# Алгебраическая K-теория для самых маленьких*

Александр Лузгарев

1 июня 2014 г.

## Содержание



*Конспект лекций спецкурса весны 2014 г.; предварительная версия.

Мы планировали обсудить следующие темы:

- алгебраическая K-теория
- топологическая K-теория
- теория пересечений
- мотивные когомологии
- алгебраическая теория чисел
- ???

Больше всего нас интересуют применения [алгебраической] топологии в алгебре. Курс рассчитан на тех, кто владеет основными понятиями алгебры и топологии (в пределах стандартного университетского курса). Тем не менее, мы используем идеи и результаты, относящиеся к двум важнейшим разделам современной математики: алгебраической геометрии и алгебраической топологии. Поэтому нам приходится делать (довольно обширные) отступления в эти области.

# 1 Гипотезы Вейля

## 1.1 Первое знакомство с алгебраической геометрией

*1.1.1. Аффинные схемы.* Пусть $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ — многочлены от $n$ переменных с целыми коэффициентами. Если Вы не знакомы с понятием схемы: перед Вами пример *аффинной схемы над* $\mathbb{Z}$. Аффинная схема над кольцом — это просто набор многочленов от нескольких переменных с коэффициентами в этом кольце. Конечно, нас на самом деле интересуют не сами многочлены, а множество их общих корней, поэтому часто говорят, что аффинная схема (или *аффинное алгебраическое многообразие*) — это множество решений системы алгебраических уравнений

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = f_2(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{1}$$

Однако, множество решений системы появляется только тогда, когда мы скажем, над каким кольцом мы ищем решения, то есть, из какого кольца берутся $x_1, \ldots, x_n$ (по умолчанию *кольцо* = ассоциативное коммутативное кольцо с единицей). Для уравнений с целыми коэффициентами в разных ситуациях естественно рассматривать их множества решений над $\mathbb{Z}$, над $\mathbb{Q}$, над $\mathbb{R}$, над $\mathbb{C}$, над конечными полями $\mathbb{F}_p$ и $\mathbb{F}_{p^n}$, над их алгебраическими замыканиями $\overline{\mathbb{F}_p}, \ldots$. Одно и то же уравнение $x^2+y^2 = -1$ имеет пустое множество решений над $\mathbb{Z}$ и над $\mathbb{R}$, бесконечно много решений над $\mathbb{C}$, ненулевое конечное число решений над $\mathbb{F}_p$. **Аффинной схемой** (или **аффинным алгебраическим многообразием**) мы будем называть сам набор многочленов, с точностью до преобразований, которые заведомо не меняют множеств их общих нулей над всеми возможными кольцами. Пусть $X$ — аффинная схема, задаваемая уравнениями (1), где $f_i$ — многочлены с целыми коэффициентами. Множество решений этих уравнений над кольцом $R$ (то есть, множество наборов $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, при подстановке которых в каждый многочлен $f_i$ получается $0$) называется **множеством точек схемы** $X$ **над** $R$ и обозначается через $X(R)$. Так, для схемы $X = \{x^2 + y^2 = -1\}$ мы имеем $X(\mathbb{Z}) = \varnothing$, но $X(\mathbb{C}) \neq \varnothing$.

Посмотрим на решения уравнений 1 над конечным полем $\mathbb{F}_{p^m}$ (здесь и далее везде по умолчанию $p$ — простое число). Обратите внимание, что для рассмотрения множества $X(\mathbb{F}_p)$ нам нужно совершить редукцию целочисленных коэффициентов многочленов $f_i$ по модулю $p$. Обозначим через $N_m = N_m(X) = |X(\mathbb{F}_{p^m})|$ число этих решений. Мы не указываем в обозначении простое число $p$, поскольку нас интересует поведение $N_m$ как функции от $m$ при фиксированном $p$.

*1.1.2. Пример.* Рассмотрим схему $X = \{y^2 = x^3+x\}$ и возьмем $p = 2$. Нетрудно видеть, что $X(\mathbb{F}_2) = \{(0,0),(1,0)\}$. Если $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[\omega]/(\omega^2+\omega+1)$, то $X(\mathbb{F}_4) = \{(0,0),(1,0),(\omega,\omega),(\omega+1,\omega+1)\}$. Поэтому в этом случае $N_1 = 2$ и $N_2 = 4$.

*1.1.3. Проективное пространство.* Нас будут интересовать в основном *проективные многообразия*, а не аффинные. Напомним, что аффинным пространством над полем $k$ мы называем множество $\mathbb{A}^n(k) = k^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in k\}$. **Проективное пространство** $\mathbb{P}^n(k) = (\mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{0\})/k^*$ есть фактор-множество аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ без нуля по диагональному действию группы $k^*$. Иными словами, на $\mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{0\}$ мы заводим следующее отношение эквивалентности: $(x_0, \ldots, x_n) \sim (x_0', \ldots, x_n')$, если для некоторого $\lambda \in k^*$ выполнено $x_0 = \lambda x_0'$, $\ldots$, $x_n = \lambda x_n'$. Фактор-множеством по этому отношению эквивалентности и будет проективное пространство $\mathbb{P}^n(k)$.

Обратите внимание на обозначения: аффинное пространство $\mathbb{A}^n(F)$ является множеством точек аффинной схемы $\mathbb{A}^n$ над полем $F$ (какой именно?). Проективное пространство $\mathbb{P}^n(F)$ тоже является множеством точек некоторой схемы над $F$, но эта схема $\mathbb{P}^n$ уже не является аффинной.

*1.1.4. Проективные схемы.* Пусть теперь $f_1, \dots, f_k \in k[x_0, \dots, x_n]$ — *однородные* многочлены с коэффициентами в поле $k$ от $n+1$ переменной. Мы можем рассмотреть множество общих нулей многочленов $f_i$ в $\mathbb{P}^n(k)$: действительно, если $(x_0, \dots, x_n) \sim (x_0', \dots, x_n')$ и $f_i(x_0, \dots, x_n) = 0$, то (в силу однородности!) и $f_i(x_0', \dots, x_n') = 0$, поэтому понятие *равенства нулю* хорошо переносится на точки проективного пространства $\mathbb{P}^n(k)$ (а вот понятие *значения* многочлена $f_i$ в точке — нет).

**Проективной схемой** (или **проективным алгебраическим многообразием**) мы будем называть набор однородных многочленов $f_i$ с целыми коэффициентами (опять, с точностью до неразъясненных пока преобразований), а $k$-точками проективного многообразия $X$ — множество $X(k)$ общих нулей этих многочленов в $\mathbb{P}^n(k)$. Аналогично аффинному случаю, нас интересует $N_m(X) = |X(\mathbb{F}_{p^m})|$ как функция от $m$. Посмотрим на простейшие примеры.

*1.1.5. Пример: число точек в проективном пространстве.* Пусть $X = \mathbb{P}^d$. Поскольку $\mathbb{P}^d(\mathbb{F}_{p^m}) = (\mathbb{A}^{d+1} \setminus \{0\})/(\mathbb{F}_{p^m})^*$, то

$$N_m(X) = \frac{(p^m)^{d+1} - 1}{p^m - 1} = 1 + p^m + p^{2m} + \dots + p^{dm}.$$

*1.1.6. Мотивное разложение проективного пространства.* Ничего удивительного в полученной формуле нет: сейчас мы покажем, что множество точек проективного пространства $\mathbb{P}^d$ над любым полем $k$ можно «разрезать» на $d+1$ часть: точка, аффинная прямая, аффинная плоскость, .... Суммируя количество точек в частях, мы получим выражение для $N_m(X)$.

Действительно, посмотрим на произвольную точку $x = [x_0 : x_1 : \dots : x_d] \in \mathbb{P}^d(k)$. Если $x_0 \neq 0$, то $x = [x_0 : x_1 : \dots : x_d] = [1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_d}{x_0}]$, так что точки, для которых $x_0 \neq 0$ задаются ровно $d$ независимыми параметрами: таких точек ровно $|k|^d$. Если же $x_0 = 0$, посмотрим на $x_1$. Если $x_1 \neq 0$, то $x = [0 : 1 : \frac{x_2}{x_1} : \dots : \frac{x_d}{x_1}]$, и аналогичные рассуждения показывают, что таких точек в точности $|k|^{d-1}$. Продолжая рассуждения, мы дойдем до последнего случая $x = [0 : 0 : \dots : 0 : 1]$, и требуемая формула для $N_m(X)$ получена.

Полученное разбиение (оно называется **мотивным разложением** проективного пространства $\mathbb{P}^d$) имеет и геометрический смысл: проективная прямая состоит из аффинной прямой и одной (бесконечно удаленной) точки, проективная плоскость состоит из аффинной плоскости и бесконечно удаленной [проективной] прямой, трехмерное проективное пространство состоит из трехмерного аффинного пространства и бесконечно удаленной [проективной] плоскости, ....

*1.1.7. Пример: грассманиан.* Пусть $X = \mathrm{Gr}_2(\mathbb{A}^r)$ — многообразие двумерных подпространств в $r$-мерном пространстве $\mathbb{A}^r$. Можно смотреть на него так: точки $X$ над полем $k$ — это двумерные векторные подпространства в $k^r$, то есть, пары линейно независимых векторов в $k^r$ с точностью до эквивалентности, соответствующей замене базиса в этом двумерном подпространстве. Такая замена базиса задается обратимой матрицей $2 \times 2$, то есть, элементом $\mathrm{GL}_2(k)$. Пусть $k = \mathbb{F}_{p^m}$. Чтобы выбрать пару линейно независимых векторов в $k^r$, мы сначала выбираем один ненулевой вектор (таких $(p^m)^r - 1$), а потом — второй, не коллинеарный первому (таких $(p^m)^r - p^m$). Теперь посчитаем, сколько элементов в $GL_2(k)$: обратимая матрица второго порядка — это в точности пара линейно независимых векторов в $k^2$. В результате получаем

$$N_m(X) = \frac{((p^m)^r - 1)((p^m)^r - p^m)}{((p^m)^2 - 1)((p^m)^2 - p^m)} = 1 + p^m + 2p^{2m} + \dots .$$

Например, при $r = 4$ (то есть, для $X = \mathrm{Gr}_2(\mathbb{A}^4)$) получаем

$$N_m(X) = 1 + p^m + 2p^{2m} + p^{3m} + p^{4m}.$$

*1.1.8. Мотивное разложение грассманиана.* И в формуле для числа точек на грассманиане тоже мало удивительного; сейчас мы «разрежем» грассманиан на кусочки, соответствующие слагаемым в этой формуле. Мы параметризовали точки грассманиана $\mathrm{Gr}(2,4)$ над полем $k$ матрицами $2 \times 4$ ранга 2 с коэффициентами из $k$, с точностью до домножения (слева) на обратимые матрицы $2 \times 2$. В частности, нам разрешено делать с матрицами $2 \times 4$ элементарные преобразования строк. Метод Гаусса говорит нам, что мы можем привести матрицу $2 \times 4$ ранга 2 к одной из следующих шести форм:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Число матриц каждого вида равно $|k|^4$, $|k|^3$, $|k|^2$, $|k|^2$, $|k|$, 1, соответственно.

