrak{y}\colon \Delta \to \mathfrak{Sets}^{\Delta^{op}} = \mathfrak{sSets}$. Полученное симплициальное множество мы будем обозначать через $\Delta^n = \mathfrak{y}[n] = \mathrm{Hom}_{\Delta}(-, [n])$ и называть **стандартным n-симплексом**. По определению k-симплексы в Δ^n — это в точности морфизмы $[k] \to [n]$ в категории Δ, а морфизмы грани и вырождения задаются пре-композицией с морфизмами кограни и ковырождения в Δ.

Упражнение 2.2.16. *У симплициального множества Δ^n есть ровно один невырожденный n-симплекс: он соответствует тождественному отображению $\mathrm{id}_{[n]}$. Вообще, невырожденные k-симплексы в Δ^n — это в точности* инъективные *отображения из $[k] \to [n]$ в категории Δ.*

Теорема 2.2.17 (Лемма Йонеды). *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория, $C \in \mathcal{C}$, $X\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathfrak{Sets}$ — контравариантный функтор из $\mathcal{C}$ в категорию множеств. Естественные преобразования из функтора $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ в функтор X биективно соответствуют элементам множества $X(C)$, и это соответствие ведет себя функториально по обеим переменным. Иными словами, имеется естественный (по X и по C) изоморфизм $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C), X) \cong X(C)$.*

Следствие 2.2.18. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория, $C, D \in \mathcal{C}$. Естественные преобразования из функтора $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ в функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, D)$ биективно соответствуют морфизмам из C в D (в категории $\mathcal{C}$).*

Доказательство. Применим лемму Йонеды к функтору $X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, D)\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathfrak{Sets}$. □

Доказательство теоремы 2.2.17. Пусть $\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) \to X$ — естественное преобразование. У него есть C компонента $\alpha_C\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C) \to X(C)$. Посмотрим на образ единичного морфизма при отображении α_C — это некоторый элемент $X(C)$.

Обратно, пусть $x \in X(C)$. Для построения естественного преобразования функторов $\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) \to X$ достаточно задать его компоненты $\alpha_D\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, C) \to X(D)$ для каждого объекта $D \in \mathcal{C}$. Пусть $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, C)$; тогда $X(f)\colon X(C) \to X(D)$ — отображение множеств. Положим теперь $\alpha_D(f) = X(f)(x)$. Читателю предоставляется возможность завершить доказательство:

- проверить, что компоненты α_D задают естественное преобразование функторов;
- проверить, что построенные соответствия взаимно обратны;
- проверить, что они естественны по X и по C.

$\square$

Замечание 2.2.19. Контравариантные функторы из категории $\mathcal{C}$ в категорию множеств часто называются **предпучками** на категории $\mathcal{C}$. Категория $\mathfrak{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}$ предпучков на $\mathcal{C}$ обозначается через $\widehat{\mathcal{C}}$.

Пример 2.2.20. Применим лемму Йонеды к нашему случаю $\mathcal{C} = \Delta$. Для любого симплициального множетсва X, таким образом, имеется естественная биекция между n-симплексами X и морфизмами $\Delta^n \to X$ в категории $s\mathfrak{Sets}$.

Пример 2.2.21. Пусть $\mathcal{C}$ — малая категория. Определим симплициальное множество $N\mathcal{C}$ следующим образом:

- $N\mathcal{C}_0 = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- $N\mathcal{C}_1 = \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$;
- $N\mathcal{C}_2 =$ множество пар композируемых морфизмов в $\mathcal{C}$, то есть, стрелок вида $X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2$;
  ...
- $N\mathcal{C}_n =$ множество последовательностей из n композируемых морфизмов в $\mathcal{C}$, то есть, стрелок вида $X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \xrightarrow{f_n} X_n$.

Зададим отображения вырождения $s_i \colon N\mathcal{C}_n \to N\mathcal{C}_{n+1}$ следующим образом: последовательность

$$X_0 \xrightarrow{f_1} \ldots \xrightarrow{f_i} X_i \xrightarrow{f_{i+1}} \ldots \xrightarrow{f_n} X_n$$

длины n отправим в последовательность

$$X_0 \xrightarrow{f_1} \ldots \xrightarrow{f_i} X_i \xrightarrow{\mathrm{id}_{X_i}} X_i \xrightarrow{f_{i+1}} \ldots \xrightarrow{f_n} X_n$$

длины $n+1$. Теперь зададим отображения грани $d_i \colon N\mathcal{C}_n \to N\mathcal{C}_{n-1}$, отправив последовательность

$$X_0 \xrightarrow{f_1} \ldots \xrightarrow{f_i} X_i \xrightarrow{f_{i+1}} \ldots \xrightarrow{f_n} X_n$$

длины n в последовательность

$$X_0 \xrightarrow{f_1} \ldots \xrightarrow{f_{i-1}} X_{i-1} \xrightarrow{f_{i+1} \circ f_i} X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \ldots \xrightarrow{f_n} X_n$$

длины $n-1$. Несложно проверить, что симплициальные тождества для $N\mathcal{C}$ выполняются. Полученное симплициальное множество $N\mathcal{C}$ называется **нервом** категории $\mathcal{C}$.

Замечание 2.2.22. Уже в случае, когда $\mathcal{C} = G$ — группа (то есть, категория с одним объектом, все объекты которой — изоморфизмы), нерв категории G весьма интересен: он (точнее, его геометрическая реализация) играет роль модели классифицирующего пространства BG.

Пример 2.2.23. Определим *ковариантный* фунтор $\Delta^{\mathrm{top}}\colon \Delta \to \mathfrak{Top}$, отправив $[n]$ в **стандартный топологический n-симплекс**

$$\Delta_n^{\mathrm{top}} = \{(x_0, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geqslant 0,\ x_0 + \dots + x_n = 1\}.$$

Нетрудно убедить себя, что геометрически Δ_0^{top} выглядит как точка, Δ_1^{top} как отрезок, Δ_2^{top} как треугольник, и так далее. Для задания функтора Δ^{top} осталось определить отображения кограни и ковырождения. Непрерывное отображение $d^i\colon \Delta_{n-1}^{\mathrm{top}} \to \Delta_n^{\mathrm{top}}$ вставляет 0 в позиции с номером i, а непрерывное отображение $s^i\colon \Delta_{n+1}^{\mathrm{top}} \to \Delta_n^{\mathrm{top}}$ складывает координаты x_i и x_{i+1}. Геометрически это соответствует отображению $\Delta_{n-1}^{\mathrm{top}}$ в i-ю грань n-симплекса Δ_n^{top} и проекции $(n+1)$-симплекса $\Delta_{n+1}^{\mathrm{top}}$ на n-симплекс, ортогональный i-й грани.

Замечание 2.2.24. Напомним, что контравариантный функтор из Δ в $\mathcal{C}$ называется симплициальным объектом в категории $\mathcal{C}$. Поэтому *ковариантный* функтор из Δ в $\mathcal{C}$ называется **косимплициальным объектом в категории** $\mathcal{C}$.

Определение 2.2.25. Пусть Y — произвольное топологическое пространство. Определим симплициальное множество SY, применив функтор $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}}(-, Y)$ к косимплициальному множеству Δ^{top}. А именно, положим $SY_n = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}}(Delta_n^{\mathrm{top}}, Y)$ и определим отображения грани $d_i\colon \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}}(\Delta_{n+1}^{\mathrm{top}}, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}}(\Delta_n^{\mathrm{top}}, Y)$ и вырождения $s_i\colon \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}}(\Delta_{n-1}^{\mathrm{top}}, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}}(\Delta_n^{\mathrm{top}}, Y)$ как отображения композиции с $d^i\colon \Delta_n^{\mathrm{top}} \to \Delta_{n+1}^{\mathrm{top}}$ и $s^i\colon \Delta_n^{\mathrm{top}} \to \Delta_{n-1}^{\mathrm{top}}$, соответственно. Очевидно, что морфизмы d_i и s_i удовлетворяют симплициальным тождествам (поскольку d^i и s^i удовлетворяют двойственным тождествам). Полученное симплициальное множество SY называется **тотальным сингулярным комплексом** топологического пространства Y.

Замечание 2.2.26. Конструкция тотального сингулярного комплекса функториальна: S является функтором из категории $\mathfrak{Top}$ в категорию $\mathfrak{sSets}$. Построим теперь по симплициальному множеству SY симплициальную группу FSY, в которой FSY_k — это свободная абелева группа на множестве SY_k; каждое отображение множеств d_i, s_i превращается в гомоморфизм соответствующих свободных абелевых групп очевидным образом. После этого забудем про полученные гомоморфизмы вырождения s_i, а из гомоморфизмов грани $d_i\colon FSY_{n+1} \to FSY_n$ соорудим один гомоморфизм $d = \sum_i (-1)^i d_i\colon FSY_{n+1} \to FSY_n$ для каждого n, взяв знакочередующиеся суммы. Мы получим цепочку [свободных] абелевых групп и гомоморфизмов между ними

$$FSY_0 \xleftarrow{d} FSY_1 \xleftarrow{d} FSY_2 \xleftarrow{d} \dots,$$

причем композиция двух подряд идущих морфизмов в ней нулевая ($d^2 = 0$; это нетрудно проверить: «граница границы равна нулю»). Такая цепочка называется **цепным комплексом** абелевых групп. Наконец, возьмем **n-е гомологии** $H_n(FSY) = \mathrm{Ker}(d\colon FSY_n \to FSY_{n-1}) / \mathrm{Im}(d\colon FSY_{n+1} \to FSY_n)$. Полученная абелева группа обозначается через $H_n(Y, \mathbb{Z})$: мы построили **сингулярные гомологии** топологического пространства Y. Таким образом, функтор $H_n(-, \mathbb{Z})$ является композицией

$$\mathfrak{Top} \xrightarrow{S} \mathfrak{sSets} \xrightarrow{F} \mathfrak{sAb} \xrightarrow{\sum_i (-1)^i d_i} \mathfrak{Ch}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{H_n} \mathfrak{Ab},$$

где $\mathfrak{Ab}$ — категория абелевых групп, $\mathfrak{sAb} = \mathfrak{Ab}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ — категория симплициальных абелевых групп, а $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{Z}}$ — категория комплексов $\mathbb{Z}$-модулей (= абелевых групп).

2.3 Пределы и копределы

Определение 2.3.1. Пусть $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ — функтор. Объект $L \in \mathcal{C}$ вместе с морфизмами $L \to D(i)$ для всех $i \in \mathcal{J}$ такими, что диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d] \arrow[dr] & \\ D(i) \arrow[r] & D(j) \end{tikzcd}$$

коммутируют для всех морфизмов $i \to j$ в $\mathcal{J}$, называется **пределом** функтора D, если L универсален среди таких объектов с таким набором морфизмом, то есть, для любого объекта $X \in \mathcal{C}$ вместе с морфизмами $X \to D(i)$, коммутирующими с образами морфизмов из $\mathcal{J}$, существует единственный морфизм $L \to X$, делающий коммутативными все диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[dl] \\ D(i) & \end{tikzcd}$$

Определение 2.3.2. Для понимания определения предела полезно ввести следующие вспомогательные понятия. Функтор вида $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ мы будем называть **диаграммой типа $\mathcal{J}$ в $\mathcal{C}$**. Для объектов $i, j, \dots \in \mathcal{J}$ мы часто будем писать $D_i, D_j, \dots$ вместо $D(i), D(j), \dots$; аналогично — для морфизмов. Напомним, что задание диаграммы типа $\mathcal{J}$ состоит из задания объектов $D(i) \in \mathcal{C}$ для всех $i \in \mathcal{J}$ и морфизмов $D(f) \in \mathcal{C}$ для всех $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{J})$ так, что это задание согласовано с композицией и тождественными морфизмами. **Конусом** над диаграммой D называется объект $X \in \mathcal{C}$ вместе с набором стрелок вида $X_i\colon X \to D(i)$ для всех $i \in \mathcal{J}$, для которых диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "X_i"'] \arrow[dr, "X_j"] & \\ D_f \arrow[r, "D_i"'] & D_j \end{tikzcd}$$

коммутативны для всех морфизмов $f\colon i \to j$ в $\mathcal{D}$. Если $(X, \{X_i\})$, $(Y, \{Y_i\})$ — два конуса над диаграммой F, то **морфизмом конусов** $\varphi\colon (X, \{X_i\}) \to (Y, \{Y_i\})$ называется морфизм $\varphi\colon X \to Y$ в категории $\mathcal{C}$ такой, что диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "X_i"'] & Y \arrow[dl, "Y_i"] \\ D_i & \end{tikzcd}$$

коммутативны для всех объектов $i \in \mathcal{D}$. Нетрудно понять, что все конусы над диаграммой D образуют категорию $\mathrm{Cone}(D)$. Тогда **предел** диаграммы D — это просто терминальный объект в этой категории. Мы иногда будем допускать вольность речи, называя пределом сам объект, образующий «вершину» предельного конуса, и обозначать его через $\varprojlim D$. Предел называется **конечным**, если категория $\mathcal{J}$ конечна.

Пример 2.3.3. Пусть $\mathcal{J} = \{1, 2\}$ — дискретная категория из двух объектов и без нетривиальных морфизмов. Диаграмма типа $\mathcal{J}$ в $\mathcal{C}$ — это пара объектов $D_1, D_2 \in \mathcal{C}$. Конус над такой диаграммой — это объект $X \in \mathcal{C}$ вместе с морфизмами $X_1\colon X \to D_1$ и $X_2\colon X \to D_2$. Предел такой диаграммы — это в точности произведение $D_1 \times D_2$ этих объектов в $\mathcal{C}$.

Пример 2.3.4. Пусть $\mathcal{J}$ — категория вида

$$1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 2.$$

Диаграмма типа $\mathcal{J}$ в $\mathcal{C}$ — это пара морфизмов $D_\alpha, D_\beta \colon D_1 \to D_2$ в категории $\mathcal{C}$. Конус над такой диаграммой — это пара морфизмов $X_1 \colon X \to D_1$, $X_2 \colon X \to D_2$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "X_1"'] \arrow[dr, "X_2"] & \\ D_1 \arrow[r, shift left, "D_\alpha"] \arrow[r, shift right, "D_\beta"'] & D_2. \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $D_\alpha \circ X_1 = X_2$ и $D_\beta \circ X_1 = X_2$. Заметим, что для задания конуса достаточно задать один морфизм $X_1 \colon X \to D_1$ такой, что $D_\alpha \circ X_1 = D_\beta \circ X_2$. Поэтому предел такой диаграммы — это уравнитель морфизмов D_α и D_β.

Пример 2.3.5. Если $\mathcal{J}$ — пустая категория, то есть лишь одна диаграмма типа $\mathcal{J}$ в $\mathcal{C}$; ее предел — это терминальный объект в $\mathcal{C}$.

Пример 2.3.6. Пусть $\mathcal{J}$ — категория вида

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$$

Диаграмма типа $\mathcal{J}$ выглядит так:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Ее предел называется **расслоенным произведением** A и B над C и обозначается через $A \times_C B$. Канонический морфизм $A \times_C B \to A$ называется **пулбэком** g **вдоль** f, а морфизм $A \times_C B \to B$ — **пулбэком** f **вдоль** g.

Теорема 2.3.7. *В категории есть все конечные пределы тогда и только тогда, когда в ней есть конечные произведения и уравнители.*

Доказательство. Как мы видели в примерах 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5, из существования конечных пределов следует существование конечных произведений и уравнителей. Обратно, рассмотрим конечную диаграмму $D \colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Первая идея состоит в том, чтобы рассмотреть произведение $\prod_{i \in \mathcal{J}} D_i$ по всем объектам категории $\mathcal{D}$ вместе с проекциями в D_i. Однако, эти морфизмы не будут коммутировать со стрелками $D_f \colon D_i \to D_j$. Поэтому рассмотрим также произведение $\prod_{(f \colon i \to j) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{J})} D_j$ по всем морфизмам категории $\mathcal{D}$. Построим два отображения

$$\prod_i D_i \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \prod_{f \colon i \to j} D_j$$

следующим образом: для каждого морфизма $f \colon i \to j$ в $\mathcal{J}$ положим $\alpha_f \colon \prod_i D_i \to D_j$ равным проекции $\prod_i D_i \to D_j$ на сомножитель, занумерованный D_j, и положим $\beta_f \colon \prod_D F(D) \to$

$F(D_2)$ равным композиции $\prod_D F(D) \to F(D_1) \to F(D_2)$ проекции на сомножитель, занумерованный D_1, и морфизма $F(f)\colon F(D_1) \to F(D_2)$. Наборы $(\alpha_f)_{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})}$ и $(\beta_f)_{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})}$ задают нужные морфизмы α и β в произведение.

Неформально говоря, морфизмы α и β символизируют пары морфизмов, которые должны совпасть для того, чтобы структурные морфизмы конуса, который мы строим, коммутировали с образами морфизмов из $\mathcal{D}$. Рассмотрим уравнитель морфизмов α и β:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & \prod_i D(i) \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \prod_{f\colon i \to j} D_j \end{tikzcd}$$

Теперь мы можем рассмотреть композиции e с проекциями на D_i; получим конус над D с вершиной в E. Упражнение: проверьте, что E является пределом диаграммы D. □

Замечание 2.3.8. В доказательстве теоремы 2.3.7 конечность категории $\mathcal{J}$ использовалась лишь для существования некоторых произведений. Поэтому верен более общий факт: в категории есть все пределы мощности $\leqslant \kappa$ тогда и только тогда, когда в ней есть уравнители и произведения мощности $\leqslant \kappa$.

Определение 2.3.9. Говорят, что функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ **сохраняет пределы типа** $\mathcal{J}$, если из того, что $(L, \{L_i\})$ является пределом диаграммы $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, следует, что $(F(L), \{F \circ L_i\})$ является пределом диаграммы $F \circ D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{D}$. Иными словами, $F(\varprojlim D_i) \cong \varprojlim F(D_i)$. Функтор, который сохраняет все пределы, называется **непрерывным**.

Упражнение 2.3.10. *Пусть* $\mathcal{C}$ *— категория,* $C \in \mathcal{C}$. *Представимый функтор* $\mathrm{Hom}(C, -)$ *сохраняет пределы.*

Замечание 2.3.11. Нетрудно понять, что функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$ сохраняет произведения. Действительно, если $X, Y \in \mathcal{C}$, и $X \times Y$ — произведение этих объектов в $\mathcal{C}$, то $\mathrm{Hom}(C, X \times Y) \cong \mathrm{Hom}(C, X) \times \mathrm{Hom}(C, Y)$ (это фактически и есть определение произведения). Кроме того, представимый функтор сохраняет уравнители. Действительно, пусть (E, e) — уравнитель морфизмов $\alpha, \beta\colon X \to Y$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & X \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

Применим к этой диаграмме функтор $\mathrm{Hom}(C, -)$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(C, E) \arrow[r, "e \circ -"] & \mathrm{Hom}(C, X) \arrow[r, shift left, "\alpha \circ -"] \arrow[r, shift right, "\beta \circ -"'] & \mathrm{Hom}(C, Y) \end{tikzcd}$$

Нам нужно показать, что полученная диаграмма является уравнителем в категории $\mathfrak{Sets}$. Возьмем для этого произвольное отображение множеств $f\colon Z \to \mathrm{Hom}(C, X)$ такое, что $(\alpha \circ -) \circ f = (\beta \circ -) \circ f$ и покажем, что оно единственным образом пропускается через $\mathrm{Hom}(C, E)$. Для каждой точки $z \in Z$ у нас есть морфизм $f(z)\colon C \to X$ в категории $\mathcal{C}$. По условию $\alpha \circ f(z) = \beta \circ f(z)$. Но это значит, что морфизм $f(z)$ пропускается через уравнитель E:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & X \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & Y \\ & C \arrow[ul, dashed, "\widetilde{f}(z)"] \arrow[u, "f(z)"'] & \end{tikzcd}$$

Полученный морфизм $C \to E$ обозначим через $\widetilde{f}(z)$. Проделав эту процедуру для всех $z \in Z$, мы получим отображение множеств $\widetilde{f}\colon Z \to \mathrm{Hom}(C, E)$. Нетрудно проверить, что это и есть единственный способ пропустить f через $\mathrm{Hom}(C, E)$.

2.4 Сопряженные функторы

Пример 2.4.1. Вспомним определение свободного моноида (см. 1.5.7): если X — множество, то свободным моноидом называется моноид $F(X)$ вместе с отображением множеств $i\colon X \to F(X)$ таким, что для любого моноида M и для любого отображения множеств $f\colon X \to M$ существует единственный гомоморфизм моноидов $\widetilde{f}\colon F(X) \to M$ такой, что $f = \widetilde{f} \circ i$. В этом определении сущность немного затуманена тем фактом, что мы обозначаем одной буквой (например, M) объекты разных категорий: категории моноидов и категории множеств (имея в виду множество, на котором M задает структуру моноида). Поэтому введем явное обозначение $U\colon \mathfrak{Mons} \to \mathfrak{Sets}$ для «забывающего» функтора, который сопоставляет каждому моноиду множество его элементов. Тогда определение свободного моноида говорит, что каждому отображению множеств $f\colon X \to U(M)$ можно сопоставить гомоморфизм моноидов $\widetilde{f}\colon F(X) \to M$ так, что $f = \widetilde{f} \circ i$. Верно и обратное: по каждому гомоморфизму моноидов $\widetilde{f}\colon F(X) \to M$ однозначно восстанавливается отображение множеств f, из которого он приходит. Действительно, достаточно положить $f = \widetilde{f} \circ i$.

Таким образом, определение свободного моноида фактически утверждает существование биекции между $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Sets}}(X, U(M))$ и $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Mons}}(F(X), M)$. Заметим, кроме того, что $F\colon \mathfrak{Sets} \to \mathfrak{Mons}$ является функтором. Оказывается, что эта биекция еще и ведет себя естественным образом при «замене» аргументов X и M при помощи морфизмов.

Определение 2.4.2. Пусть $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ — категории, и $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $U\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — функторы между ними. Говорят, что функторы U и F **сопряжены**, если для любых объектов $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$ существует биекция

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, U(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y),$$

естественная по X и по Y. При этом функтор F называется **левым сопряженным** к функтору U, а U — **правым сопряженным** к F. Обозначение: $F \vdash U$.

Замечание 2.4.3. Наличие естественной биекции в определении 2.4.2 можно сформулировать так: имеется естественный изоморфизм между бифункторами

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U(-)), \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathfrak{Sets}.$$

Замечание 2.4.4. Пример 2.4.1 является типичным примером функтора, *левого сопряженного к забывающему*. Многие «свободные» конструкции — свободной группы, свободной алгебры Ли, свободной категории — вкладываются в этот контекст.

Определение 2.4.5. Пусть $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $U\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ — пара сопряженных функторов: $F \vdash U$. Подставим в биекцию $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, U(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$ произвольный объект $X \in \mathcal{C}$ и $Y = F(X)$. В правой части получим множество $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X))$, в котором заведомо есть элемент $\mathrm{id}_{F(X)}$. В левой части ему соответствует некоторый элемент множества $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, U(F(X)))$, то есть, морфизм $\eta_X\colon X \to U(F(X))$ в категории $\mathcal{C}$. В силу естественности изоморфизма из определения сопряженного функтора получаем естественное преобразование η из функтора $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ в функтор $U \circ F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Это преобразование называется **единицей сопряжения** $F \vdash U$.

Аналогично, можно взять произвольный объект $Y \in \mathcal{D}$ и подставить его вместе с $X = U(Y)$ в нашу естественную биекцию. левой части получим множество $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U(Y), U(Y))$, в котором заведомо есть элемент $\mathrm{id}_{U(Y)}$. Ему соответствует некоторый морфизм $\varepsilon_Y\colon F(U(Y)) \to Y$ в категории $\mathcal{D}$. Получаем естественное преобразование ε из функтора $F \circ U\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ в функтор $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. Это преобразование называется **коединицей сопряжения** $F \vdash U$.