*1.1.9. Пример: кривая Ферма.* Рассмотрим $X = \{x^3 + y^3 + z^3 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$. Посчитать количество точек в $X(\mathbb{F}_{p^m})$ уже не так просто; мы лишь приведем результаты. Например, для $p = 7$ компьютерные вычисления показывают, что $N_1 = 9$, $N_2 = 63$, $N_3 = 324$, $N_4 = 2331$. Андре Вейль предложил (довольно замысловатый) метод вычисления $N_m(X)$ для эллиптической кривой $X$; следуя этому методу, можно получить формулу

$$N_m = 1 - \left( \left( \frac{-1 + 3\sqrt{3}i}{2} \right)^m + \left( \frac{-1 - 3\sqrt{3}i}{2} \right)^m \right) + 7^m.$$

Обозначим $\alpha_1 = (-1 + 3\sqrt{3}i)/2$, $\alpha_2 = \overline{\alpha_1}$. Заметим, что $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — алгебраические числа, корни многочлена $x^2 + x + 7$. Более того, $|\alpha_1| = |\alpha_2| = \sqrt{7}$ и $\alpha_1 \alpha_2 = 7$.

*1.1.10. Пример: еще одна эллиптическая кривая.* Рассмотрим $X = \{y^2 z - x^3 - xz^2 = 0\}$. Компьютерные вычисления показывают, что $N_1(X) = 8$, $N_2(X) = 64$, $N_3(X) = 344$, $N_4(X) = 2304$. Оказывается,

$$N_m = 1 - \left( (\sqrt{7}i)^m + (-\sqrt{7}i)^m \right) + 7^m.$$

На этот раз $\sqrt{7}i$ и $-\sqrt{7}i$ — корни многочлена $x^2 + 7$; снова $|\alpha_1| = |\alpha_2| = \sqrt{7}$ и $\alpha_1 \alpha_2 = 7$.

*1.1.11. Формула для числа точек.* Рассмотрение этих примеров наводит на мысль, что в общем случае имеется формула вида

$$N_m(X) = 1 - (\alpha_{1,1}^m + \alpha_{1,2}^m + \dots + \alpha_{1,b_1}^m) + (\alpha_{2,1}^m + \dots + \alpha_{2,b_2}^m) - \dots - (\alpha_{2d-1,1}^m + \dots + \alpha_{2d-1,b_{2d-1}}^m) + p^{md}.$$

Здесь мы предполагаем, что $X$ — *гладкое* проективное алгебраическое многообразие размерности $d$, заданное уравнениями с целыми коэффициентами.

Кроме того, каждая из формул для $N_m(X)$ в рассмотренных примерах симметрична: $b_j = b_{2d-j}$, и набор коэффициентов $\{\alpha_{j,s}\}_{s=1}^{b_j}$ совпадает с набором $\{p^d/\alpha_{2d-j,s}\}_{s=1}^{b_{2d-j}}$.

## 1.2 Первое знакомство с алгебраической топологией

*1.2.1. Связь с топологией.* Оказывается, общий вид формулы для $N_m(X)$ тесным образом связан с топологическими свойствами многообразия $X(\mathbb{C})$. Мы построим по (достаточно произвольному) топологическому пространству $Y$ векторные пространства (над полем рациональных чисел) $H_i(Y;\mathbb{Q})$ для натуральных $i$. Окажется, что для $Y = X(\mathbb{C})$ размерность этих векторных пространств совпадают с числами $b_j$ из формулы для $N_m(X)$: $b_j = \dim_{\mathbb{Q}}(H_i(Y;\mathbb{Q}))$. Посмотрим, как устроены топологические пространства $X(\mathbb{C})$ в разобранных выше примерах.

*1.2.2. Сфера Римана.* Проективная прямая $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ получается из аффинной прямой $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ добавлением одной бесконечно удаленной точки. В то же время, аффинная прямая $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ — это просто множество всех комплексных чисел, то есть, комплексная плоскость. Если мы уходим по комплексной плоскости все дальше и дальше от начала координат, мы должны приближаться к бесконечно удаленной точке. Поэтому с топологической точки зрения проективная прямая $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ является сферой: положим сферу на плоскость (точка касания — южный полюс) и спроектируем сферу на эту плоскость из северного полюса: мы получим соответствие между всеми точками плоскости и всеми точками сферы, кроме северного полюса, который как раз соответствует бесконечно удаленной точке.

*1.2.3. Тор.* Посмотрим теперь на кривые из примеров 1.1.9 и 1.1.10. Мы рассмотрим более общий случай: пусть кривая $X$ на проективной плоскости задана уравнением $y^2z = x(x-\lambda_1 z)(x-\lambda_2 z)$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — ненулевые комплексные числа. На аффинном куске $\{z \neq 0\}$ этой плоскости мы получаем кривую $y^2 = x(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$. Кривая из примера 1.1.9, как мы позже увидим, тоже приводится к такому виду. Посмотрим на какую-нибудь фиксированную точку $x_0 \in \mathbb{C}$. По ней мы можем посчитать выражение $x_0(x_0-\lambda_1)(x_0-\lambda_2)$, извлечь из него квадратный корень и получить некоторую точку $(x_0, y) \in X(\mathbb{C})$. Более того, если указанное выражение не равно нулю, то мы можем извлечь целых два квадратных корня и получить две точки на $X(\mathbb{C})$, а если равно нулю (то есть, если $x_0 = 0, \lambda_1$ или $\lambda_2$) — то только одну. Теперь начнем шевелить точку $x_0$: если $x_0 \neq 0, \lambda_1, \lambda_2$ и мы выбрали для $x_0$ какое-нибудь одно из двух значений $y_0$ квадратного корня из $x_0(x_0-\lambda_1)(x_0-\lambda_2)$, то при шевелении $x_0$ мы будем выбирать то значение квадратного корня, которое близко к $y_0$. Вся процедура работает, пока мы не уходим далеко от $x_0$ и не приближаемся к точкам $0, \lambda_1, \lambda_2$.

Проблемы начинаются вокруг этих точек: посмотрим на маленькую окружность вокруг точки $0$. Пусть $x$ бегает по этой окружности по часовой стрелке; аргумент $x$ меняется тогда от $0$ до $2\pi$. Зафиксируем в точке $x_0$, соответствующей нулевому аргументу, квадратный корень $y_0$ из $x_0$, аргумент которого также равен нулю. При путешествии $x$ от нулевого аргумента до $2\pi$ аргумент этого квадратного корня меняется в два раза медленнее и успевает пройти путь от $0$ до $\pi$: таким образом, мы вернемся в *другое* значение квадратного корня из $x_0$. То же рассуждение применимо и к квадратному корню из $x(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$, поскольку при $x$, близких к $0$, дополнительный множитель $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ мало отличается от константы.

Для того, чтобы побороться с этим, разрежем сферу Римана по двум линиям: от $0$ до $\lambda_1$ и от $\lambda_2$ до $\infty$ (описанная выше неприятность происходит как при обходе вокруг $\lambda_1$ и $\lambda_2$, так и при обходе вокруг $\infty$). Возьмем две копии сферы Римана с такими разрезами, соответствующие двум значениям квадратного корня для некоторого фиксированного значения $x_0 \in \mathbb{C}$. Пока мы гуляем по каждой сфере, не проходя через разрезы, все хорошо. При пересечении разреза мы должны перейти на другое значение квадратного корня, поэтому сферы нужно склеить вдоль разрезов. Если склеить две сферы с двумя дырками вдоль этих дырок, получится тор (полученная поверхность должны остаться ориентированной, поскольку мы имеем дело с комплексным многообразием; у комплексного многообразия всегда есть выделенная ориентация).

*1.2.4. Числа Бетти.* Вернемся к обсуждению связи между топологическими свойствами $X(\mathbb{C})$ и формулой для $N_m(X)$. Для топологического пространства $Y$ размерности $b_i$ векторных пространств $H_i(Y;\mathbb{Q})$ называются **числами Бетти** $Y$. Приведем таблицу чисел Бетти для комплексного проективного пространства $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | ... | $2d-1$ | $2d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_i$ | 1 | 0 | 1 | 0 | ... | 0 | 1 |

Числа Бетти для комплексных точек грассманиана $\mathrm{Gr}(2,4)$:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_i$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Эти таблицы объясняют вид формул $N_m(\mathbb{P}^d) = 1 + p^m + \cdots + p^{dm}$ и $N_m(\mathrm{Gr}(2,4)) = 1 + p^m + 2p^{2m} + p^{3m} + p^{4m}$. А вот как выглядят числа Бетти для тора:

| $i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $b_i$ | 1 | 2 | 1 |

Эта таблица объясняет вид формул из примеров 1.1.9 и 1.1.10. В то же время, в обоих примерах 1.1.9 и 1.1.10 многообразие $X(\mathbb{C})$ является тором, в то время как числа $\alpha_{1,1}$ и $\alpha_{1,2}$ совершенно различны: в первом примере это корни многочлена $x^2 + x + 7$, а во втором — многочлена $x^2 + 7$. Топология не дает нам возможности предсказать конкретные значения $\alpha_{j,s}$.

Вообще, любая гладкая проективная кривая над $\mathbb{C}$ является гладким компактным вещественным многообразием размерности 2; в силу наличия комплексной структуры это многообразие ориентируемо. Классификация таких многообразий хорошо известна: любое из них гомеоморфно сфере с $g$ ручками (у сферы $g = 0$, у тора $g = 1$). Число $g$ называется родом многообразия, и числа Бетти сферы с $g$ ручками равны $b_0 = b_2 = 1$, $b_1 = 2g$.

## 1.3 Первая формулировка гипотез

*1.3.1. Поднятие в характеристику 0.* Пусть $K$ — числовое поле (= конечное расширение $\mathbb{Q}$). Напомним, что **кольцом целых** поля $K$ называется множество $\mathcal{O}_K \subseteq K$ элементов, которые являются корнями многочленов с целыми коэффициентами. Если $\mathfrak{p} \trianglelefteq \mathcal{O}_K$ — простой идеал, то фактор-кольцо $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ является конечным полем.

В предыдущем разделе мы изучали множества нулей над $\mathbb{F}_{p^m}$ наборов однородных многочленов $f_i$ с целыми коэффициентами. Чуть более общо, мы могли начать с многочленов над $\mathcal{O}_K$, выбрать простой идеал $\mathfrak{p} \trianglelefteq \mathcal{O}_K$, и рассматривать множества нулей этих многочленов над расширениями поля $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$.

Пусть $X$ — многообразие, определенное над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Будем говорить, что $X$ **поднимается в характеристику** 0, если существует алгебраическое многообразием $\mathfrak{X}$, определенное над кольцом целых $\mathcal{O}$ некоторого числового поля, вместе с простым идеалом $\mathfrak{p} \trianglelefteq \mathcal{O}$ так, что $\mathcal{O}/\mathfrak{p} \cong \mathbb{F}_q$ и $X$ изоморфно редукции по модулю $\mathfrak{p}$ многообразия $\mathfrak{X}$.