Пример 2.4.6. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория. Рассмотрим «диагональный» функтор $\Delta\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, который отправляет объект $X \in \mathcal{C}$ в пару $(X, X) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, а морфизм $f\colon X \to Y$

в $\mathcal{C}$ — в морфизм $(f, f)\colon (X, X) \to (Y, Y)$. Когда этот функтор имеет правый сопряженный? Такой правый сопряженный был бы функтором $R\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ таким, что есть [естественная] биекция между морфизмами $\Delta(C) \to (X, Y)$ и морфизмами $C \to R(X, Y)$. Но морфизмы из $\Delta(C) = (C, C)$ в (X, Y) — это в точности все пары морфизмов $C \to X$ и $C \to Y$. Поэтому $R(X, Y)$ должно быть изоморфно произведению $X \times Y$. Нетрудно понять, что из этого следует, что $R = \times\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Коединица $\eta_C\colon C \to C \times C$ совпадает с диагональной стрелкой $(\mathrm{id}_C, \mathrm{id}_C)$,

Замечание 2.4.7. Расшифруем естественность изоморфизма из определения сопряженности $F \vdash U$ по переменной Y. Пусть $g\colon Y' \to Y$ — произвольный морфизм в категории $\mathcal{C}$. Тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, U(Y')) \arrow[r] \arrow[d, "U(g)\circ-"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y') \arrow[d, "g\circ-"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, U(Y)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Зафиксируем теперь объект $X \in \mathcal{C}$, объект $Y \in \mathcal{D}$, и возьмем произвольный морфизм $f\colon X \to U(Y)$. По определению сопряженности ему соответствует морфизм $g\colon F(X) \to Y$. Получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, U(F(X))) \arrow[r] \arrow[d, "U(g)\circ-"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \arrow[d, "g\circ-"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, U(Y)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)
\end{tikzcd}$$

Мы знаем, что морфизму $\mathrm{id}_{F(X)}$ в правом верхнем углу соответствует морфизм $\eta_X\colon X \to U(F(X))$ в левом верхнем углу. После применения вертикальных стрелок справа мы получим $g\colon F(X) \to Y$, а слева — $U(g) \circ \eta_X\colon X \to U(Y)$. С другой стороны, мы знаем, что g при биекции в нижней строке соответствует f. Поэтому $f = U(g) \circ \eta_X$.

Упражнение 2.4.8. *Пусть $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $U\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — произвольные функторы. Следующие условия равносильны:*

1. $F \vdash U$*;*

2. *существует естественное преобразование $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to U \circ F$ такое, что для любых объектов $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$ и для любого морфизма $f\colon X \to U(Y)$ существует единственный морфизм $g\colon F(X) \to Y$ такой, что $f = U(g) \circ \eta_X$.*

3. *существует естественное преобразование $\eta\colon F \circ U \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ такое, что для любых объектов $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$ и для любого морфизма $g\colon F(X) \to Y$ существует единственный морфизм $f\colon X \to U(Y)$ такой, что $g = \varepsilon_Y \circ F(f)$*

Пример 2.4.9. Пусть в категории $\mathcal{C}$ есть бинарные произведения. Зафиксируем объект $A \in \mathcal{C}$ и рассмотрим функтор $- \times A\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Объект $X \in \mathcal{C}$ он отправляет в $X \times A$, а морфизм $h\colon X \to Y$ — в морфизм $h \times \mathrm{id}_A\colon X \times A \to Y \times A$. Когда у функтора $- \times A$ есть правый обратный? По определению, это был бы функтор $U\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ такой, что для любых $X, Y \in \mathcal{C}$ есть естественная биекция между морфизмами $X \times A \to Y$ и морфизмами $X \to U(Y)$. Коединица ε этого сопряжения дает естественные (по Y) отображения $\varepsilon_Y\colon Y^A \times A \to Y$ такие, что (по упражнению 2.4.8) для любого $f\colon X \times A \to Y$ существует единственный $\bar{f}\colon X \times U(Y)$ такой, что $f = \varepsilon \circ (\bar{f} \times \mathrm{id}_A)$.

Определение 2.4.10. Пусть A, Y — два объекта в категории $\mathcal{C}$ с бинарными произведениями. Через Y^A обозначается **экспоненциальный** объект (если такой существует) вместе с морфизмом $\mathrm{ev}\colon Y^A \times A \to Y$, обладающий следующим универсальным свойством: для любого $f\colon X \times A \to Y$ существует единственный $\bar{f}\colon X \to Y^A$ такой, что $f = \varepsilon \circ (\bar{f} \times \mathrm{id}_A)$.

Замечание 2.4.11. Таким образом, если в категории $\mathcal{C}$ с фиксированным объектом $A \in \mathcal{C}$ есть бинарные произведения и экспоненты вида Y^A, то у функтора произведения $- \times A$ есть правый сопряженный $-^A$.

Пример 2.4.12. Пусть $\mathcal{C} = \mathfrak{Sets}$ — категория множеств, $A \in \mathfrak{Sets}$. Тогда $Y^A = \mathrm{Hom}(A, Y)$ вместе с отображением эвалюации $\mathrm{ev}\colon Y^A \times A \to Y$, $(f, a) \mapsto f(a)$ обладает универсальным свойством из определения 2.4.10.

Упражнение 2.4.13. *Для любой категории $\mathcal{C}$ рассмотрим единственный функтор из $\mathcal{C}$ в терминальную категорию 1 (состоящую из одного объекта и одного морфизма). Когда у этого функтора есть правый сопряженный и как он выглядит? Что насчет левого сопряженного?*

Упражнение 2.4.14. *Сопряженный функтор, если он существует, единственен с точностью до изоморфизма. А именно, если у функтора $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ есть два правых сопряженных $U, V\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, то $U \cong V$.* ***Указание:*** *лемма Йонеды.*

Пример 2.4.15. Пусть $\Delta\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ — «диагональный» функтор, как в примере 2.4.6. Какой у него левый сопряженный? Такой функтор L должен переводить пару (X, Y) в объект $L(X, Y)$ такой, что морфизмы $L(X, Y) \to A$ биективно соответствуют морфизмам $(X, Y) \to (A, A)$, то есть, парам морфизмов $X \to A$, $Y \to A$. Понятно, что это должно быть копроизведение $L(X, Y) = X \coprod Y$. В примере 2.4.6 мы увидели, что $\Delta \vdash \times$, а сейчас — что $\coprod \vdash \Delta$.

Пример 2.4.16. Обобщим пример 2.4.15. Заметим, что $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \cong \mathcal{C}^2$, где 2 — дискретная категория с двумя объектами, а функтора $\Delta\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^2$ сопоставляет объекту A постоянный функтор со значением A. Заменим теперь 2 на произвольную [малую] индексную категорию $\mathcal{J}$ и рассмотрим диагональный функтор $\Delta_{\mathcal{J}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$, сопоставляющий объекту $A \in \mathcal{C}$ постоянный функтор $j \mapsto C$ $(j \in \mathcal{J})$. Несложно понять, что левый сопряженный к $\Delta_{\mathcal{J}}$ сопоставляет каждому функтору $F\colon \mathcal{J} \to \Delta$ его копредел $\varinjlim_{\mathcal{J}} F$, а правый сопряженный к $\Delta_{\mathcal{J}}$ сопоставляет функтору F его предел $\varprojlim_{\mathcal{J}} F$; они существуют тогда и только тогда, когда в $\mathcal{C}$ есть все копределы/пределы типа $\mathcal{J}$.

Упражнение 2.4.17. *Рассмотрим категорию коммутативыных колец $\mathfrak{Rings}$ и категорию* отмеченных *коммутативных колец $\mathfrak{Rings}_*$. Объекты $\mathfrak{Rings}_*$ — это пары (A, a), где A — коммутативное кольцо, и $a \in A$. Морфизмы $(A, a) \to (B, b)$ — это гомоморфизмы колец $h\colon A \to B$ такие, что $h(a) = b$ (то есть, морфизмы сохраняют отмеченную точку). Какой функтор $\mathfrak{Rings} \to \mathfrak{Rings}_*$ является левым сопряженным к «забывающему» функтору $U\colon \mathfrak{Rings}_* \to \mathfrak{Rings}$ (сопоставляющему каждой паре (A, a) кольцо A)?*

2.5 Геометрическая реализация

2.5.1. В этом разделе по каждому симплициальному множеству X мы построим топологическое пространство, называемое *геометрической реализацией* X. Напомним, что мы неформально воспринимали элементы X_n как n-симплексы: точки, отрезки, треугольники, тетраэдры... (возможно, вырожденные), а отображения грани и вырождения — как указание на то, как эти симплексы примыкают друг к другу. Геометрическая реализация доставляет конкретное воплощение этого неформального понимания. Так, геометрической реализацией стандартного n-симплекса Δ^n окажется стандартный топологический n-симплекс $\Delta_n^{\top}$. Более того, это в некотором смысле дает нам рецепт конструкции геометрической реализации: нужно положить геометрическую реализацию множества Δ^n равной $\Delta^{\top}_n$, и продолжить это сопоставление до функтора $\mathfrak{sSets} \to \mathfrak{Top}$ «естественным образом». За словами «естественным образом» здесь скрывается общая конструкция «левого расширения Кана».

Определение 2.5.2. Категория называется **полной**, если в ней существуют все малые пределы (то есть, пределы диаграмм, индексные категории которых являются малыми). Двойственным образом, категория называется **кополной**, если в ней существуют все малые копределы.

2.5.3. Пусть $\mathcal{E}$ — кополная локально малая категория, и пусть $F\colon \Delta \to \mathcal{E}$ — [ковариантный] функтор. Определим по этим данным функтор $R\colon \mathcal{E} \to \mathfrak{sSets}$, положив $Re_n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(F[n], e)$ для $e \in \mathcal{E}$. Отображения грани и вырождения для Re определяются очевидным образом — пре-композицией с образами морфизмов кограни и ковырождения под действием F. Поскольку в Δ выполняются косимплициальные тождества, Re автоматически окажется симплициальным множеством. Пост-композиция с морфимами вида $e \to e'$ превращает R в функтор. До конца этого раздела мы фиксируем функтор F и таким образом построенный по нему функтор R.

Пример 2.5.4. Пусть $\mathcal{E}$ — категория топологических пространств $\mathfrak{Top}$, и функтор $F\colon \Delta \to \mathcal{E}$ сопоставляет объекту $[n] \in \Delta$ стандартный топологический n-симплекс $\Delta^{\top}_n$. Тогда $RX_n = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}}(\Delta^{\top}_n, X)$ для $X \in \mathfrak{Top}$, и потому функтор R совпадает с функтором $S\colon \mathcal{E} \to \mathfrak{sSets}$ сингулярного симплициального множества.

Пример 2.5.5. Напомним, что объекты категории Δ — это частично упорядоченные множества вида $[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\}$. Каждое частично упорядоченное множество можно рассматривать как категорию. Кроме того, морфизмы в категории Δ — это морфизмы частично упорядоченных множеств, а это в точности функторы между соответствующими категориями. Поэтому Δ можно рассматривать как (полную) подкатегорию в категории категорий $\mathfrak{Cats}$. Пусть $\mathcal{E} = \mathfrak{Cats}$, а F — описанный функтор вложения. Тогда $R\mathcal{C}_n = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Cats}}([n], \mathcal{C})$ для любой категории $\mathcal{C}$, и потому функтор R в этом случае совпадает с функтором нерва $N\colon \mathfrak{Cats} \to \mathfrak{sSets}$.

Определение 2.5.6. Если S — любое множество, и $e \in \mathcal{E}$, можно рассмотреть **костепень** объекта e — это копроизведение $\coprod_S e$ копий объекта e, проиндексированных элементами множества S. Мы будем обозначать такое копроизведение через $S \cdot e$.

Определение 2.5.7. В частности, если X — симплициальное множество, можно рассмотреть объекты вида $X_m \cdot F[n]$ в категории e для всех натуральных n, m. Если $f\colon [n] \to [m]$ — морфизм в категории Δ, то имеется морфизм $F(f)\colon F[n] \to F[m]$ в категории $\mathcal{E}$ (поскольку F — ковариантный функтор), и поэтому есть отображение

$$f_*\colon X_m \cdot F[n] \to X_m \cdot F[m],$$

которое каждую компоненту копроизведения $X_m \cdot F[n]$, соответствующую $x \in X_m$, переводит в компоненту копроизведения $X_m \cdot F[n]$, соответствующую тому же $x \in X_m$, с помощью морфизма $F(f)$. С другой стороны, морфизм f задает отображение множеств $X_m \cdot X_n$, и потому возникает морфизм

$$f^*\colon X_m \cdot F[n] \cdot X_n \cdot F[n],$$

который переводит компоненту копроизведения $X_m \cdot F[n]$, соответствующую $x \in X_m$, в компоненту копроизведения $X_n \cdot F[n]$, соответствующую элементу $(x)f \in X_n$, с помощью тождественного отображения. Таким образом, для каждого морфизма $f\colon [n] \to [m]$ в категории Δ мы построили морфизмы

$$\begin{tikzcd} X_m \cdot F[n] \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "f^*"] & X_m \cdot F[m] \\ X_n \cdot F[n] & \end{tikzcd}$$

Рассмотрим диаграмму $\mathcal{D}(X)$ в категории $\mathcal{E}$, объекты которой — костепени вида $X_m \cdot F[n]$ для всех натуральных m, n, а морфизмы — построенные морфизмы вида f_* и f^* для всех морфизмов f в категории Δ. **Клином** под диаграммой $\mathcal{D}(X)$ называется объект $e \in \mathcal{E}$ вместе с морфизмами $\gamma_n\colon X_n \cdot F[n] \to e$ такими, что квадраты вида

$$\begin{tikzcd} X_m \cdot F[n] \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "f^*"] & X_m \cdot F[m] \arrow[d, "\gamma_m"] \\ X_n \cdot F[n] \arrow[r, "\gamma_n"] & e \end{tikzcd}$$

коммутативны для всех f. **Коконец** $\int^n X_n \cdot F[n]$ — это универсальный клин, то есть, начальный объект в категории таких клинов. Его несложно построить явно; это коуравнитель в следующей диаграмме:

$$\coprod_{f\colon [n]\to[m]} X_m \cdot F[n] \underset{f^*}{\overset{f_*}{\rightrightarrows}} \coprod_{[n]} X_n \cdot F[n] \dashrightarrow \int^n X_n \cdot F[n]$$

2.5.8. Перейдем к построению функтора $L\colon \mathfrak{sSets} \to \mathcal{E}$, левого сопряженного к функтору $R\colon \mathcal{E} \to \mathfrak{sSets}$. Определим значение функтора L на объекте $X \in \mathfrak{sSets}$, положив

$$L(X) = \int^n X_n \cdot F[n].$$

Несложно проверить, что морфизм $\alpha\colon X \to Y$ симплициальных множеств задает клин под диаграммой $\mathcal{D}(X)$ с вершиной в объекте $L(Y)$. По универсальному свойству этот клин задает морфизм $L(\alpha)\colon L(X) \to L(Y)$. Единственность в универсальном свойстве гарантирует, что L действительно является функтором.

Упражнение 2.5.9. *Проверьте, что* $L(\Delta^n) \cong F[n]$. *Указание: для* $X = \Delta^n$ *постройте клин под диаграммой* $\mathcal{D}(X)$ *с вершиной* $F[n]$ *и проверьте, что он универсальный, воспользовавшись леммой Йонеды.*

Предложение 2.5.10. *Построенный функтор* L *является левым сопряженным к функтору* R.

Доказательство. Пусть $e \in \mathcal{E}$. По лемме Йонеды $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sSets}}(\Delta^n, R(e)) \cong Re_n$. По определению функтора R, $Re_n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(F[n], e)$ Наконец, в упражнении 2.5.9 показано, что $F[n] \cong L(\Delta^n)$, и потому $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(F[n], e) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(L(\Delta^n), e)$. Таким образом, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sSets}}(\Delta^n, R(e))$ естественно изоморфно $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(L(\Delta^n), e)$. Следующее упражнение показывает, что любое симплициальное множество канонически задается как копредел стандартных n-симплексов. Поскольку функтор L задается с помощью копредела, он коммутирует с копределами. Поэтому значение L полностью определяется его значениями на Δ^n, и того, что мы показали, достаточно для установления сопряженности. $\square$

Упражнение 2.5.11. *Пусть $X \in \mathfrak{sSets}$ — произвольное симплициальное множество. Рассмотрим категорию $\Delta \downarrow X$: объекты — морфизмы вида $\Delta^n \to X$, а морфизмы из $f\colon \Delta^n \to X$ $g\colon \Delta^m \to X$ — это морфизмы $\alpha\colon [n] \to [m]$ в категории Δ такие, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\Delta^n \arrow[rr, "\Delta^\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & & \Delta^m \arrow[dl, "g"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Рассмотрим «забывающий функтор» $\Delta \downarrow X \to \mathfrak{sSets}$, сопоставляющий объекту $(\Delta^n \to X)$ симплициальное множество Δ^n. Покажите, что X является копределом этого функтора. Таким образом, любое симплициальное множество является копределом стандартных n-симплексов.

Пример 2.5.12. В примере 2.5.4 мы поняли, как функтор сингулярного симплициального множества $S\colon \mathfrak{Top} \to \mathfrak{sSets}$ получается из функтора $\Delta \to \mathfrak{Top}$ геометрического стандартного симплекса. Конструкция из пункта 2.5.8 дает нам левый сопряженный к S функтор $|-|\colon \mathfrak{sSets} \to \mathfrak{Top}$, называемый **геометрической реализацией** симплициального множества X.

Пример 2.5.13. В примере 2.5.5 мы поняли, как получатся функтор нерва $N\colon \mathfrak{Cats} \to \mathfrak{sSets}$. Конструкция из пункта 2.5.8 дает нам левый сопряженный к N функтор $\tau_1\colon \mathfrak{sSets} \to \mathfrak{Cats}$ и называется «первой срезкой». Оказывается, образ симплициального множества X под действием этого функтора полностью определяется его 0-, 1- и 2-симплексами (и морфизмами между ними). Сейчас мы построим τ_1 явно. Итак, по симплициальному множеству X мы должны построить категорию $\tau_1 X$. Пусть ее объекты — это X_0, 0-симплексы в X. Заметим, что у нас есть отображение вырождения $s_0\colon X_0 \to X_1$ и отображения грани $d_1, d_0\colon X_1 \to X_0$. Сейчас мы немного подправим множество X_1 так, что оно превратится в множество морфизмов нашей категории $\tau_1 X$, отображение s_0 станет сопоставлять каждому объекту его тождественный морфизм, а отображения d_1, d_0 станут сопоставлять каждому морфизму его область и кообласть, соответственно. В качестве $\tau_1 X$ в итоге нужно взять свободный граф на вершинах X_0, порожденный стрелками из X_1, профакторизованный по некоторым соотношениям. А именно, для каждого 2-симплекса $x \in X_2$ рассмотрим $f = (x)d^2$, $g = (x)d^0$ и $h = (x)d^1$. Наложим на $\tau_1 X$ соотношение $h = gf$. Несложно понять, что мы получили категорию. Упражнение: проверьте напрямую, что такая конструкция τ_1 дает левый сопряженный функтор к N.

Пример 2.5.14. Пусть G — группа. Ее можно рассмотреть как категорию с одним объектом (в которой все морфизмы обратимы), и потому определено симплициальное множество $N(G)$. Его геометрическая реализация называется **классифицирующим пространством** группы G и обозначается через $BG = |N(G)|$.

Определение 2.5.15. Категория $\mathcal{C}$ называется **декартово замкнутой**, если для любого объекта $C \in \mathcal{C}$ функтор $- \times C\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ имеет правый сопряженный. Иными словами, в $\mathcal{C}$ существуют (функториальные) экспоненты для всех объектов (см. определение 2.4.10 и замечание 2.4.11).

Пример 2.5.16. Сейчас мы покажем, что категория $\mathfrak{sSets}$ декартово замкнута. Зафиксируем симплициальное множество Y и рассмотрим функтор $F\colon \Delta \to \mathfrak{sSets}$, который задан на объектах правилом $[n] \mapsto \Delta^n \times Y$, а на морфизмах — правилом $f \mapsto f \times 1_Y$. Конструкция 2.5.8

дает нам левое расширение Кана функтора F вдоль вложения Йонеды $y\colon \Delta \to s\mathfrak{Sets}$. Но F уже является композицией y с функтором $- \times Y$. Поэтому L совпадает с функтором $- \times Y$. Правый сопряженный к нему $R\colon s\mathfrak{Sets} \to s\mathfrak{Sets}$ обычно обозначается через $[Y, -]$ или через $(-)^Y$ и называется **внутренним** Hom. Судя по нашему определению функтора R (см. пункт 2.5.3), для симплициального множества Z мы имеем

$$(RZ)_n = [Y, Z]_n = \mathrm{Hom}_{s\mathfrak{Sets}}(\Delta^n \times Y, Z).$$

А именно, n-симплексы объекта $[Y, Z]$ — это естественные преобразования $\Delta^n \times Y \to Z$. Отображения грани и вырождения задаются как пре-композиции с отображениями кограни и ковырождения между Δ^n. Итак, мы явно описали симплициальное множество $[Y, Z]$ такое, что $\mathrm{Hom}_{s\mathfrak{Sets}}(X \times Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_{s\mathfrak{Sets}}(X, [Y, Z])$.

3 ∞-категории

3.1 Комплексы Кана

Определение 3.1.1. Пусть Y, X — два симплициальных множества, причем $Y_n \subseteq X_n$ для всех n, и для любого морфизма $f\colon [m] \to [n]$ в категории Δ ограничение отображения $X(f)$ на Y_n совпадает с $Y(f)$. В таком случае мы будем говорить, что Y — **[симплициальное] подмножество** симплициального множества X. Нетрудно понять, что вложение $Y \to X$ является мономорфизмом в $s\mathfrak{Sets}$. Если задано симплициальное множество X, для задания его симплициального подмножества достаточно задать его «образующие», то есть, произвольный набор симплексов S в X, и рассмотреть наименьшее симплициальное подмножество в X, содержащее S. Нетрудно понять, что его k-симплексы — это в точности k-симплексы X, являющиеся образами некоторых элементов S относительно отображений вида $X(f)$, где f — морфизм в Δ.

Пример 3.1.2. Пусть $X = \Delta^n$ — стандартный n-симплекс. Пусть S состоит из одного $(n-1)$-симплекса $d^i \in \Delta^n_{n-1} = \mathrm{Hom}([n-1], [n])$. Симплициальное множество, порожденное этим S, обозначается через $\partial_i \Delta^n$ и называется **i-ой гранью** симплекса Δ^n.

Пример 3.1.3. Пусть снова $X = \Delta^n$, а S состоит из всех $(n-1)$-симплексов вида $d^0, \dots, d^n$. Альтернативно, рассмотрим симплициальное множество, порожденное объединением всех граней $\partial_0 \Delta^n, \dots, \partial_n \Delta^n$. Оно называется **симплициальной n-сферой** и обозначается через $\partial \Delta^n$. Морфизм симплициальных множеств вида $\partial \Delta^n \to X$ называется **n-сферой в** X.

Упражнение 3.1.4. *Покажите, что симплициальная n-сфера $\partial \Delta^n$ является копределом диаграммы, состоящей из всех граней $\partial_i \Delta^n$ вместе с вложениями всех границ этих граней ($(n-2)$-симплексов) в каждую из двух граней, в которой содержится такой $(n-2)$-симплекс.*

Определение 3.1.5. Пусть X — симплициальное множество, n — натуральное число. Обозначим через $\mathrm{sk}_n(X)$ **симплициальный n-скелет** X — симплициальное подмножество в X, порожденное всеми симплексами X степени не выше n.

Упражнение 3.1.6. *Покажите, что $(\partial \Delta^n)_k = \Delta^n_k$ для всех $k < n$, и что все старшие симплексы симплициальной сферы $\partial \Delta^n$ являются вырожденными. Это означает, что $\partial \Delta^n$ является симплициальным $(n-1)$-скелетом стандартного симплекса Δ^n.*

Пример 3.1.7. Пусть $X = \Delta^n$; рассмотрим объединение всех граней Δ^n, кроме k-ой. Это симплициальное подмножество, порожденное элементами $\{d^0, \dots, d^{k-1}, d^{k+1}, \dots, d^n\}$. Оно называется **симплициальным** (n, k)**-рогом** и обозначается через Λ^n_k. Несложно понять, что $(\Lambda^n_k)_j = \Delta^n_j$, если $j < n-1$, и $(\Lambda^n_{n-1})_j = \Delta^n_{n-1} \setminus \{d^k\}$, а все старшие симплексы вырождены. Морфизм симплициальных множеств вида $\Lambda^n_k \to X$ называется **рогом в** X.