*1.3.2. Гипотезы Вейля (первая формулировка).* Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие размерности $d$, определенное над полем $\mathbb{F}_q$ ($q = p^e$ для некоторого простого числа $p$). Обозначим $N_m(X) = |X(\mathbb{F}_{q^m})|$.

1. Существуют неотрицательные числа $b_0, b_1, \ldots, b_{2d}$ и комплексные числа $\alpha_{j,s}$, $0 \leqslant j \leqslant 2d$, $1 \leqslant s \leqslant b_j$ такие, что

$$N_m(X) = \sum_{j=0}^{2d} (-1)^j \left( \sum_{s=1}^{b_j} \alpha_{j,s}^m \right)$$

для всех $m \geqslant 1$. Более того, $b_0 = b_{2d} = 1$ и $\alpha_{2d,1} = q^d$.

2. Числа $\alpha_{j,s}$ — алгебраические и имеют норму $\alpha_{j,s} = q^{j/2}$.

3. Для всех $j$ выполнено $b_j = b_{2d-j}$, и последовательности $(\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,b_j})$ совпадают с точностью до перестановки.

4. Предположим, что $X$ поднимается до гладкого проективного многообразия $\mathfrak{X}$, определенного над кольцом целых $\mathcal{O}$ в числовом поле. Пусть $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$ — топологическое пространство точек $X$ над $\mathbb{C}$. Тогда $b_j$ равно $j$-ому числу Бетти многообразия $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$, то есть, $b_j = \dim_{\mathbb{Q}} H^j(\mathfrak{X}(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$.

*1.3.3. Историческая справка.* Андре Вейль сформулировал эти гипотезы в 1949, доказав их для кривых. Впрочем, для эллиптических кривых (кривых рода 1) они были доказаны еще Хельмутом Хассе. Более того, Леонард Эйлер фактически доказал их для кривых вида $X = \{x^3 = y^3 + C\{$. Точнее, он доказывал [равносильное] утверждение: $||X(\mathbb{F}_q)| - q - 1| < 2\sqrt{q}$. Вообще, если $X$ – кривая рода $g$, то числа Бетти $X(\mathbb{C})$ выглядят так: $b_0 = b_2 = 1$, $b_1 = 2g$. Поэтому $N_m(X) = 1 + (\alpha_{1,1}^m + \cdots + \alpha_{1,2g}^m) + q$, и при $m = 1$ получаем $|X(\mathbb{F}_q)| - 1 - q = \alpha_{1,1} + \cdots + \alpha_{1,2g}$. Учитывая, что $|\alpha_{1,s}| = \sqrt{q}$, получаем неравенство $||X(\mathbb{F}_q)| - 1 - q| \leqslant 2g\sqrt{q}$.

Рациональность дзета-функции была доказана Бернардом Дворком в 1960 году элементарными методами, но доказательство с использованием когомологий также возможно. Александр Гротендик доказал функциональное уравнение в 1965 году (с помощью двойственности Пуанкаре). В 1969 году он сформулировал так называемые «стандартные гипотезы» об алгебраических циклах, следствием которых являются гипотезы Вейля. В 1973 году Пьер Делинь доказал гипотезы Вейля (и их широкое обобщение) без использования стандартных гипотез (с помощью слабой теоремы Лефшеца для этальных когомологий).

*1.3.4. Схемы с особенностями.* Требование гладкости в формулировке гипотез Вейля существенно. Рассмотрим кривую $X = \{y^2 z = x^3 + x^2 z\} \subseteq \mathbb{P}^2$. Нарисовав $\mathbb{R}$-точки, нетрудно убедиться, что $X$ обладает особенностью в точке $[0 : 0 : 1]$. Если посчитать число точек $N_m(X) = |X(\mathbb{F}_{q^m})|$ для $q = 7$, получим $N_1(X) = 7$, $N_2(X) = 49$, $N_3(X) = 343$, ..., и оказывается, что $N_m(X) = q^m$.

С точки зрения топологии пространство $X(\mathbb{C})$ представляет собой тор со стянутой окружностью (= сфера с отождествленной парой точек). Числа Бетти $X(\mathbb{C})$ выглядят так: $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$. Поэтому мы могли бы ожидать формулу вида $N_m(X) = 1 - A^m + q^m$, где $|A| = \sqrt{q}$. Однако, мы получили $q^m = 1 - 1 + q^m$, то есть, $A = 1$. Этот факт при желании тоже объясняется: слагаемое, отвечающее $H^1$, в некотором смысле «приходит» из $H^0$.

*1.3.5. Аффинные схемы.* Требование проективности в гипотезах Вейля также существенно, но и его можно снять, если уточнить формулировки. Рассмотрим многообразие $X = \mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$: для поля $k$ имеем $\mathbb{G}_m(k) = k^* = k \setminus \{0\}$. Нетрудно понять, что для него $N_m(X) = q^m - 1$. Эта формула тоже не сильно отличается от формулы для $N_m(X)$ в гипотезах Вейля, если учесть следующий момент. Здесь правильно рассматривать не когомологии, а *когомологии с компактным носителем*: это [приведенные] когомологии одноточечной компактификации. В нашем случае одноточечная компактификация многообразия $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ совпадает с сферой с отождествленной парой точек (см. предыдущий пример). Ее *приведенные когомологии* имеют размерности $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, и слагаемое в $H^1$ в некотором смысле «приходит» из $H^0$, что в итоге и дает правильную формулу $N_m(X) = 0^m - 1^m + q^m$.

## 1.4 Вторая формулировка гипотез

*1.4.1. Дзета-функция.* Для работы с выражением для $N_m(X)$ из первой гипотезы удобно рассматривать производящую функцию

$$\sum_{m=1}^{\infty} N_m \frac{t^m}{m}.$$

Равенство в первом пункте можно переписать следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{\infty} N_m \frac{t^m}{m} = \log\left(\frac{P_1(t)P_3(t)\dots P_{2d-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\dots P_{2d}(t)}\right),$$

где $P_j(t) = \prod_s (1 - \alpha_{j,s} t)$. Формальный степенной ряд

$$Z(X,t) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} N_m \frac{t^m}{m}\right)$$

называется **дзета-функцией** $X$.

*1.4.2. Гипотезы Вейля (вторая формулировка).* Теперь мы можем переформулировать гипотезы Вейля следующим образом:

1. **Рациональность дзета-функции.** Существуют многочлены $P_0, P_1, \dots, P_{2d}$ такие, что

   $$Z(X,t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\dots P_{2d-1}(t)}{P_0(t)\dots P_2(t)\dots P_{2d}(t)}.$$

   Кроме того, $P_0(t) = 1 - t$ и $P_{2d}(t) = 1 - q^d t$.

2. **Гипотеза Римана.** Обратные числа к корням многочлена $P_j(t)$ — алгебраические и имеют норму $q^{j/2}$.

3. **Функциональное уравнение для дзета-функции.** Пусть $e = \sum_j (-1)^j \deg P_j(t)$; тогда выполнено равенство формальных степенных рядов

   $$Z\left(X, \frac{1}{q^d t}\right) = (-1)^{b_d + a} q^{de/2} t^e Z(X,t),$$

   где $b_d = \deg P_d(t)$, $a$ — кратность $-q^{-d/2}$ как корня $P_d(t)$, а $e = \sum_{j=0}^{2d} (-1)^j b_j$ — *эйлерова характеристика.*

4. **Числа Бетти.** Предположим, что $X$ поднимается до гладкого проективного многообразия $\mathfrak{X}$, определенного над кольцом целых некоторого числового поля. Тогда $\deg P_j(t)$ равно $j$-ому числу Бетти многообразия $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$, и $e$ из третьего пункта равно эйлеровой характеристике $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$.

Коэффициенты многочленов $P_j(t)$ a priori лежат в $\mathbb{C}$, но из второго пункта немедленно следует, что они являются алгебраическими числами. На самом деле, это даже целые числа.

*1.4.3. Вывод функционального уравнения.* Набросаем вывод функционального уравнения для дзета-функции из первоначальной формы гипотез Вейля:

$$
\begin{aligned}
P_j(t) &= \prod_{s=1}^{b_j}(1-\alpha_{j,s}t) \\
&= \prod_{s=1}^{b_j}\left(1-\frac{q^d}{\alpha_{2d-j,s}}t\right) \\
&= \left(\prod_{s=1}^{b_j}\alpha_{2d-j,s}\right)^{-1}\prod_{s=1}^{b_j}(\alpha_{2d-j,s}-q^dt) \\
&= \left(\prod_{s=1}^{b_j}\alpha_{2d-j,s}\right)^{-1}(-q^dt)^{b_j}\prod_{s=1}^{b_j}\left(1-\alpha_{2d-j,s}\frac{1}{q^dt}\right) \\
&= \left(\prod_{s=1}^{b_j}\alpha_{2d-j,s}\right)^{-1}(-q^dt)^{b_j}P_{2d-j}\left(\frac{1}{q^dt}\right).
\end{aligned}
$$

Перемножим полученные равенства по всем $j$. Заметим, что

$$
\left(\prod_{s=1}^{b_j}\alpha_{j,s}\right)\cdot\left(\prod_{s=1}^{b_{2d-j}}\alpha_{2d-j,s}\right) = q^{db_j}, \quad j\neq d.
$$

Осталось разобраться с множителем, соответствующим $j=d$. Первая формулировка гипотез Вейля говорит, что у каждого $\alpha_{d,s}$ есть парное $\alpha_{d,s'}$ такое, что $\alpha_{d,s}\alpha_{d,s'}=q^d$. Однако, случается так, что $\alpha_{d,s}$ парно само себе: это возможно, если $\alpha_{d,s}=\pm q^{d/2}$, и количество $\alpha_{d,s}$, равных $-q^{d/2}$, как раз даст множитель вида $(-1)^a$ в функциональном уравнении.

# 2 $K_0$

## 2.1 Проективные модули

*2.1.1. Свободные модули.* Пусть $R$ — [не обязательно коммутативное] кольцо. По умолчанию мы рассматриваем *правые* модули над $R$; таким образом, гомоморфизмы действуют на элементах модулей *слева*. Напомним, что $R$-модуль $M$ называется **свободным**, если он обладает базисом, то есть, существует подмножество $S\subseteq M$ такое, что $S$ линейно независимо и $S$ порождает $M$. Это условие равносильно тому, что любой элемент $m\in M$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации элементов $S$.

Если кольцо $R$ ненулевое, то для любого множества $S$ мы можем построить свободный $R$-модуль с базисом $S$: рассмотрим множество $R^{(S)}$ функций из $S$ в $R$ с конечным носителем. Иными словами, $R^{(S)}$ состоит из формальных линейных комбинаций вида $r_1 s_1 + \dots + r_n s_n$ для $r_i \in R$, $s_i \in S$, с очевидными операциями сложения и умножения на скаляры. Любой $R$-модуль $M$ изоморфен фактор-модулю свободного модуля; любой конечно порожденный модуль изоморфен фактор-модулю свободного модуля с конечным базисом.