Определение 3.1.8. Симплициальное множество X называется **комплексом Кана**, если любой рог можно «заполнить», то есть, каждый морфизм $\Lambda^n_k \to X$ продолжается до вложения Δ^n в X:

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Лемма 3.1.9. *Симплициальное множество SX является комплексом Кана для любого топологического пространства X.*

Доказательство. Воспользуемся сопряженностью из примера 2.5.12. Мы получим диаграмму вида

$$\begin{tikzcd} |\Lambda^n_k| \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \\ |\Delta^n| \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

в категории топологических пространств. Но топологический (n, k)-рог $|\Lambda^n_k|$ является деформационным ретрактом стандартного топологического n-симплекса $|\Delta^n|$, поэтому нужное поднятие существует. Сопряженность теперь дает нам морфизм $\Delta^n \to S(X)$. □

Определение 3.1.10. Симплициальное множество X называется **квази-категорией**, или **∞-категорией**, если любой **внутренний** рог (то есть, рог вида Λ^n_k, где $0 < k < n$) можно заполнить.

Упражнение 3.1.11. *Для любой категории $\mathcal{C}$ ее нерв $N(\mathcal{C})$ является ∞-категорией. Более того, в $N(\mathcal{C})$ у любого внутреннего рога есть* единственное *заполнение. Обратно, если в ∞-категории у любого внутреннего рога есть единственное заполнение, то она изоморфна нерву некоторой категории.*

Определение 3.1.12. Морфизм $p\colon X \to Y$ симплициальных множеств называется **расслоением [Кана]**, если для любой коммутативной диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y \end{tikzcd}$$

существует морфизм $\Delta^n \to X$, превращающий ее в два коммутативных треугольника.

Замечание 3.1.13. Симплициальное множество X является комплексом Кана тогда и только тогда, когда [единственный] морфизм $X \to *$ является расслоением, где $* = \Delta^0$ — терминальное симплициальное множество (точка). Комплексы Кана также называются **фибрантными** симплициальными множествами

Определение 3.1.14. Непрерывное отображение топологических пространств $f\colon T \to U$ называется **расслоением Серра**, если для любой коммутативной диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} |\Lambda^n_k| \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ |\Delta^n| \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y \end{tikzcd}$$

существует морфизм $|\Delta^n| \to X$, превращающий ее в два коммутативных треугольника.

Замечание 3.1.15. В силу сопряженности из примера 2.5.12 диаграмма из определения 3.1.14 — это в точности диаграмма вида

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook] & S(T) \arrow[d, "S(f)"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & S(U) \end{tikzcd}$$

в категории $\mathfrak{sSets}$. Поэтому $f\colon T \to U$ является расслоением Серра тогда и только тогда, когда $S(f)\colon S(T) \to S(U)$ является расслоением Кана.

3.1.16. В следующих упражнениях приводится явная переформулировка определений расслоения Кана и комплекса Кана.

Упражнение 3.1.17. *Множество* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sSets}}(\Lambda^n_k, X)$ *морфизмов симплициальных множеств из рога* Λ^n_k *в* X *можно описать как множество наборов* $(y_0, \ldots, \widehat{y_k}, \ldots, y_n\}$ *длины* n, *где каждый* y_i *является* $(n-1)$*-симплексом в* X, *причем* $d_i y_j = d_{j-1} y_i$ *для всех* $i < j$ *таких, что* $i, j \neq k$.

Упражнение 3.1.18. *Морфизм* $p\colon X \to Y$ *симплициальных множеств является расслоением Кана тогда и только тогда, когда для любого набора* $(x_0, \ldots, \widehat{x_k}, \ldots, x_n)$ *из* $(n-1)$*-симплексов в* X *таких, что* $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ *при* $i < j$, $i, j \neq k$, *из того, что существует* n*-симплекс* y *в* Y *такой, что* $d_i(y) = p(x_i)$ *следует, что существует* n*-симплекс* x *в* X *такой, что* $d_i(x) = x_i$ *и* $p(x) = y$.

Упражнение 3.1.19. *Симплициальное множество* X *является комплексом Кана тогда и только тогда, когда для любого набора* $(x_0, \ldots, \widehat{x_k}, \ldots, x_n)$, *состоящего из* $(n-1)$*-симплексов в* Y, *такого, что* $d_i y_j = d_{j-1} y_i$, *существует* n*-симплекс* y *такой, что* $d_i y = y_i$.

Определение 3.1.20. **Симплициальной группой** называется симплициальный объект в категории групп, то есть, контравариантный функтор из категории Δ в категорию групп.

Лемма 3.1.21 (Moore). *Подлежащее симплициальное множество любой симплициальной группы является комплексом Кана.*

Доказательство. Мы проверим условие из упражнения 3.1.19. Пусть... □

Лемма 3.1.22. *Пусть* $\mathcal{C}$ *— малая категория,* X *— симплициальное множество. Морфизм симплициальных множеств* $X \to N\mathcal{C}$ *полностью определяется своим ограничением на* $\mathrm{sk}_2(X)$. *Иными словами, множество* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sSets}}(X, N\mathcal{C})$ *находится в естественной биекции с множеством троек отображений* (f_0, f_1, f_2), *где* $f_i\colon (N\mathcal{C})_i$, *коммутирующих с отображениями грани и ограничения между* 0-, 1- *и* 2*-симплексами.*

Доказательство. Любое симплициальное множество X является копределом стандартных симплексов вида Δ^n, поэтому достаточно доказать лемму для $X = \Delta^n$. Но $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sSets}}(\Delta^n, N\mathcal{C}) \cong (N\mathcal{C})_n$ по лемме Йонеды, что совпадает с $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Cats}}([n], \mathcal{C})$. Элемент этого множества, то есть, функтор $f\colon [n] \to \mathcal{C}$, полностью определяется своим действием на вершинах (f_0), на морфизмах (f_1) и требованием согласованности с композицией (f_2). □

Предложение 3.1.23. *Нерв группоида является комплексом Кана. В частности, нерв группы является комплексом Кана.*

Доказательство. Вложение $\Lambda^n_k \subseteq \Delta^n$ индуцирует изоморфизм между $\mathrm{sk}_{n-1}\Lambda^n_k$ и $\mathrm{sk}_{n-1}\Delta^n$. Поэтому свойство поднятия

выполнено для $n \geqslant 4$ (в этом случае $\mathrm{sk}_2\Lambda^n_k$ совпадает с $\mathrm{sk}_2\Delta^n$). □

3.2 Мотивация

Мы должны пояснить мотивацию понятия ∞-категории. Во многих реальных категориях наличие морфизма $f\colon X \to Y$ говорит о том, что между объектами X и Y существует некоторая связь, и иногда сами эти связи становятся главными объектами изучения: оказывается, что все возможные морфизмы из X в Y сами образуют категорию. Приведем три примера.

Пример 3.2.1. Пусть $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ — категории. Мы ввели понятие естественного преобразования между функторами $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Нетрудно понять, что множество $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ всех функторов из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ образует категорию, морфизмами в которой как раз являются естественные преобразования. Действительно, нетрудно проверить, что тождественное естественное преобразование играет роль тождественного морфизма, и «вертикальная» композиция естественных преобразований ассоциативна.

Пример 3.2.2. Пусть $\mathfrak{Groups}$ — категория групп; объекты в ней — группы, а морфизмы — гомоморфизмы группы. Часто нас интересуют гомоморфизмы групп лишь с точностью до сопряженности: говорят, что два гомоморфизма групп $\varphi, \varphi'\colon G \to H$ **сопряжены**, если существует элемент $h \in H$ такой, что $h\varphi(g)h^{-1} = \varphi'(g)$ для всех $g \in G$. Для каждой фиксированной пары групп $G, H \in \mathfrak{Groups}$ определим категорию $\mathrm{Map}(G, H)$, объекты которой — гомоморфизмы из G в H (то есть, элементы $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Groups}}(G, H)$), а морфизмом из $\varphi\colon G \to H$ в $\varphi'\colon G \to H$ называется элемент $h \in H$ такой, что $h\varphi(g)h^{-1} = \varphi'(g)$ для всех $g \in G$. Таким образом, два гомоморфизма групп из G в H сопряжены тогда и только тогда, когда они изоморфны как объекты $\mathrm{Map}(G, H)$.

Пример 3.2.3. Пусть X, Y — топологические пространства, и пусть $f, f'\colon X \to Y$ — два непрерывных отображения. Напомним, что **гомотопией** между f и f называется непрерывное отображение $H\colon X \times [0,1] \to Y$ такое, что $H|_{X\times\{0\}} = f$ и $H|_{X\times\{1\}} = f'$; при этом отображения f и f' называются **гомотопными**. Нетрудно проверить, что гомотопность является отношением эквивалентности. В алгебраической топологии часто нас интересуют отображения с точностью до гомотопии; а именно, **гомотопической категорией** называется категория с теми же объектами, что и $\mathfrak{Top}$, где в качестве морфизмов берутся классы гомотопности отображений. Это несколько грубая процедура: полезнее рассмотреть категорию $\mathrm{Map}(X, Y)$, объекты которой — непрерывные отображения из X в Y, а морфизмы — гомотопии, или классы гомотопности гомотопий. Разумеется, две гомотопии $H, H'\colon X \times [0,1] \to Y$ называются гомотопными, если между ними существует гомотопия высшего порядка: отображение $C\colon X \times [0,1] \times [0,1] \to Y$, для которого $C|_{X\times[0,1]\times\{0\}} = H$ и $C|_{X\times[0,1]\times\{0\}} = H'$.

Во всех приведенных примерах мы видим категории, в которых есть объекты (0-морфизмы), морфизмы между ними (1-морфизмы) и морфизмы между морфизмами (2-морфизмы). Хочется верить, что все это — примеры 2-категорий. Должно существовать и понятие n-категории для любого натурального числа n: в n-категории есть объекты, морфизмы, 2-морфизмы, ..., и вообще k-морфизмы для всех $k \leqslant n$. Наконец, должно существовать понятие ∞-категории, где есть морфизмы всех порядков. Размышления над примером 3.2.3 приводят к следующему.

Пример 3.2.4. Пусть X — топологическое пространство, а n — натуральное число или ∞. Определим n-категорию $\pi_{\leqslant n}X$ следующим образом: объекты $\pi_{\leqslant n}X$ — точки X. Для точек $x, y \in X$ морфизмы из x в y — это пути с началом x и концом y, то есть, непрерывные отображения $[0,1] \to X$, принимающие значение x в точке 0 и значение y в точке 1. Далее, если f, f' — два пути из x в y. то 2-морфизм между ними — это гомотопия между f и f'; 3-морфизмы — это гомотопии между гомотопиями, и так далее. Если $n < \infty$, мы будем считать два n-морфизма в $\pi_{\leqslant n}X$ равными, если они гомотопны друг другу.

В случае $n = 0$ мы получаем множество точек X, в котором отождествлены точки, которые можно соединить путем. Поэтому $\pi_{\leqslant 0}X$ — это просто множество $\pi_0 X$ компонент связности пространства X. Для $n = 1$ получается обычное определение фундаментального группоида из примера 1.4.5. В общем случае получается некоторая n-категория, которая иногда называется **фундаментальным n-группоидом** топологического пространства X. Это n-группоид (а не просто n-категория), поскольку каждый k-морфизм в $\pi_{\leqslant n}X$ обладает обратным (по крайней мере, с точностью до гомотопии, то есть, до морфизма высшего порядка).

Существует несколько способов реализации теории n-категорий. Например, можно начать с того, что (вдохновившись примерами 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3) определить 2-категорию как категорию, обогащенную над $\mathfrak{Cats}$.