*2.1.2. Размерность.* Свободные модули над некоммутативным кольцо не обязательно имеют размерность: например, может так случиться, что $R^2 \cong R$. Будем говорить, что кольцо $R$ **обладает свойством IBN** (invariant basis number), если из $R^m \cong R^n$ следует, что $m = n$.

Нетрудно показать, что

1. если $R$ обладает свойством IBN, то $R^{op}$ обладает свойством IBN;
2. если $R$ обладает свойством IBN, то $M_n(R)$ обладает свойством IBN для каждого $n$;
3. если имеется гомоморфизм колец $R \to S$ и $S$ обладает свойством IBN, то $R$ обладает свойством IBN;
4. всякое нетерово слева кольцо обладает свойством IBN.

Из этого следует, в частности, что любое коммутативное кольцо обладает свойством IBN.

Конечно, далеко не у каждого модуля есть базис: даже над кольцом $\mathbb{Z}$ имеются модули без базиса. Для ненулевого кольца $R$ следующие свойства равносильны:

1. каждый $R$-модуль свободен;
2. каждый конечно порожденный $R$-модуль свободен;
3. каждый циклический $R$-модуль свободен;
4. некоторый простой $R$-модуль свободен;
5. $R$ является телом.

*2.1.3. Проективные модули.* $R$-модуль $P$ называется **проективным**, если для любой сюръекции $R$-модулей $g\colon M \to N$ и для любого гомоморфизма $j\colon P \to N$ существует гомоморфизм $h\colon P \to M$ такой, что $g \circ h = j$:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "j"] \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \\
M \arrow[r, two heads, "g"] & N
\end{tikzcd}$$

Для $R$-модуля $P$ следующие утверждения равносильны:

1. $P$ является прямым слагаемым некоторого свободного модуля;
2. $P$ проективен;
3. у каждого сюръективного гомоморфизма $M \to P$ имеется правый обратный;
4. каждая короткая точная последовательность с $P$ на правом конце расщепляется.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$: проверим сначала, что свободный модуль проективен. Посмотрим на диаграмму

$$\begin{tikzcd} & R^{(S)} \arrow[d, "j"] \\ M \arrow[r, two heads, "g"] & N \end{tikzcd}$$

и заметим, что для задания гомоморфизма из $R^{(S)}$ в $M$ достаточно задать отображение множеств $S \to M$. Ограничение $j$ на $S$ дает нам отображение множеств $S \to N$. Для каждого $s \in S$ выберем произвольным образом поднятие элемента $j(s)$ вдоль $g$; полученный элемент и назовем $h(s)$. Продолжение $h$ по линейности дает нужный гомоморфизм $R^{(S)} \to M$, поскольку его композиция с $g$ совпадает с $j$ на $S$, а значит и везде.

Теперь пусть $P$ проективен и $P \oplus Q \cong R^{(S)}$. Этот изоморфизм дает нам гомоморфизмы $p\colon R^{(S)} \to P$ и $i\colon P \to R^{(S)}$, полученные из канонической проекции и вложения первого сомножителя. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} R^{(S)} \arrow[r, shift left, "p"] & P \arrow[l, shift left, "i"] \arrow[d, "j"] \\ M \arrow[r, two heads, "g"] & N \end{tikzcd}$$

и воспользуемся только что доказанным для гомоморфизма $j \circ p\colon R^{(S)} \to N$; получим гомоморфизм $h'\colon R^{(S)} \to M$ и положим $h = h' \circ i$.

$2 \Rightarrow 3$: применим определение проективности к сюръекции $M \to P$ и тождественному отображению $\mathrm{id}_P\colon P \to P$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_P"] \\ M \arrow[r, two heads, "g"] & P \end{tikzcd}$$

Полученный гомоморфизм $h$ и является искомым правым обратным.

$3 \Rightarrow 4$: посмотрим на короткую точную последовательность вида

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

и найдем правый обратный к сюръекции $N \to P$; он и станет расщепляющим отображением $P \to N$.

$4 \Rightarrow 1$: возьмем какой-нибудь сюръективный гомоморфизм $\varphi$ из свободного модуля вида $R^{(S)}$ в $P$ (например, можно взять $S = P$). По предположению короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi) \longrightarrow R^{(S)} \xrightarrow{\varphi} P \longrightarrow 0$$

расщепляется, поэтому $P \oplus \ker(\varphi) \cong R^{(S)}$.

□

*2.1.4. Конечно порожденные проективные модули.* Нас будут интересовать в основном конечно порожденные проективные модули. Пусть $P$ — $R$-модуль, $n > 0$ — натуральное число. Следующие утверждения равносильны:

1. $P$ — проективный модуль и порождается $n$ элементами;

2. $P$ изоморфен прямому слагаемому $R^n$;

3. $P$ изоморфен $R$-модулю, порожденному столбцами идемпотентной матрицы из $M_n(R)$.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$: если $P$ порождается $n$ элементами, то есть сюръективный гомоморфизм $\varphi\colon R^n \to P$; в силу проективности к нему есть правый обратный, что дает разложение $R^n \cong P \oplus \ker(\varphi)$.

$2 \Rightarrow 3$: пусть $P \oplus Q \cong R^n$. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi\colon R^n \to P \to R^n$ — композицию проекции на первое слагаемое и вложения. Матрица $\Phi$ этого отображения идемпотентна, поскольку $\varphi \circ \varphi = \varphi$, и его образ совпадает с $\varphi$. Но образ отображения, записанного матрицей $\Phi$ — это в точности линейная оболочка столбцов $\Phi$.

$3 \Rightarrow 1$: пусть $\Phi \in M_n(R)$ — идемпотентная матрица; она соответствует идемпотентному гомоморфизму $\varphi\colon R^n \to R^n$. Заметим, что $1 - \varphi\colon R^n \to R^n$ — тоже идемпотент, и $R^n = \mathrm{im}(\varphi) \oplus \mathrm{im}(1 - \varphi)$. Поэтому модуль $\mathrm{im}(\varphi)$ проективен; наличие сюръекции $R^n \to \mathrm{im}(\varphi)$ означает, что он порождается $n$ элементами. Но $\mathrm{im}(\varphi)$ — это и есть $R$-модуль, порожденный столбцами $\Phi$.

□

## 2.2 Группы Гротендика

*2.2.1. Бинарные операции на категории.* Пусть $\mathcal{C}$ — некоторая категория. Мы будем называть **бинарной операцией на** $\mathcal{C}$ сопоставление каждой паре объектов $X, Y \in \mathcal{C}$ объекта $X \star Y$ так, что если $X' \cong X$ и $Y' \cong Y$, то $X' \star Y' \cong X \star Y$. Операция называется **ассоциативной**, если $(X \star Y) \star Z \cong X \star (Y \star Z)$ для всех $X, Y, Z \in \mathcal{C}$; **коммутативной**, если $X \star Y \cong Y \star X$ для всех $X, Y \in \mathcal{C}$. Будем говорить, что $E \in \mathcal{C}$ — **нейтральный элемент** относительно этой операции, если $X \star E \cong X \cong E \star X$ для всех $X \in \mathcal{C}$.

Мы будем по большей части игнорировать теоретико-множественные проблемы работы с категориями. В частности, мы будем считать, что для каждой рассматриваемой нами категории $\mathcal{C}$ можно рассмотреть множество $I(\mathcal{C})$ классов изоморфизма объектов. Класс изоморфизма объекта $X \in \mathcal{C}$ мы будем обозначать через $c(X)$.

Если на категории $\mathcal{C}$ задана ассоциативная бинарная операция, то $I(\mathcal{C})$ снабжается *индуцированной* ассоциативной бинарной операцией следующим образом: положим $c(X) + c(Y) = c(X \star Y)$. Если операция $\star$ коммутативна, то и полученная операция $+$ коммутативна; если $E$ — нейтральный элемент относительно $\star$, то $c(E)$ — нейтральный элемент относительно $+$.

Первый пример категории с операцией: категория конечно порожденных модулей $\mathrm{mod}-R$ с операцией прямой суммы. Нетрудно видеть, что $I(\mathcal{C})$ становится абелевым моноидом относительно индуцированной операции. Более общо, мы можем рассмотреть категорию $R$-модулей, порожденных множествами мощности, не превосходящей некоторого кардинала; например, категорию счетно порожденных $R$-модулей.

Полная подкатегория $\mathrm{mod}-R$, состоящая из всех *свободных* конечно порожденных модулей, также является категорией с операцией. Нетрудно понять, что если $R$ обладает свойством IBN, то соответствующий моноид изоморфен моноиду натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Следующий важный пример — полная подкатегория $\mathcal{P}(R)$ конечно порожденных проективных модулей: если $P, Q \in \mathcal{P}(R)$, то $P \oplus Q \in \mathcal{P}(R)$, поэтому $\mathcal{P}(R)$ — категория с операцией $\oplus$. Нетрудно видеть, что $I(\mathcal{P}(R))$ — абелев моноид.

Еще один пример, который мы впоследствии изучим подробнее: пусть $R$ — коммутативное кольцо. Назовем **билинейным модулем** над $R$ пару $(M, b)$, состоящую из $R$-модуля $M$ и билинейной формы $b\colon M \times M \to R$ на $M$. Билинейный модуль $(M, b)$ называется **симметричным**, если $b(v, w) = b(w, v)$ для всех $v, w \in M$. Гомоморфизм билинейных модулей — это просто гомоморфизм модулей, сохраняющий форму. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная полная подкатегория $\mathrm{mod}-R$, замкнутая относительно операции $\oplus$ и содержащая нулевой модуль $0$ (например, $\mathcal{C}$ — категория конечно порожденных проективных модулей, или категория конечно порожденных модулей, или вся категория $\mathrm{mod}-R$). Рассмотрим категорию симметричных билинейных модулей $(M, b)$, у которых $M \in \mathbb{C}$; морфизмы в ней — гомоморфизмы билинейных модулей. Определим **ортогональную сумму** двух билинейных модулей $(M, b)$, $(M', b')$ следующим образом: $(M, b) \perp (M, b') = (M \oplus M', b \perp b')$, где форма $b \perp b'$ задана равенством $(b \perp b')((v, v'), (w, w')) = b(v, w) + b'(v', w')$. Мы получили ассоциативную коммутативную бинарную операцию с нейтральным элементом $(0, 0)$.