Определение 3.2.5. Пусть $\mathcal{A}$ — категория с конечными произведениями. **Категорией, обогащенной над $\mathcal{A}$** называется задание следующих данных:

- набора объектов $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- для каждой пары $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ — объекта $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ категории $\mathcal{A}$;
- для каждой тройки $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ — морфизма $c_{ABC}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$ в категории $\mathcal{A}$ (произведение берется в категории $\mathcal{A}$);
- для каждого объекта $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ — морфизма $\mathrm{id}_A\colon * \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A)$ в категории $\mathcal{A}$, где $*$ — терминальный объект в $\mathcal{A}$;

так, что выполнены следующие условия:

- ассоциативность композиции: для любых объектов $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(C,D) \times \mathrm{Hom}(B,C) \times \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(C,D) \times \mathrm{Hom}(A,C) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(B,D) \times \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(A,D)
\end{tikzcd}$$

- нейтральность тождественного морфизма: для любых объектов $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A,B) \times * \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Hom}(A,B) \times \mathrm{Hom}(A,A) \arrow[d] \\
& \mathrm{Hom}(A,B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(B,B) \times \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & * \times \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[dl] \\
\mathrm{Hom}(A,B) &
\end{tikzcd}$$

  коммутативны.

Таким образом, мы хотим называть 2-категорией $\mathcal{C}$ набор объектов $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, для которого заданы, среди прочего, *категория* морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ для каждой пары $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ и *функторы* композиции $c_{ABC} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$. Требование ассоциативности композиции означает, что имеет место *равенство* функторов $c_{ACD} \circ (c_{ABC} \times 1) = c_{ABD} \circ (1 \times c_{BCD})$. Такие объекты называются **строгими 2-категориями**.

Уже видно, что последнее требование нарушает философские принципы теории категорий: никогда не нужно требовать равенства функторов, а нужно требовать существования естественного изоморфизма между ними. То есть, условие ассоциативности лучше формулировать следующим образом: заданы естественные изоморфизмы функторов

$$\gamma_{ABCD} \colon c_{ACD} \circ (c_{ABC} \times 1) \Rightarrow c_{ABD} \circ (1 \times c_{BCD}),$$

которые, кроме того, функториальны по (A, B, C, D), и удовлетворяют высшим условиям ассоциативности типа аксиомы пятиугольника Маклейна из определения 1.10.2. Формализация этих условий приводит к определению **слабой 2-категории**.

Определение строгой 2-категории, разумеется, проще определения слабой 2-категории, поскольку нам не нужно заботиться о естественных преобразованиях γ_{ABCD} и высших условиях ассоциативности на них. С другой стороны, определение слабой категории кажется более естественным с философской точки зрения. Оказывается, что понятия строгой 2-категории и слабой 2-категории совпадают: разумеется, любую строгую 2-категорию можно считать слабой 2-категорией с тождественными естественными преобразованиями γ_{ABCD}; но и любая 2-категория эквивалентна (в каком-то естественном смысле) некоторой строгой 2-категории.

Попытаемся теперь сформулировать определение 3-категории. Разумный путь такой: определить **строгую 3-категорию** как категорию, обогащенную над строгими 2-категориями. То есть, для любых двух объектов $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ должна быть задана строгая 2-категория $\mathrm{Hom}(A, B)$ вместе со строго ассоциативными 2-функторами композиции между ними. Альтернативный способ: задавать для любых двух объектов слабую 2-категорию $\mathrm{Hom}(A, B)$ вместе с 2-функторами композициями, которые ассоциативны только с точностью до естественных 2-изоморфизмов, и получить определение **слабой 3-категории**. Оказывается, что эти понятия уже *не эквивалентны*. Определение слабой 3-категории чрезвычайно запутано, и с ним очень сложно работать. Определение сильной 3-категории гораздо проще, но большинство 3-категорий, возникающих в реальной жизни, не эквивалентны сильным 3-категориям: например, уже фундаментальный 3-группоид двумерной сферы не является строгой 3-категорией (и не эквивалентен никакой строгой 3-категории). Разумеется, для 4-категорий (и n-категорий) ситуация становится только хуже.

Одно из решений состоит в том, чтобы ограничиться ∞-категориями, в которых все морфизмы, начиная с некоторого места, обратимы. А именно, **(∞, n)-категорией** называется ∞-категория, в которой все k-морфизмы обратимы при $k >> n$. Так, к примеру, фундаментальный ∞-группоид $\pi_{\leqslant\infty}X$ топологического пространства X является $(\infty, 0)$-категорией. Один из основных принципов теории ∞-категорий состоит в том, что должно быть верно и обратное: любая $(\infty, 0)$-категория должна иметь вид $\pi_{\leqslant\infty}X$ для некоторого топологического пространства X. Неформально говоря, $(\infty, 0)$-категория $\pi_{\leqslant\infty}X$ должна полностью определять гомотопический тип пространства X. То есть, на самом деле, $(\infty, 0)$-категории — это и есть *пространства* в смысле теории гомотопий.

Замечание 3.2.6. Отметим, что $(\infty, 0)$-категории — это ∞-категории, в которых *все* морфизмы обратимы; по этой причине они также называются **∞-группоидами**. В дальнейшем мы в основном ограничимся рассмотрением $(\infty, 1)$-категорий, которые будем называть просто **∞-категориями**.

В любом случае, (∞, n)-категории должны быть чрезвычайно похожи на категории, обогащенные над $(\infty, n-1)$-категориями. Поскольку мы хотим, чтобы $(\infty, 0)$-категории были похожи на топологические пространства (точнее, их гомотопические типы), можно попытаться определить $(\infty, 1)$-категории как категории, обогащенные над топологическими пространствами.

Определение 3.2.7. Пусть $\mathcal{CG}$ — категория компактно порожденных слабо хаусдорфовых топологических пространств. **Топологической категорией** называется категория, обогащенная над $\mathcal{CG}$. Категория топологических категорий обозначается через $\mathfrak{Cats}_{\mathrm{top}}$.

Замечание 3.2.8. Слова «компактно порожденные слабо хаусдорфовы топологические пространства» не несут для нас существенной смысловой нагрузки: это некоторое заклинание, призванное напомнить, что все не так просто, и что категория топологических пространств не обладает некоторыми хорошими свойствами. Замена категории $\mathfrak{Top}$ на категорию $\mathcal{CG}$ несет чисто технический характер; интересующиеся могут найти подробности поиском в интернете по ключевым словам *Kelly product*.

Замечание 3.2.9. Расшифруем определение 3.2.7: топологическая категория $\mathcal{C}$ состоит из набора объектов, и для каждой пары объектов $X, Y \in \mathcal{C}$ задано топологическое пространство $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$; для каждой тройки X, Y, Z задано непрерывное отображение $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, удовлетворяющее свойствам ассоциативности и существования тождественных морфизмов.

Замечание 3.2.10. Определение 3.2.7 можно принять за *определение* ∞-категории. Однако, с ним не совсем удобно работать, поэтому позднее мы дадим другое (на самом деле эквивалентное) определение.

Замечание 3.2.11. Ключевое соображения для *мотивации* приводимого ниже определения ∞-категории состоит в следующем: мы одновременно хотим обобщить понятие (обычной) категории и понятие топологического пространства (поскольку для нас это то же самое, что $(\infty, 0)$-категория). И по категории, и по топологическому пространству мы научились строить симплициальные множества: в первом случае это нерв категории, а во втором — сингулярное симплициальное множество. Кроме того, мы знаем, что сингулярное симплициальное множество является комплексом Кана, то есть, обладает свойствами поднятия относительно всех рогов $\Lambda^n_i \to \Delta^n$. Нерв категории, в свою очередь, обладает свойством *единственного* поднятия относительно *внутренних* рогов Λ^n_i, $0 < i < n$. Следующее предложение показывает, что это свойство характеризует нервы категорий.

Предложение 3.2.12. *Пусть* K *— симплициальное множество. Следующие условия эквивалентны:*

1. *Существует малая категория* $\mathcal{C}$ *и изоморфизм* $K \cong N(\mathcal{C})$ *симплициальных множеств.*

2. *Для любых* $0 < i < n$ *и для любой диаграммы вида*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

   существует единственная пунктирная стрелка, делающая ее коммутативной.

Доказательство. (1)⇒(2): см. 3.1.11.

(2)⇒(1): возьмем симплициальное множество K, удовлетворяющее условию (2) и построим категорию $\mathcal{C}$ следующим образом. Объектами $\mathcal{C}$ будут вершины K, то есть, элементы множества K_0 (или, эквивалентно, морфизмы $\Delta^0 \to K$. Для объектов $x, y \in \mathcal{C}$ пусть $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, Y)$ — это множество *ребер*, то есть, морфизмов $e\colon \Delta^1 \to K$ (или, эквивалентно, элементов K_1) таких, что $e|_{\{0\}} = x$ и $e|_{\{1\}} = y$. Пусть теперь $x \in \mathcal{C}$. Определим тождественный морфизм id_x как ребро K, заданное композицией $\Delta^1 \to \Delta^0 \xrightarrow{x} K$.

Определим композицию: пусть $f\colon x \to y$ и $g\colon y \to z$ — морфизмы в $\mathcal{C}$. Тогда f и g задают отображение $\sigma_0\colon \Lambda^2_1 \to K$: действительно, Λ^2_1 порождается двумя невырожденными ребрами $\{0,1\}$ и $\{1,2\}$ с общей вершиной. По свойству (2) отображение σ_0 можно единственным способом продолжить до отображения $\sigma\colon \Delta^2 \to K$. Посмотрим теперь на образ ребра $\{0,2\}$ при этом отображении: это некоторый морфизм из x в z, который мы и назовем композицией $g \circ f$.

Теперь необходимо проверить, что $\mathcal{C}$ действительно является категорией. Мы проверим только ассоциативность композиции. Пусть $w \xrightarrow{f} x \xrightarrow{g} y \xrightarrow{h} z$ — цепочка морфизмов в $\mathcal{C}$. Рассмотрим 2-симплексы σ_{012} и σ_{123}, построенные для определения композиций $g \circ f$ и $h \circ g$:

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dr, "g"] & \\
w \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& y \arrow[dr, "h"] & \\
x \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h \circ g"'] & & z
\end{tikzcd}$$

Кроме того, у нас есть 2-симплекс σ_{023}, построенный для определения композиции морфизмов $g \circ f$ и h:

$$\begin{tikzcd}
& y \arrow[dr, "h"] & \\
w \arrow[ur, "g \circ f"] \arrow[rr, "h \circ (g \circ f)"'] & & z
\end{tikzcd}$$

Эти три 2-симплекса вместе определяют рог $\tau_0\colon \Lambda^3_2 \to K$. По свойству поднятия его можно продолжить до 3-симплекса $\tau\colon \Lambda^3 \to K$. Четвертая грань τ имеет вид

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dr, "h \circ g"] & \\
w \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h \circ (g \circ f)"'] & & z
\end{tikzcd}$$

откуда немедленно следует, что $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Теперь мы знаем, что $\mathcal{C}$ — категория. По определению имеется морфизм симплициальных множеств $\varphi\colon K \to N(\mathcal{C})$. Осталось проверить, что φ — изоморфизм. По лемме Йонеды для этого достаточно проверить, что φ индуцирует биекцию $\mathrm{Hom}_{s\mathfrak{Sets}}(\Delta^n, K) \to \mathrm{Hom}_{s\mathfrak{Sets}}(\Delta^n, N(\mathcal{C}))$, что мы и проделаем индукцией по n. Для $n = 0$ и $n = 1$ это очевидно в силу конструкции категории $\mathcal{C}$. Пусть теперь $n \geqslant 2$. Выберем произвольное целое число i

такое, что $0 < i < n$. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sSets}}(\Delta^n, K) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{sSets}}(\Delta^n, N(\mathcal{C})) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sSets}}(\Lambda^n_i, K) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{sSets}}(\Lambda^n_i, N(\mathcal{C}))
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Условие поднятия (2) означает, что вертикальные стрелки в ней биективны. Нижняя горизонтальная стрелка биективна по предположению индукции (поскольку Λ^n_i состоит из $(n-1)$-симплексов), поэтому и верхняя стрелка биективна. $\square$

Замечание 3.2.13. Понятно, что требовать свойство поднятия для *внешних* рогов Λ^n_0, Λ^n_n было бы нецелесообразно. Например, свойство поднятия для рога Λ^2_2 означало бы, что в категории $\mathcal{C}$ для заданных стрелок $C_0 \to C_2$, $C_1 \to C_2$ найдется стрелка $C_0 \to C_1$, делающая диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& C_1 \arrow[dr] & \\
C_0 \arrow[ur, dotted] \arrow[rr] & & C_2
\end{tikzcd}$$

коммутативной. Понятно, что в произвольной категории это не так; это выполняется, впрочем, если $\mathcal{C}$ является группоидом.