*2.2.2. Группа Гротендика.* Напомним, что непустое множество с ассоциативной операцией на нем называется **полугруппой**; гомоморфизм полугрупп — отображение, сохраняющее операцию. Пусть $S$ — полугруппа относительно операции $\star$. Мы хотим построить абелеву группу $\widetilde{S}$ вместе с гомоморфизмом полугрупп $\gamma\colon S \to \widetilde{S}$, универсальные в следующем смысле: для любой абелевой группы $A$ и для любого гомоморфизма полугрупп $\varphi\colon S \to A$ существует единственный гомоморфизм групп $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{S} \to A$ такой, что $\widetilde{\varphi} \circ \gamma = \varphi$:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\forall\varphi"'] & \widetilde{S} \arrow[d, dashed, "\exists\widetilde{\varphi}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Как всегда, из универсального свойства следует единственность такой группы, и достаточно предъявить конструкцию. Рассмотрим $\mathbb{Z}^{(S)}$ — свободную абелеву группу с базисом $S$ и пусть $H$ — подгруппа в $\mathbb{Z}^{(S)}$, порожденная элементами вида $(x \star y) - x - y$ для всех $x, y \in S$. Положим $\widetilde{S} = \mathbb{Z}^{(S)}/H$. По построению имеются отображения $\gamma'\colon S \to \mathbb{Z}^{(S)}$ и $\gamma\colon S \to \mathbb{Z}^{(S)} \to \widetilde{S}$. Заметим, что $\gamma'(x \star y) - \gamma'(x) - \gamma'(y)$ лежит в $H$, так что $\gamma(x \star y) - \gamma(x) - \gamma(y) = 0$, то есть, $\gamma$ — гомоморфизм полугрупп.

Проверим универсальное свойство для построенных объектов $\widetilde{S}$ и $\gamma$. Пусть $A$ — абелева группа, а $\varphi\colon S \to A$ — гомоморфизм полугрупп. Универсальное свойство свободной абелевой группы гарантирует существование гомоморфизма абелевых групп $\varphi'\colon \mathbb{Z}^{(S)} \to A$ такого, что $\varphi' \circ \gamma' = \varphi$. При этом элемент вида $\gamma'(x \star y) - \gamma'(x) - \gamma'(y) \in \mathbb{Z}^{(S)}$ под действием $\varphi'$ переходит в $\varphi(x \star y) - \varphi(x) - \varphi(y)$, что равно $0$, поскольку $\varphi$ — гомоморфизм полугрупп. Поэтому $H$ содержится в ядре гомоморфизма $\varphi'$, и, стало быть, $\varphi'$ пропускается через фактор-группу $\widetilde{S}$. Это означает, что найдется гомоморфизм групп $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{S} \to A$ такой, что $\widetilde{\varphi} \circ \gamma = \varphi$.

Осталось проверить единственность $\widetilde{\varphi}$. Пусть имеется гомоморфизм $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$ со свойством $\widetilde{\widetilde{\varphi}} \circ \gamma = \varphi$. Для любого элемента $s \in S$ выполнено $\widetilde{\widetilde{\varphi}}(\gamma(s)) = \varphi(s) = \widetilde{\varphi}(\gamma(s))$. Это означает, что $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$ совпадают на множестве элементов вида $\gamma(s)$. Но эти элементы порождают группу $\widetilde{S}$, поскольку элементы вида $\gamma'(s)$ порождают $\mathbb{Z}^{(S)}$. Поэтому $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\widetilde{\varphi}}$.

Построенная абелева группа $\widetilde{S}$ (вместе с гомоморфизмом полугрупп $\gamma\colon S \to \widetilde{S}$) называется **группой Гротендика** полугруппы $S$. Для $s \in S$ мы будем писать $[s]$ вместо $\gamma(s)$.

Каждый элемент группы $\widetilde{S}$ можно представить в виде $[x] - [y]$ для некоторых $x, y \in S$. Действительно, каждый элемент $\widetilde{S}$ заведомо является линейной комбинацией элементов вида $[s]$ с целыми коэффициентами: $a_1[x_1] + \cdots + a_n[x_n]$. Мы можем добиться того, что каждый коэффициент $a_i$ равен $1$ или $-1$, расписывая слагаемой вида $a_i[x_i]$ в сумму $|a_i|$ слагаемых. Кроме того, дописав $0 = [s] - [s]$ для некоторого $s \in S$, можно считать, что и $1$, и $-1$ встречаются в качестве коэффициентов. Поэтому наш элемент можно записать в виде

$$([u_1] + \cdots + [u_s]) - ([v_1] + \cdots + [v_t]) = [u_1 \star \cdots \star u_s] - [v_1 \star \cdots \star v_t]$$

для некоторых $u_i, v_j \in S$.

*2.2.3. Полугруппы с сокращением.* Пусть теперь $(S, \star)$ — абелева полугруппа, $x, y, x', y' \in S$. Тогда

1. $[x] = [y]$ в $\widetilde{S}$ тогда и только тогда, когда $x \star z = y \star z$ для некоторого $z \in S$;
2. $[x] - [y] = [x'] - [y']$ в $\widetilde{S}$ тогда и только тогда, когда $x \star y' \star z = x' \star y \star z$ для некоторого $z \in S$.

Доказательство. Если $x \star z = y \star z$, то $[x] + [z] = [y] + [z]$ и, следовательно, $[x] = [y]$. Обратно, если $[x] = [y]$, то в группе $\mathbb{Z}^{(S)}$ выполнено $x - y \in H$. Это означает, что

$$x - y = \sum_{i=1}^{n} a_i((x_i \star y_i) - x_i - y_i),$$

где $a_i = \pm 1$, $x_i, y_i \in S$. Перенося слагаемые со знаком «$-$» в другую часть, получаем

$$x + \sum_{a_i=-1} (x_i \star y_i) + \sum_{a_i=1} (x_i + y_i) = y + \sum_{a_i=1} (x_i \star y_i) + \sum_{a_i=-1} (x_i + y_i).$$

Элементы $S$ образуют базис свободной группы $\mathbb{Z}^{(S)}$, поэтому слагаемые в левой части являются перестановкой слагаемых в правой части. В силу абелевости $S$ получаем, что $x \star z = y \star z$ для $z = \prod_{i=1}^{n} (x_i \star y_i)$.

Для доказательства второго утверждения осталось заметить, что $[x] - [y] = [x'] - [y']$ равносильно $[x] + [y'] = [x'] + [y]$, что равносильно $[x \star y'] = [x' \star y]$. □

Таким образом, мы могли бы построить $\widetilde{S}$ как множество формальных разностей вида $[x] - [y]$ для $x \in S$ с точностью до эквивалентности: $[x] - [y] \sim [x'] - [y']$, если $x \star y' \star z = x' \star y \star z$ для некоторого $z \in S$.

Говорят, что полугруппа $S$ является **полугруппой с сокращением**, если для $x, y, z \in S$ из $x \star z = y \star z$ следует, что $x = y$. Из доказанного сразу же следует, что отображение $\gamma\colon S \to \widetilde{S}$ инъективно тогда и только тогда, когда $(S, \star)$ — абелева полугруппа с сокращением.

Нетрудно проверить, что сопоставление $S \mapsto \widetilde{S}$ задает функтор из категории полугрупп в категорию абелевых групп. Универсальное свойство теперь просто означает, что этот функтор является левым сопряженным к забывающему функтору из категории абелевых групп в категорию полугрупп.

*2.2.4.* $K_0$ *категории.* Пусть $\mathcal{C}$ — категория с ассоциативной бинарной операцией $\star$. Группа Гротендика полугруппы $(I(\mathcal{C}), \star)$ обозначается через $K_0(\mathcal{C}, \star)$ и называется **группой Гротендика категории $\mathcal{C}$ относительно** $\star$.

Нам понадобится аналогичная конструкция абелевой группы по категории с точными последовательностями. Пусть $\mathcal{C}$ — некоторая подкатегория абелевой категории $\mathcal{A}$ (нам понадобится только случай $\mathcal{A} = \mathrm{mod}-R$. Рассмотрим свободную абелеву группу $\mathbb{Z}^{(I(\mathcal{C}))}$, натянутую на множество классов изоморфизма объектов категории $\mathcal{C}$, и профакторизуем ее по абелевой подгруппе $E$, порожденной элементами вида $c(M) - c(N) - c(L)$ для всех точных последовательностей вида

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

в категории $\mathcal{C}$. Полученная абелева группа обозначается через $K_0(\mathcal{C})$ и называется **группой Гротендика** категории $\mathcal{C}$. Мы будем обозначать через $[M]$ образ объекта $M \in \mathcal{C}$ относительно канонического отображения $I(\mathcal{C}) \to \mathbb{Z}^{(I(\mathcal{C}))} \to K_0(\mathcal{C})$.

Разумеется, если $0 \notin \mathcal{C}$, то в $\mathcal{C}$ вообще нет точных последовательностей, и $K_0(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}^{(I(\mathcal{C}))}$. Если же $0 \in \mathcal{C}$, то в $\mathcal{C}$ имеется точная последовательность с $L = M = N = 0$, и поэтому $[0] = 0$ в $K_0(\mathcal{C})$.

Как эта конструкция связана с группой Гротендика категории с ассоциативной бинарной операцией? Пусть $\mathcal{C}$ — полная подкатегория абелевой категории $\mathcal{A}$, замкнутая относительно $\oplus$ и содержащая $0$. Тогда существует естественный сюръективный гомоморфизм групп $K_0(\mathcal{C}, \oplus) \to K_0(\mathcal{C})$, отправляющий $[M]$ в $[M]$ для всех $M \in \mathcal{C}$. Действительно, для каждой пары объектов $L, N \in \mathcal{C}$ имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow L \oplus N \longrightarrow N \longrightarrow 0\ ,$$

поэтому соотношения в определении $K_0(\mathcal{C})$ включают в себя соотношения в определении $K_0(\mathcal{C}, \star)$. Следствие: любой элемент $K_0(\mathcal{C})$ можно представить в виде $[M] - [N]$ для некоторых $M, N \in \mathcal{C}$.

Пусть $\mathcal{C}$ — подкатегория в $\mathrm{mod}-R$, содержащая $0$, и замкнутая относительно прямых сумм и *счетных* прямых сумм. Для $M \in \mathcal{C}$ обозначим через $M^{(\mathbb{N})}$ прямую сумму счетного количества экземпляров $M$. Нетрудно видеть, что $M \oplus M^{(\mathbb{N})} \cong M^{(\mathbb{N})}$. Поэтому в $K_0(\mathcal{C}, \oplus)$ и в $K_0(\mathcal{C})$ выполнено $[M] = [M] + [M^{(\mathbb{N})}] - [M^{(\mathbb{N})}] = [M \oplus M^{(\mathbb{N})}] - [M^{(\mathbb{N})}] = 0$. Таким образом, в этом случае $K_0(\mathcal{C}, \oplus) = K_0(\mathcal{C}) = 0$. Поэтому мы должны ограничиваться рассмотрением только *конечно порожденных* $R$-модулей.

## 2.3 $K_0$ категорий модулей

*2.3.1.* $K_0$ *и* $G_0$ *кольца.* Рассмотрим следующие полные подкатегории в $R-\mathrm{mod}$:

- $\mathcal{F}(R)$ — категория конечно порожденных свободных $R$-модулей,
- $\mathcal{P}(R)$ — категория конечно порожденных проективных $R$-модулей,
- $\mathcal{M}(R)$ — категория конечно порожденных $R$-модулей.

Очевидно, что эти подкатегории содержат $0$, замкнуты относительно $\oplus$, и что $\mathcal{F}(R) \subseteq \mathcal{P}(R) \subseteq \mathcal{M}(R)$.

Группа $K_0(\mathcal{M}(R))$ называется **группой Гротендика кольца** $R$ и обозначается через $G_0(R)$. Группа $K_0(\mathcal{P}(R))$ называется **нулевой алгебраической $K$-группой кольца** $R$ и обозначается через $K_0(R)$.

Поскольку каждая короткая точная последовательность в $\mathcal{P}(R)$ расщепляется, $K_0(R) = K_0(\mathcal{P}(R), \oplus)$. Однако, $G_0(R) \neq K_0(\mathcal{M}(R), \oplus)$ уже для $R = \mathbb{Z}$. Действительно, наличие короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

влечет $[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] = [0]$ в $G_0(\mathbb{Z})$. Если бы $G_0(\mathbb{Z})$ совпадало с $K_0(\mathcal{M}(\mathbb{Z}), \oplus)$, из этого следовало бы существование конечно порожденного $\mathbb{Z}$-модуля $A$ такого, что $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus A \cong 0 \oplus A$, что противоречит классификации конечно порожденных абелевых групп.

Заметим, что $K_0$ является функтором: если $\varphi\colon R \to R'$ — гомоморфизм колец, а $M$ — конечно порожденный проективный $R$-модуль, то $M \otimes_R R'$ — конечно порожденный проективный $R'$-модуль. Упражнение: проверьте, что индуцированное отображение $K_0(\varphi)\colon K_0(R) \to K_0(R')$ является гомоморфизмом групп.

*2.3.2. Идемпотентные матрицы.* Сейчас мы дадим еще одно описание $K_0$, с помощью идемпотентов. Мы уже видели, что идемпотентная матрица над кольцом $R$ однозначно определяет проективный $R$-модуль. Однако, разные идемпотентные матрицы могут задавать изоморфные проективные модули.

Лемма. Если $p, q$ — идемпотентные матрицы над кольцом $R$, то соответствующие им конечно порожденные $R$-модули изоморфны тогда и только тогда, когда $p$ и $q$ можно расширить (дополнив нулями) так, что они окажутся одного размера, и будут сопряжены посредством обратимой матрицы того же размера.

Доказательство. Очевидно, что описанное условие является достаточным. Обратно, предположим, что $p \in M(m, R)$ и $q \in M(n, R)$ задают изоморфные $R$-модули $pR^m$ и $qR^n$. Этот изоморфизм можно продолжить до гомоморфизма $R$-модулей $\alpha\colon R^m \to R^n$, положив $\alpha = 0$ на дополнении $R^m(1-p)$ и вложив $qR^n$ в $R^n$. Аналогично, обратный к нему изоморфизм можно продолжить до гомоморфизма $\beta\colon R^n \to R^m$, равный $0$ на $R^n(1-q)$. Пусть $a \in M(n, m, R)$ и $b \in M(m, n, R)$ — матрицы гомоморфизмов $\alpha$ и $\beta$. При этом $ab = q$, $ba = p$, $a = qa = ap$, $b = pb = bq$. Положим теперь $N = n + m$; нетрудно видеть, что сопряжение при помощи матрицы

$$\begin{pmatrix} 1-p & b \\ a & 1-q \end{pmatrix}$$

переводит $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$, а последняя матрица сопряжена с $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ при помощи матрицы перестановки. $\square$

Обозначим через $M(R)$ объединение колец матриц $M(n, R)$ по всем $n$, где $M(n, R)$ вложено в $M(n+1, R)$ посредством отображения $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Такие отображения являются гомоморфизмами колец без единицы, поэтому $M(R)$ является кольцом без единицы.

Обозначим через $GL(R)$ объединение групп $GL(n, R)$ по всем $n$, где $GL(n, R)$ вложено в $GL(n+1, R)$ посредством отображения $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Такие отображения являются гомоморфизмами групп, поэтому $GL(R)$ является группой. Обозначим через $\mathrm{Idem}(R)$ множество идемпотентных матриц в $M(R)$; группа $GL(R)$ действует на $M(R)$ сопряжением.

Предыдущую лемму теперь можно переформулировать следующим образом:

Теорема. Для любого кольца $R$ полугруппа $I(\mathcal{P}(R), \oplus)$ отождествляется с множеством орбит действия $GL(R)$ на $\mathrm{Idem}(R)$ сопряжением. Операция $\oplus$ индуцирована отображениями $(p, q) \mapsto \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$. Группа $K_0(R)$ является группой Гротендика этой полугруппы.

Теорема (Морита-инвариантность). Для любого кольца $R$ и для любого целого $n \geqslant 1$ существует естественный изоморфизм $K_0(R) \cong K_0(M_n(R))$.
Доказательство. Отождествляя $M_k(M_n(R))$ с $M_{kn}(R)$, получаем, что $\mathrm{Idem}(M_n(R)) = \mathrm{Idem}(R)$ и $GL(M_n(R)) = GL(R)$.

*2.3.3. Соотношения в* $G_0(R)$. Лемма. Пусть $R$ — кольцо.

1. Если $0 \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \to C_0 \to 0$ — точная последовательность конечно порожденных $R$-модулей, то $\sum(-1)^i[C_i] = 0$ в $G_0(R)$.

2. Если кольцо $R$ нетерово и $0 \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \to C_0 \to 0$ — произвольный комплекс конечно порожденных $R$-модулей, то $\sum_i(-1)^i[C_i] = \sum_i(-1)^i[H_i(C)]$ в $G_0(R)$.

3. Если $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq M_{n+1} = 0$ — фильтрация модуля $M$ конечно порожденными модулями, то $[M] = \sum_i [M_i/M_{i+1}]$ в $G_0(R)$.

Доказательство. Для цепного комплекса $C_\bullet$ обозначим $Z_i = \ker(d) \subseteq C_i$ и $B_i = \mathrm{im}(d) \subseteq C_i$. Тогда имеются короткие точные последовательности $0 \to Z_i \to C_i \to B_{i-1} \to 0$ и $0 \to B_i \to Z_i \to H_i(C) \to 0$. Если все указанные модули конечно порождены, то получаем соотношения в $G_0(R)$, из которых следует, что $\sum(-1)^i[C_i] = \sum(-1)^i[H_i(C)]$. Если $R$ нетерово, то конечная порожденность имеет место, и мы доказали (2). Для доказательства (1) заметим, что модуль $B_i$ является образом конечно порожденного модуля, поэтому сам конечно порожден. Кроме этого, для точного комплекса $B_i = Z_i$, поэтому и $Z_i$ конечно порождены; в итоге получаем, что $[C_i] = [Z_i] + [B_{i-1}] = [Z_i] + [Z_{i-1}]$, откуда следует (1). Для доказательства (3) достаточно рассмотреть точные последовательности вида $0 \to M_{i+1} \to M_i \to M_i/M_{i+1} \to 0$. □

*2.3.4. Примеры вычисления* $G_0(R)$.

1. Если $R$ — поле, то любой конечно порожденный $R$-модуль имеет вид $R^n$ для некоторого натурального $n$; размерность является сюръективным гомоморфизмом $G_0(R) \to \mathbb{Z}$, поэтому $G_0(R) \cong \mathbb{Z}$.

2. Если $R$ — область целостности, можно определить **ранг** $R$-модуля $M$ как размерность векторного поля $M \otimes_R \mathrm{Frac}(R)$ над полем частных $\mathrm{Frac}(R)$ кольца $R$. Получаем гомоморфизм $G(R) \to \mathbb{Z}$, который сюръективен в силу того, что $[R] \mapsto 1$. Поэтому $G_0(R)$ содержит прямое слагаемое $\mathbb{Z}$.

3. Пусть $R = \mathbb{Z}$; тогда $G_0(\mathbb{Z})$ порождается классами модулей $[\mathbb{Z}]$ и $[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ для целых $n \geqslant 2$ (теорема о классификации конечно порожденных абелевых групп). Точные последовательности вида $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$ показывают, что $[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] = 0$ для всех $n$, поэтому группа $G(\mathbb{Z})$ циклическая и, по предыдущему пункту, изоморфна $\mathbb{Z}$.

4. Более общо, такое же рассуждение работает для любой области главных идеалов (в силу теоремы о классификации конечно порожденных модулей над кольцам главных идеалов), поэтому $G(R) = \mathbb{Z}$ и в этом случае.

5. Во всех примерах пока что $G_0(R) \cong \mathbb{Z}$. Конечно, это не всегда так: легко видеть, что если $F$ — поле, то $G(F \times F) \cong \mathbb{Z}^2$.

6. Пусть $G$ — конечная группа, и $R = \mathbb{C}[G]$ — групповая алгебра. В этом случае $R$-модули — это просто комплексные представления $G$; теория представлений учит нас, что каждое конечномерное представление $G$ раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений единственным образом (с точностью до перестановки слагаемых). Более того, каждая точная последовательность $R$-модулей расщепляется. Из этого немедленно следует, что $G_0(R)$ является свободной абелевой группой, базис которой образуют классы изоморфизма неприводимых представлений.

7. Во всех примерах пока что $G_0(R)$ было свободной абелевой группой. Конечно, это не всегда так. Например, если $R$ — кольцо целых числового поля, то $G_0(R) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Cl}(R)$, где $\mathrm{Cl}(R)$ — группа классов идеалов кольца $R$. Как правило, эта группа нетривиальна. Чуть позже мы увидим примеры вычисления этой группы.

*2.3.5. $G_0$ и $K_0$ регулярного кольца.* Если $R$ — коммутативное кольцо, то тензорное произведение определяет структуру ассоциативного коммутативного кольца с единицей на $K_0(R)$ (класс свободного $R$-модуля $R$ играет роль единицы). Действительно, произведение дистрибутивно относительно суммы, поскольку проективные модули являются плоскими. Вообще, для определения $K_0(R)$ можно было бы пользоваться плоскими модулями а не проективными; в силу исторических (и некоторых других) причин традиционно используются проективные модули. Впрочем, для конечно порожденных модулей над *нетеровыми* коммутативными кольцами проективность равносильна плоскости.

Кольцо $R$ называется **регулярным**, если у любого конечно порожденного $R$-модуля $M$ имеется конечная проективная резольвента, то есть, существуют конечно порожденные проективные модули $P_i$, $i = 1, \ldots, n$ и точная последовательность

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to M \to 0.$$

По теореме Гильберта о сизигиях кольцо многочленов от нескольких переменных над полем (и, как следствие, любая локализация такого кольца) является регулярным.

Напомним, что имеется очевидный гомоморфизм абелевых групп $\alpha\colon K_0(R) \to G_0(R)$, отправляющий $[P]$ в $[P]$.

Теорема. Если кольцо $R$ регулярно, то отображение $\alpha\colon K_0(R) \to G_0(R)$ является изоморфизмом абелевых групп.
Доказательство. Пусть $M$ — конечно порожденный проективный модуль. Регулярность позволяет нам выбрать конечную проективную резольвенту $P_\bullet \to M \to 0$. Тогда

$$\sum_j (-1)^j [P_j] = [M]$$

в $G(R)$, и потому $M$ лежит в образе $\alpha$. Это доказывает сюръективность отображения $\alpha$.