Замечание 3.2.14. Таким образом, понятие симплициального множества обобщает одновременно понятия ∞-группоида (таковы комплексы Кана) и обычной категории (таковы множества, удовлетворяющие свойству поднятия из предложения 3.2.12). Поэтому можно надеяться, что, выделив некоторый достаточно широкий класс симплициальных множеств, мы получим разумное определение ∞-категории.

Пусть теперь K — произвольное симплициальное множество. Если мы хотим рассматривать K как обобщенную категорию, ее объектами должны быть элементы K_0 (то есть, вершины K), а морфизмами — элементы K_1 (то есть, ребра K). Продолжая аналогию, 2-морфизмом разумно называть элемент K_2, то есть, морфизм $\sigma\colon \Delta^2 \to K$. Его можно изобразить диаграммой вида

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dr, "\psi"] & \\
X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\theta"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

где образ невырожденного симплекса относительно σ задает некоторую гомотопию между $\psi \circ \varphi$ и θ, что понимается как «коммутативность» такой диаграммы.

Замечание 3.2.15. Легко понять, что для произвольного симплициального множества рассуждение из замечания 3.2.14 может привести к очень слабому понятию ∞-категории. А именно, мы определили морфизмы как 1-симплексы K, но, вообще говоря, невозможно определить композицию морфизмов. Как и в определении нерва категории, можно надеяться, что морфизм $\theta\colon X \to Z$ является композицией морфизмов $\varphi\colon X \to Y$ и $\psi\colon Y \to Z$, если существует 2-симплекс $\sigma\colon \Delta^2 \to K$, изображенный в замечании 3.2.14. Возникают две проблемы: такого симплекса σ может не существовать (и, в частности, может вообще не существовать ребер между X и Z), а даже если он существует, он может быть не единственным. Утверждение о существовании такого морфизма — это в точности свойство поднятия относительно вложения $\Lambda^2_1 \to \Delta^2$. Единственность же композиции — чересчур сильное условие.

Действительно, посмотрим на пример 3.2.4. По топологическому пространству мы хотим построить ∞-категорию так, чтобы точки X оказались ее объектами, а пути между точками — ее морфизмами. Стандартное определение композиции путей такое: мы проходим первый путь в два раза быстрее, а потом второй путь в два раза быстрее. Однако, никто не мешает нам определить композицию так: пройти первый путь в три раза быстрее, а потом второй путь в полтора раза быстрее. В топологии совершенно неважно, какой способ мы выберем, поскольку полученные пути гомотопны (а композиция путей в любом случае ассоциативна лишь с точностью до гомотопии).

Пользуясь этой аналогией, мы понимаем, что в ∞-категории не стоит требовать однозначно определенной композиции морфизмов. Более того, любой морфизм, гомотопный композиции, должен быть ничуть не хуже самой композиции.

Все эти соображения приводят к определению ∞-категории, которое мы сейчас повторим.

Определение 3.2.16. Симплициальное множество K называется **∞-категорией**, если для любых i, n таких, что $0 < i < n$ любой морфизм $f_0 \colon \Lambda^n_i \to K$ можно продолжить до морфизма $f \colon \Delta^n \to K$.

Пример 3.2.17. Если X — топологическое пространство, то сингулярное симплициальное множество $\operatorname{Sing} X$ является ∞-категорией. Мы будем называть его **фундаментальным ∞-группоидом** пространства X и обозначать через $\pi_{\leqslant\infty}X$.

3.3 Первые определения

Определение 3.3.1. Введем некоторую терминологию. Пусть $\mathcal{C}$ — ∞-категория. Ее **объектами** называются вершины $\mathcal{C}$, то есть, элементы $\mathcal{C}_0$, а **морфизмами** — 1-симплексы $\mathcal{C}$, то есть, элементы $\mathcal{C}_1$.

Замечание 3.3.2. Отображения грани $d_1, d_0 \colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_0$ интерпретруются как взятие начала и конца морфизма и часто обозначаются через $s = d_1$ и $t = d_0$ (source и target). Как в обычных категориях, мы будем писать $f \colon x \to y$, если $f \in \mathcal{C}_1$ таков, что $s(f) = x$ и $t(f) = y$. Чуть более формально, множество морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ является пулбэком $(s, t) \colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$ вдоль (x, y) — пока это просто множество.

Отображение вырождения $s_0 \colon \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1$ интерпретируется как взятие тождественного морфизма и обозначается через id. Из симплициальных тождеств $d_0 s_0 = d_1 s_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_0}$ следует, что id_x является эндоморфизмом $\mathcal{C}$, то есть. что $\mathrm{id}_x = s_0 x \colon x\ tox$. По категории $\mathcal{C}$ мы построим гомотопическую категорию с теми же объектами и морфизмами, представимыми морфизмами в $\mathcal{C}$; морфизм id_x будет представлять тождественный морфизм на x в гомотопической категории.

Что же с композицией? Рассмотрим морфизмы $f \colon x \to y$ и $g \colon y \to z$ в ∞-категории $\mathcal{C}$. Вместе они определяют внутренний рог $\lambda = (g, \bullet, f) \colon \Lambda^2_1 \to \mathcal{C}$ так, что $d_0\lambda = g$ и $d_2\lambda = f$. Каждый такой рог можно (не единственным, впрочем, образом) продолжить до 2-симплекса $\sigma \colon \Delta^2 \to \mathcal{C}$. Новая грань $d_1(\sigma)$ является тогда *кандидатом для композиции* g и f. Повторим, что мы не требуем однозначно определенной композиции, мы требуем только возможности сформировать композицию; оказывается, что все эти возможности «одинаково хороши». Более точно, пространство таких возможностей стягиваемо (см. ??).

Опишем теперь гомотопическую категорию ∞-категории. Напомним, что имеются сопряженные функторы $|-|$ и Sing между $\mathfrak{sSets}$ и $\mathfrak{Top}$, а также сопряженные функторы τ_1 и N между $\mathfrak{sSets}$ и $\mathfrak{Cats}$, где τ_1 называется **функтором фундаментальной категории** или **функтором категорной реализации**. Можно рассмотреть его композицию с функтором группоидофикации $\mathfrak{Cats} \to \mathfrak{Grpds}$ (который сопряжен слева к забывающему функтору $\mathfrak{Grpds} \to \mathfrak{Cats}$), и получим функтор **фундаментального группоида** $\pi_1 \colon \mathfrak{sSets} \to \mathfrak{Grpds}$. Таким образом, мы получаем сопряженную пару (π_1, N), где функтор N построен по косимплициальному объекту $\Delta \to \mathfrak{Grpds}$, отправляющему $[n]$ в свободный группоид на $[n]$.

Как мы знаем функтор $\tau_1 \colon \mathfrak{sSets} \to \mathfrak{Cats}$ отправляет симплициальное множество X в категорию $\tau_1(X) = \mathrm{colim}_{(\Delta/X)}[-] \circ p$, где (Δ/X) — категория симплексов X, а $p \colon (\Delta/X) \to \Delta$ — канонический функтор проекции, отправляющий симплекс $([n], \Delta^n \to X)$ в $[n]$.

Более явное описание τ_1: сначала строится свободная категория FX, порожденная невырожденными 1-симплексами X. 2-симплексы X определяют отношение эквивалентности на FX, порожденное следующим образом: для каждого 2-симплекса $\sigma \colon \Delta^2 \to X$ с границей $\partial\sigma = (g, h, f)$ морфизмы $g \circ f$ и h в FX объявляются эквивалентными. Фундаментальная категория $\tau_1(X)$ получена из FX факторизацией по этому отношению эквивалентности. В частности, морфизм в $\tau_1(X)$ представляется конечной цепочкой 1-симплексов в X.

Если исходное симплициальное множество является ∞-категорией, происходит дополнительное упрощение: оказываются, морфизмы можно представить настоящими 1-симплексами (а не цепочками).

Определение 3.3.3. Морфизмы $f, g \colon x \to y$ в ∞-категории $\mathcal{C}$ называются **гомотопными**, если существует 2-симплекс $\sigma \colon \Delta^2 \to \mathcal{C}$ с границей $\partial\sigma = (g, f, \mathrm{id}_x)$:

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "\mathrm{id}_x"] \arrow[rr, "f"'] & & y \end{tikzcd}$$

Любой такой 2-симплекс σ называется **гомотопией** между f и g и обозначается так: $\sigma \colon f \to g$.

Предложение 3.3.4. *Пусть $\mathcal{C}$ — ∞-категория, и $x, y \in \mathcal{C}$. Отношение гомотопности является отношением эквивалентности на $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$. Гомотопический класс морфизма $f \colon x \to y$ обозначается через $[f]$.*

Доказательство. Приведем идею доказательства. Пусть $f \colon x \to y$ — морфизм в $\mathcal{C}$. Рассмотрим [вырожденный] 2-симплекс $\kappa_f = s_0 f \colon \Delta^2 \to \mathcal{C}$. Из симплициальных тождеств сразу следует, что $d_0\kappa_f = d_1\kappa_f = f$, и что $d_2\kappa_f = d_2 s_0 f = s_0 d_1 f = \mathrm{id}_x$. Поэтому κ_f выглядит так:

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "f"] & \\ x \arrow[ur, "\mathrm{id}_x"] \arrow[rr, "f"'] & & y \end{tikzcd}$$

Это показывает, что $\kappa_f \colon f \to f$ — **постоянная гомотопия** для пути f, из чего следует рефлексивность отношения гомотопности. Покажем его симметричность; пусть $\sigma \colon f \to g$ — гомотопия. Рассмотрим внутренний рог вида

$$(\sigma, \kappa_g, -, \kappa_{\mathrm{id}_x}) \colon \Lambda^3_2 \to \mathcal{C}$$

Эта запись означает, что наш рог составлен из 2-граней σ, $\kappa_g, \kappa_{\mathrm{id}_x}$, взятых в качестве нулевой, первой и третьей, соответственно. Несложно проверить (а лучше всего убедиться в этом, нарисовав картинку), что эти грани этих симплексов действительно склеиваются должным образом. По определению мы можем продолжить его до 3-симплекса $\tau\colon \Delta^3 \to \mathcal{C}$. У этого 3-симплекса появилась новая (а именно, вторая) 2-грань $d_2\tau$; несложно видеть, что она определяет гомотопию $g \to f$ (называемую **обратной гомотопией** к σ), что доказывает симметричность отношения гомотопности. Несложная вариация на эту тему доказывает и его транзитивность. $\square$

Упражнение 3.3.5. *Завершите доказательство предложения 3.3.4.*

Замечание 3.3.6. Теперь мы можем определить гомотопическую категорию $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ для ∞-категории $\mathcal{C}$, перейдя к гомотопическим классам морфизмов. Закон композиции в $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ получается композицией представителей; нужно проверить, что все полученные композиции гомотопны. Пусть $f\colon x \to y$ и $g\colon y \to z$, и пусть $\sigma_1, \sigma_2\colon \Delta^2 \to \mathcal{C}$ — 2-симплексы, которые говорят нам, что $h_1 = d_1(\sigma_1)$ и $h_2 = d_1(\sigma_2)$ — кандидаты для композиции g и f. Построим внутренний рог $(\sigma_1, \sigma_2, \bullet, \kappa_f)\colon \Lambda^3_2 \to \mathcal{C}$. Его можно продолжить до симплекса τ, и новая грань $d_2\tau\colon \Delta^2 \to \mathcal{C}$ устанавливает нужную гомотопию $h_2 \to h_1$.

Предложение 3.3.7. *Пусть $\mathcal{C}$ — ∞-категория. Существует [обычная] категория* $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ *(называемая **гомотопической категорией** $\mathcal{C}$) с теми же объектами, морфизмы которой — гомотопические классы морфизмов в $\mathcal{C}$. При этом* $[g] \circ [f] = [g \circ f]$ *и* $\mathrm{id}_x = [\mathrm{id}_x]$. *Более того, существует естественный изоморфизм категорий* $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \cong \tau_1(\mathcal{C})$.

Определение 3.3.8. Пусть $\mathcal{C}$ — ∞-категория, и $x, y \in \mathcal{C}$. Морфизм $f\colon x \to y$ — это морфизм симплициальных множеств $f\colon \Delta^1 \to \mathcal{C}$ такой, что $f|_{\Delta^{\{0\}}} = x$ и $f|_{\Delta^{\{1\}}} = y$. Гомотопия между двумя параллельными морфизмами $x \to y$ в $\mathcal{C}$ интерпретируется как **2-морфизм** из x в y; напомним, что гомотопия — это морфизм $\sigma\colon \Delta^2 \to \mathcal{C}$ такой, что $\sigma|_{\Delta^{\{0,1\}}} = x$ и $\sigma|_{\Delta^{\{2\}}} = y$. Вообще, n-морфизм из x в y — это морфизм симплициальных множеств $\tau\colon \Delta^{n+1} \to \mathcal{C}$ такой, что $\sigma|_{\Delta^{\{0,\dots,n\}}} = x$ и $\sigma|_{\Delta^{\{n+1\}}} = y$. Варьируя n, получаем множество n-морфизмов из x в y, которое можно собрать в **пространство морфизмов** $\mathrm{Map}^R_{\mathcal{C}}(x, y) \in \mathfrak{sSets}$, которое оказывается комплексом Кана.

Замечание 3.3.9. Если в определении гомотопии положить другую стрелку тождественной, получим пространство $\mathrm{Map}^L_{\mathcal{C}}(x, y)$, которое окажется комплексом Кана, слабо эквивалентным $\mathrm{Map}^R_{\mathcal{C}}(x, y)$.

Определение 3.3.10. Обозначим через $\mathrm{Map}(-,-)$ функтор **внутреннего** Hom в категории симплициальных множеств:

$$\mathrm{Map}(X, Y)_* = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{sSets}}(\Delta^* \times X, Y).$$

Более подробно, для симплициальных множеств X, Y мы строим симплициальное множество $\mathrm{Map}(X, Y)$, n-симплексы котоого имеют вид

$$\mathrm{Map}(X, Y)_n = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{sSets}}(\Delta^n \times X, Y),$$

а отображения грани и вырождения индуцированы отображениями кограни и ковырождения по аргументу Δ^* (с использованием контравариантности функтора $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sSets}}(-,-)$ по первому аргументу). Эта конструкция, разумеется, функториальна по X и по Y. Вершины симплициального множества $\mathrm{Map}(X, Y)$ — это просто морфизмы симплициальных множеств из X в Y; ребра — это гомотопии между морфизмами, а симплексы высших размерностей играют роль «высших гомотопий».

Определение 3.3.11. Расслоение Кана $p\colon X \to Y$ (см. определение 3.1.12) называется **ацикличным расслоением Кана**, если оно одновременно является слабой гомотопической эквивалентностью, то есть, отображения $\pi_n(X) \to \pi_n(Y)$, индуцированные p, биективны для всех $n \geqslant 0$.

Теорема 3.3.12. *Пусть $i\colon \Lambda^2_1 \to \Delta^2$ — очевидное вложение. Симплициальное множество X является ∞-категорией тогда и только тогда, когда отображение «ограничения»*

$$i^*\colon \operatorname{Map}(\Delta^2, X) \to \operatorname{Map}(\Lambda^2_1, X)$$

является ацикличным расслоением Кана.

Замечание 3.3.13. Поясним смысл этой теоремы. Симплициальное множество $\operatorname{Map}(\Lambda^2_1, X)$ нужно представлять себе как *пространство задач по композиции морфизмов*. Действительно, его точки — это морфизмы $\Lambda^2_1 \to X$, то есть, по сути просто пары морфизмов в X, идущих один за другим. Далее, между этими точками есть пути (гомотопии между такими парами), пути между путями, и так далее. С другой стороны, $\operatorname{Map}(\Delta^2, X)$ — это *пространство решений задач по композиции морфизмов*: его точки — это 2-симплексы в X, то есть, пары морфизмов в X вида $x \to y \to z$ *плюс* выбранный морфизм $x \to z$ *плюс* собственно 2-симплекс на вершинах x, y, z, то есть, выбранная гомотопия между парой $x \to y \to z$ и $x \to z$. При этом i^* в точности сопоставляет решению исходную задачу (то есть, забывает про выбор морфизма $x \to z$ и гомотопии). Теорема утверждает, что пространство задач по композиции морфизмов и пространство решений этих задач одинаковы с точки зрения гомотопической науки; более того, это свойство является *определяющим* свойством ∞-категории.

Более подробно, зафиксируем пару морфизмов $f\colon x \to y$, $g\colon y \to z$ в ∞-категории $\mathcal{C}$, и пусть $\lambda = (g, -, f)\colon \Lambda^2_1 \to \mathcal{C}$ — соответствующий рог в $\mathcal{C}$. Тогда λ определяет вершину в симплициальном множестве $\operatorname{Map}(\Lambda^2_1, \mathcal{C})$. Пусть F_λ — слой морфизма i^* над этой вершиной; то есть, рассмотрим пулбэк

$$\begin{array}{ccc} F_\lambda & \longrightarrow & \operatorname{Map}(\Delta^2, X) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i^*} \\ \Delta^0 & \xrightarrow{\lambda} & \operatorname{Map}(\Lambda^2_1, X) \end{array}$$

Этот слой F_λ можно интерпретировать как пространство всех возможных композиций g и f. Из теоремы 3.3.12 следует, что это пространство является стягиваемым комплексом Кана, то есть,

- композиция g и f существует (пространство F_λ непусто);
- любые два выбора композиции g и f гомотопны ($\pi_0(F_\lambda)$ тривиально);
- гомотопия, связывающая два таких выбора композиции, единственна с точностью до гомотопии ($\pi_1(F_\lambda)$ тривиально);
- и так далее для старших гомотопий (все $\pi_i(F_\lambda)$ тривиальны).

Определение 3.3.14. Морфизм $f\colon x \to y$ в ∞-категории $\mathcal{C}$ называется **эквивалентностью**, если $[f]\colon x \to y$ — изоморфизм в категории $\operatorname{Ho}(\mathcal{C})$.

Замечание 3.3.15. Оказывается, что морфизм $f\colon x \to y$ в $\mathcal{C}$ является эквивалентностью тогда и только тогда, когда существует морфизм $g\colon y \to x$ в $\mathcal{C}$ такой, что найдутся два

2-симплекса в $\mathcal{C}$ вида

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_x"'] & & x \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "f"] & \\ y \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_y"'] & & y \end{tikzcd}$$

Определение 3.3.16. ∞-категория называется **∞-группоидом**, если ее гомотопическая категория является группоидом. Таким образом, ∞-категория является ∞-группоидом тогда и только тогда, когда все морфизмы в ней — эквивалентности.

Предложение 3.3.17. *Пусть $\mathcal{C}$ — ∞-категория. Любой рог $\lambda\colon \Lambda_0^n \to \mathcal{C}$, $n \geqslant 2$, для которого $\lambda|_{\Delta^{\{0,1\}}}$ является эквивалентностью, может быть продолжен до симплекса $\Delta^n \to \mathcal{C}$.*

Замечание 3.3.18. Разумеется, аналогичной предложение выполнено для рогов вида Λ_n^n.

Следствие 3.3.19. *∞-категория X является ∞-группоидом тогда и только тогда, когда X — комплекс Кана.*

3.4 Категорные конструкции для ∞-категорий

Определение 3.4.1. Пусть K — симплициальное множество, $\mathcal{C}$ — ∞-категория. Морфизм симплициальных множеств $F\colon K \to \mathcal{C}$ называется **функтором из K в $\mathcal{C}$**. **Естественным преобразованием** называется морфизм $\Delta^1 \times K \to \mathcal{C}$. Вообще, **пространство функторов** $\mathrm{Func}(K, \mathcal{C})$ — это симплициальное множество вида

$$\mathrm{Func}(K, \mathcal{C})_* = \mathrm{Map}_{\mathfrak{sSets}}(K, \mathcal{C})_* = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{sSets}}(\Delta^* \times K, \mathcal{C}) \in \mathfrak{sSets}.$$

Замечание 3.4.2. Это понятие расширяет обычное понятие функтора за счет наличия вполне строгого функтора нерва $N\colon \mathfrak{Cats} \to \mathfrak{sSets}$. А именно, верна следующая лемма.

Лемма 3.4.3. *Если A, B — категории, то имеется естественный изоморфизм симплициальных множеств $N(\mathrm{Func}(A, B)) \cong \mathrm{Func}(NA, NB)$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} N(\mathrm{Func}(A, B))_n &= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Cats}}([n], \mathrm{Func}(A, B)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Cats}}([n] \times A, B) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{sSets}}(N([n] \times A), NB) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{sSets}}(\Delta^n \times (NA), NB) \\ &= \mathrm{Func}(NA, NB)_n. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались определением внутреннего Hom, вполне строгостью функтора N, тем, что N сохраняет произведения, и изоморфизмом $N([n]) \cong \Delta^n$. $\square$

Замечание 3.4.4. Можно показать, что симплициальное множество $\mathrm{Func}(K, \mathcal{C})$ на самом деле является ∞-категорией.

Определение 3.4.5. Пусть A, B — категории. Построим новую категорию $A \star B$, называемую **джойном** A и B, следующим образом. Объектами $A * B$ будет служить несвязное объединение класса объектов A и класса объектов B. Морфизмы определим так:

$$\mathrm{Hom}_{A\star B}(x, y) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_A(x, y), & x, y \in A; \\ \mathrm{Hom}_B(x, y), & x, y \in B; \\ *, & x \in A, y \in B; \\ \varnothing, & x \in B, y \in A. \end{cases}$$

Композиция теперь определена однозначно, если потребовать, чтобы A и B оказались полными подкатегориями $A \star B$ относительно очевидных вложений. Обратите внимание, что конструкция джойна несимметрична.

Пример 3.4.6. Если $A \in \mathfrak{Cats}$ — произвольная категория, и $B = 1$ — терминальная категория, то $A \star 1 = A^{\triangleright}$ — **коконус** на A. Он получен присоединением к A нового терминального объекта ∞. Двойственным образом, категория $1 \star A = A^{\triangleright}$ — **конус** на A — категория, полученная из A присоединением нового инициального объекта $-\infty$.

Упражнение 3.4.7. *Поймите, как определения коконуса и конуса помогают переформулировать определения копредела и предела, соответственно.*

Определение 3.4.8. Пусть K, L — симплициальные множества. **Джойном** K и L называется симплициальное множество $K \star L$, n-симплексы которого имеют вид

$$(K \star L)_n = K_n \cup L_n \cup \bigcup_{i+1+j=n} K_i \times L_j, \quad n \geqslant 0.$$

Упражнение 3.4.9. *Определите (естественным образом) отображения грани и вырождения, завершив тем самым определение джойна.*

Упражнение 3.4.10. *Проверьте, что джойн задает функтор* $\star\colon \mathfrak{sSets} \times \mathfrak{sSets} \to \mathfrak{sSets}$.

Замечание 3.4.11. Симплициальное множество $K \star L$ снабжено каноническими включениями $K \to K \star L$ и $L \to K \star L$. Поэтому $K \star L$ можно рассматривать и как объект категории $\mathfrak{sSets}_{K/}$ симплициальных множеств под K, и как объект категории $\mathfrak{sSets}_{L/}$ симплициальных множеств под L.

Предложение 3.4.12. *Функторы* $K \star (-)\colon \mathfrak{sSets} \to \mathfrak{sSets}_{K/}$ *и* $(-) \star L\colon \mathfrak{sSets} \to \mathfrak{sSets}_{L/}$ *сохраняют копределы.*

Предложение 3.4.13. $\Delta^i \star \Delta^j \cong \Delta^{i+1+j}$ *для всех* $i, j \geqslant 0$. *Эти изоморфизмы согласованы с очевидными вложениями* Δ^i *и* Δ^j.

Предложение 3.4.14. *Если* $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ *—* ∞*-категории, то и их джойн* $\mathcal{C} \star \mathcal{D}$ *—* ∞*-категория.*