Указанная конструкция позволяет определить обратное отображение к $\alpha$. А именно, для конечно порожденного $R$-модуля $M$ положим $\beta([M]) = \sum_j (-1)^j [P_j]$. Покажем, что эта сумма не зависит от выбора $P$ и аддитивна. После этого $\beta$, очевидно, окажется гомоморфизмом $G_0(R) \to K_0(R)$, обратным к $\alpha$.

Пусть $Q_\bullet \to M \to 0$ — еще одна конечная проективная резольвента модуля $M$. Несложная теорема гомологической алгебры утверждает, что тождественное отображение $M \to M$

индуцирует морфизм комплексов $f\colon P_\bullet \to Q_\bullet$:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Пусть $T_\bullet$ — конус морфизма $f$. Это означает, что $T_j = Q_j \oplus P_{j-1}$, и дифференциал задается матрицей

$$\begin{pmatrix} d_Q & (-1)^{|b|} f(b) \\ 0 & d_P \end{pmatrix}.$$

Имеется точная последовательность цепных комплексов

$$0 \to Q \to T \to \Sigma P \to 0,$$

где $\Sigma P$ обозначает комплекс $P$, сдвинутый на единицу влево (то есть, $(\Sigma P)_n = P_{n-1}$. Длинная точная последовательность гомологий показывает, что $T$ — точный комплекс, поэтому $\sum_j (-1)^j [T_j] = 0$ в $K_0(R)$. При этом $[T_j] = [Q_j] + [P_{j-1}]$ в $K_0(R)$, и потому $\sum_j (-1)^j [P_j] = \sum_j (-1)^j [Q_j]$. Это и означает, что наше определение морфизма $\beta$ не зависит от выбора резольвенты.

Осталось показать аддитивность отображения $\beta$. Пусть $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ — короткая точная последовательность, и $P_\bullet \to M'$, $Q_\bullet \to M$ — конечные проективные резольвенты. Отображение $M' \to M$ индуцирует морфизм комплексов $f\colon P_\bullet \to Q_\bullet$; пусть $T_\bullet$ — конус этого морфизма. Из рассмотрения длинной точной последовательности гомологий немедленно следует, что $T_\bullet$ — проективная резольвента модуля $M''$. Поэтому

$$\beta(M'') = \sum (-1)^j [T_j] = \sum (-1)^j [Q_j] - \sum (-1)^j [P_j] = \beta(M) - \beta(M'),$$

что и доказывает аддитивность отображения $\beta$. □

Таким образом, для регулярного кольца $R$ изоморфизм $K_0(R) \to G_0(R)$ позволяет нам перенести структуру кольца с $K_0(R)$ на $G_0(R)$. Эта ситуация напоминает нам то, что мы видели в топологии: если $X$ — компактное ориентированное многообразие, то определить структуру кольца на группах гомологий $H_*(X)$ не так просто. Стандартный способ обойти эти трудности — рассмотреть группы когомологий $H^*(X)$, на которых легче ввести структуру кольца (с помощью $\cup$-произведения). Для компактного ориентированного многообразия двойственность Пуанкаре означает, что $H^*(X)$ изоморфно $H_*(X)$, что позволяет перенести структуру кольца на $H_*(X)$.

Это не случайно: $K_0(R)$ чем-то похоже на $H^*(X)$, а $G_0(R)$ чем-то похоже на $H_*(X)$; условие регулярности примерно означает, что мы имеем дело с многообразием.

*2.3.6. Дальнейшие примеры.* Приведем примеры проективных модулей, не являющихся свободными. Если $R$ — коммутативное кольцо, $P$ проективен над $R$, $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$ — максимальный идеал, положим $\mathrm{rank}_\mathfrak{m}(P) = \dim_{R/\mathfrak{m}R}(P/\mathfrak{m}P)$. Заметим, что $\mathrm{rank}_\mathfrak{m}$ — аддитивная функция.

1. Пусть $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Поскольку $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, модули $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ являются проективными и, очевидно, не являются свободными.

2. Пусть $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ и $I = (2, 1+\sqrt{-5})$. Рассмотрим отображение $R^2 \to I$, отправляющее $e_1$ в $2$ и $e_2$ в $1+\sqrt{-5}$. Несложно показать, что его ядро порождается элементами $(1+\sqrt{-5}, -2)$ и $(-3, 1-\sqrt{-5})$. Определим отображение $R^2 \to K$, отправив $e_1$ в

$(3, -1+\sqrt{-5})$ и $e_2$ в $(1+\sqrt{-5}, 2)$. Нетрудно проверить, что это отображение расщепляет короткую точную последовательность $0 \to K \to R^2 \to I \to 0$. Поэтому $K \oplus I \cong R^2$, и модули $K$, $I$ проективны. Рассмотрим проекцию $R^2$ на вторую координату. Это отображение ограничивается на отображение $K \to I$, которое является изоморфизмом. Поэтому для каждого максимального идеала $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$ выполнено $\mathrm{rank}\,\mathfrak{m}(K) = \mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(I)$; кроме того, $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(K) + \mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(I) = 2$. Значит, $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(K) = \mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(I) = 1$. Если бы $I$ был свободным модулем, то он был бы изоморфен $R$; однако, идеал $I$ не является главным. Поэтому $I$ — проективный, но не свободный $R$-модуль. Вообще, если $D$ — дедекиндова область (например, кольцо целых числового поля), то всякий идеал $I \trianglelefteq D$ проективен. Кроме того, любой неглавный идеал не является свободным.

3. Пусть $R = \mathbb{R}[x, y, z]/(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ — кольцо полиномиальных функций на вещественной сфере $S^2$. Пусть $\pi\colon R^3 \to R$ задано формулой $\pi(f, g, h) = xf + yg + zh$. Обозначим ядро отображения $\pi$ через $T$:

$$0 \to T \to R^3 \xrightarrow{\pi} R \to 0$$

Отображение $\pi$ расщепляется отображением $1 \mapsto (x, y, z)$. Поэтому $T \oplus R \cong R^3$, и $T$ проективен. Покажем, что модуль $T$ не является свободным. Предположим, что он свободен; рассуждение с рангом, как и в предыдущем примере, показывает, что $T$ должен быть изоморфен $R^2$. Выберем изоморфизм $R^2 \to T$ и обозначим через $(f, g, h)$ образ $e_1$ при этом изоморфизме. Тогда $f$, $g$ и $h$ — полиномиальные функции на сфере, и для любой точки $p = (x_0, y_0, z_0)$ выполнено $f(p)x_0 + g(p)y_0 + h(p)z_0 = 0$. Поэтому тройка $(f, g, h)$ задает касательное векторное поле на $S^2$. По теореме о причесывании ежа найдется точка $p \in S^2$ такая, что $f(p) = g(p) = h(p) = 0$. Положим $\mathfrak{m} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \trianglelefteq R$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
R^2 \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, two heads] & T \arrow[r, hook] \arrow[d] & R^3 \arrow[d, two heads] \\
(R/\mathfrak{m}R)^2 \arrow[r, "\cong"] & T/\mathfrak{m}T \arrow[r, hook] & (R/\mathfrak{m}R)^3
\end{tikzcd}$$

и заметим, что $R/\mathfrak{m}R \cong \mathbb{R}$ (изоморфизм устанавливается вычислением значения в точке $p$). Посмотрим на $e_1 \in R^2$ в левом верхнем углу и вычислим его образ в правом нижнем углу двумя способами. С одной стороны, $e_1 \mapsto (f(p), g(p), h(p)) = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. С другой стороны, вертикальная стрелка отправляет $e_1$ в $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$, а композиция нижних горизонтальных стрелок инъективна, потому образ $e_1$ в $\mathbb{R}^3$ отличен от нуля. Полученное противоречие показывает, что модуль $T$ не является свободным (и, более того, не содержит $R$ в качестве прямого слагаемого.

4. Пусть $S = \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$, и пусть $R \subseteq S$ — векторное подпространство, порожденное мономами четной степени. Таким образом, $S$ — кольцо полиномиальных функций на окружности, а $R$ — подкольцо полиномиальных функций, для которых $f(x, y) = f(-x, -y)$. Поэтому нужно воспринимать $R$ как кольцо полиномиальных функций на проективной прямой $\mathbb{R}P^1$. Пусть $P \subseteq S$ — векторное подпространство, натянутое на мономы нечетной степени. Легко видеть, что $P$ является конечно порожденным $R$-модулем, и имеется проекция $\pi\colon R^2 \twoheadrightarrow P$, $e_1 \mapsto x$, $e_2 \mapsto y$. Определим отображение $\xi\colon P \to R^2$ посредством $h \mapsto \begin{pmatrix} xh \\ yh \end{pmatrix}$. Легко видеть, что $\pi \circ \xi = \mathrm{id}_P$, поэтому модуль $P$ проективен. Упражнение. Покажите, что $P$ не является свободным.

*2.3.7. Дальнейшие свойства.* Приведем без доказательства еще несколько свойств $G_0$.

- Если кольцо $R$ нетерово, то группа Гротендика $G_0(R)$ порождается элементами вида $[R/\mathfrak{p}]$, где $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ — простой идеал.

- По конечно порожденному $R$-модулю $M$ можно построить конечно порожденный $R'$-модуль $M \otimes_R R'$. Однако, для точной последовательности $0 \to L \to M \to N \to 0$ последовательность $0 \to L \otimes_R R' \to M \otimes_R R' \to N \otimes_R R' \to 0$ уже не обязана быть точной: функтор тензорного произведения в общем случае точен лишь справа. Если же $R'$ является **плоским** $R$-модулем, то полученная последовательность все же точна (это фактически определение плоского модуля), и мы получаем гомоморфизм групп $G(R) \to G(R')$.

- **гомотопическая инвариантность:** если кольцо $R$ нетерово, то $G(R) \cong G(R[t])$. Геометрический смысл: $\mathrm{Spec}(R[t]) \cong \mathrm{Spec}(R) \times \mathbb{A}^1$.

- Если $F$ — поле, то $K_0(F[x_1, \dots, x_n]) \cong \mathbb{Z}$. Действительно, по теореме Гильберта о сизигиях кольцо $F[x_1, \dots, x_n]$ регулярно, и потому $K_0(F[x_1, \dots, x_n]) \cong G_0(F[x_1, \dots, x_n])$ (см. 2.3.5). В силу гомотопической инвариантности $G_0(F[x_1, \dots, x_n]) \cong G_0(F)$, и размерность устанавливает изоморфизм $G_0(F) \cong \mathbb{Z}$.

Проективный модуль $P$ называется **стабильно свободным**, если найдется свободный модуль $F$, для которого модуль $P \oplus F$ свободен. Напомним, что для любого максимального идеала $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$ функция $\mathrm{rank}_\mathfrak{m}$ является аддитивной функцией на классах изоморфизма конечно порожденных проективных модулей. Она индуцирует сюръективный гомоморфизм $\mathrm{rank}_\mathfrak{m} \colon K_0(R) \to \mathbb{Z}$. Поэтому $K_0(R)$ содержит прямое слагаемое, изоморфное $\mathbb{Z}$. **Приведенной группой Гротендика** называется фактор-группа $\widetilde{K}_0(R) = K_0(R)/\langle R \rangle$.

Есть еще один способ определить эту группу. Введем на множестве классов изоморфизма конечно порожденных проективных модулей отношение эквивалентности так, что $P \sim P \oplus R$ для любого $P$. На полученном фактор-множество можно ввести структуру моноида посредством операции $[P] + [Q] = [P \oplus Q]$: класс $[0] = [R]$ является нейтральным элементом. Если $P$ проективен, то $P \oplus Q$ свободен для некоторого $[P]$; поэтому $[P] + [Q] = 0$. Значит, мы получили группу. Она изоморфна $K_0(R)$: класс эквивалентности модуля $P$ соответствует элементу $[P] \in \widetilde{K}_0(R)$.

Предложение. Пусть $R$ — коммутативное кольцо. Равносильны:

1. $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$;
2. $\widetilde{K}_0(R) = 0$;
3. каждый конечно порожденный проективный $R$-модуль стабильно свободен.

Доказательство. Упражнение. □

Каждый конечно порожденный проективный $F[x_1, \dots, x_n]$-модуль над полем стабильно свободен. В 1950-х годах Жан-Пьер Серр предположил, что каждый конечно порожденный проективный модуль над $F[x_1, \dots, x_n]$ на самом деле свободен. Эту гипотезу независимо друг от друга доказали Даниэль Квиллен и Андрей Суслин в середине 1970-х.

Пример. Пусть $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $I = (2, 1 + \sqrt{-5}) \trianglelefteq R$. Известно, что $I$ не является главным идеалом. Мы уже видели, что $I$ — проективный, но не свободный модуль ранга 1. Может ли I быть стабильно свободным? В этом случае было бы $I \oplus R^k \cong R^{k+1}$ для некоторого $k$. Применим внешнее произведение $\lambda^{k+1}(-)$:

$$R \cong \Lambda^{k+1}(R^{k+1}) \cong \Lambda^{k+1}(I \oplus R^k) \cong \Lambda^1(I) \otimes \Lambda^k(R^k) \cong I \otimes R \cong I.$$

Но I не может быть изоморфен R: в этом случае I был бы главным идеалом. Поэтому I не является стабильно свободным и класс $[I] \in \widetilde{K}(R)$ отличен от нуля.

Аналогично, любой неглавный идеал дедекиндовой области является проективным (но не стабильно свободным) модулем ранга 1. Поэтому для дедекиндовой области D выполнено $K_0(D)$ тогда и только тогда, когда D — область главных идеалов.

# 3 $K_1$ и $K_2$

## 3.1 $K_1$ кольца

*3.1.1. Определение* $K_1$. Мы построили $K_0(R)$, задавшись целью обобщить понятие размерности [векторных пространств] на R-модули. Сейчас мы построим $K_1(R)$, обобщив понятие *определителя*. Классический определитель является инвариантом эндоморфизма свободного модуля. Пусть $f\colon A \to A$, $g\colon B \to B$ — два эндоморфизма R-модулей. Напомним, что морфизмом из f в g называется гомоморфизм $u\colon A \to B$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "u"] & B \end{tikzcd}$$

коммутативна. Аналогично, точной последовательностью эндоморфизмов называются коммутативная диаграмма вида

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u_0"] & A \arrow[r, "u_1"] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

в которой строки являются точными последовательностями модулей.

Рассмотрим свободную абелеву группу натянутую на множество классов изоморфизма автоморфизмов $[P \xrightarrow{\alpha} P]$, где P — конечно порожденный проективный модуль, а $\alpha$ является изоморфизмом. Профакторизуем ее по следующим соотношениям:

1. $[P \xrightarrow{\alpha} P] = [P' \xrightarrow{\alpha'} P'] + [P'' \xrightarrow{\alpha''} P'']$, если имеется точная последовательность автоморфизмов $0 \to \alpha' \to \alpha \to \alpha'' \to 0$.
2. $[P \xrightarrow{\alpha\beta} P] = [P \xrightarrow{\alpha} P] + [P \xrightarrow{\beta} P]$ для всех пар $\alpha, \beta\colon P \to P$.

Фактор-группа обозначается через $K_1(R)$. Заметим, что из соотношения 2 следует, что $[P \xrightarrow{\mathrm{id}} P] = 0$ для всех конечно порожденных проективных модулей P. Из соотношения 1 следует, что если $\alpha\colon P \to P$ и $\beta\colon Q \to Q$ — автоморфизмы, то $[P \oplus Q \xrightarrow{\alpha\oplus\beta} P \oplus Q] = [P \xrightarrow{\alpha} P] + [Q \xrightarrow{\beta} Q]$.

*3.1.2. Альтернативные определения.* Оказывается, что мы могли бы обойтись лишь свободными модулями (а не произвольными проективными) и получилась бы та же самая группа. Более того, можно было обойтись и без коротких точных последовательностей, профакторизовав лишь по соотношениям для прямых сумм (то есть, для расщепляющихся коротких точных последовательностей).

Пусть $A \in \mathrm{GL}_n(R)$; тогда в $K_1(R)$ имеется класс автоморфизма $[R^n \xrightarrow{A} R^n]$, задаваемого умножением на матрицу $A$ слева. Мы получили отображение $\mathrm{GL}_n(R) \to K_1(R)$; из соотношения 2 следует, что оно является гомоморфизмом групп. Напомним, что мы традиционно вкладываем $\mathrm{GL}_n(R)$ в $\mathrm{GL}_{n+1}(R)$ посредством отображения $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. При этом, очевидно, $[R^{n+1} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} R^{n+1}] = [R^n \xrightarrow{A} R^n]$ в $K_1(R)$. Поэтому мы получаем отображение $\mathrm{GL}(R) \to K_1(R)$. Группа $K_1(R)$ является абелевой, поэтому наше отображение пропускается через фактор по коммутанту группы $\mathrm{GL}(R)$, и мы получили отображение

$$\mathrm{GL}(R)_{ab} = \mathrm{GL}(R)/[\mathrm{GL}(R), \mathrm{GL}(R)] \to K_1(R).$$

Покажем, что это отображение является изоморфизмом.

На самом деле, мы заодно докажем совпадение $K_1(R)$ с альтернативными определениями. А именно, определим $K_1^{\mathrm{free}}(R)$ как фактор-группу, аналогичную $K_1(R)$, но с заменой слова «проективный модуль» на «свободный модуль». Аналогично, $K_1^{\oplus}(R)$ определяется как фактор-группа, в которой соотношения вида (1) заменили на соотношения для прямых сумм. Наконец, $K_1^{\oplus,\mathrm{free}}(R)$ — группа, для определения которой совершили обе замены одновременно.

Рассмотрим категорию $\mathcal{D}$, объекты которой — классы изоморфизма проективных $R$-модулей, а морфизмы из $[P]$ в $[Q]$ — классы $[S]$ такие, что $P \oplus S \cong Q$. Заметим, что изоморфизм проективных модулей $f\colon P \xrightarrow{\cong} P'$ индуцирует изоморфизм групп $\mathrm{Aut}(P) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Aut}(Q)$, $\alpha \mapsto f\alpha f^{-1}$. Если мы теперь заменим изоморфизм $f$ на другой изоморфизм, $f'$, мы получим, вообще говоря, другой изоморфизм $\mathrm{Aut}(P) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Aut}(Q)$, но при переходе к абелианизациям мы получим тот же самый изоморфизм $\mathrm{Aut}(P)_{ab} \to \mathrm{Aut}(Q)_{ab}$. Поэтому можно рассмотреть функтор из категорию $\mathcal{D}$ в категорию абелевых групп, отправляющий $[P]$ в $\mathrm{Aut}(P)_{ab}$ и отображение $[S]\colon [P] \to [P \oplus S]$ — в отображение $\mathrm{Aut}(P)_{ab} \to \mathrm{Aut}(P \oplus Q)_{ab}$, $\varphi \mapsto \varphi \oplus \mathrm{id}_Q$. Копредел этого функтора $\mathcal{D} \to \mathfrak{Ab}$ обозначим через $\varinjlim_P \mathrm{Aut}(P)_{ab}$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_P \mathrm{Aut}(P)_{ab} \arrow[r, two heads] & K_1^{\oplus}(R) \arrow[r, two heads] & K_1(R) \\
\mathrm{GL}(R)_{ab} = \varinjlim_n \mathrm{GL}_n(R)_{ab} \arrow[u] \arrow[r, two heads] & K_1^{\oplus,\mathrm{free}}(R) \arrow[u] \arrow[r, two heads] & K_1^{\mathrm{free}}(R) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Теорема. В этой диаграмме все стрелки являются изоморфизмами.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся некоторые леммы.

*3.1.3. Элементарная группа.* Обозначим через $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij} \in \mathrm{GL}_n(R)$ **элементарную трансвекцию**: матрицу, которая отличается от единичной в позиции $(i, j)$, где $\xi \in R$, $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Так же мы будем обозначать и образ этой матрицы в $\mathrm{GL}(R)$. Обозначим через $E_n(R)$ подгруппу в $\mathrm{GL}_n(R)$, порожденную всеми элементарными трансвекциями, и через

$E(R)$ — подгруппу в $GL(R)$, порожденную всеми элементарными трансвекциями. Эти подгруппы называютс **элементарными подгруппами** соответствующих полных линейных групп, а их элементы — **элементарными матрицами**. Очевидно, что при наших фиксированных вложениях $GL_n(R) \to GL_{n+1}(R)$ подгруппа $E_n(R)$ переходит внутрь подгруппы $E_{n+1}(R)$, поэтому $E(R)$ является объединением подгрупп $E_n(R)$ (точнее, копределом). Умножение на элементарную трансвекцию слева осуществляет элементарное преобразование со строками матрицы, а умножение справа — со столбцами. Таким образом матрица лежит в $E(R)$ если и только если ее можно получить из единичной матрицы такими элементарными преобразованиями строк и столбцов.

Лемма.

1. Если $X \in M_n(R)$, то матрицы $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{pmatrix}$ лежат в $E_{2n}(R)$.
2. Если $A \in GL_n(R)$, то матрица $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$ лежит в $E_{2n}(R)$.
3. Пусть матрица $A \in GL_n(R)$ получена из единичной перестановкой двух столбцов и домножением одного из них на $-1$. Тогда $A$ лежит в $E_n(R)$.

Доказательство.

1. Очевидно, что матрица вида $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ получается из единичной элементарными преобразованиями столбцов.
2. Рассмотрим цепочку матриц
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & A \\ A^{-2} - A^{-1} & A^{-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ A^{-2} - A^{-1} & A^{-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$$
Нетрудно видеть, что каждый шаг в этой цепочке может быть получен элементарным преобразованием строк.
3. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Мы будем называть **допустимыми преобразованиями** столбцов либо прибавление к одному столбцу другого, умноженного на некоторый скаляр, либо их перестановку с одновременной заменой знака одного из них. Как показано в лемме, допустимые преобразования столбцов состоят в домножении матрицы справа на некоторые элементарные матрицы. Аналогично определяются допустимые преобразования строк, и оказывается, что они состоят в домножении матрицы слева на некоторые элементарные.

Следующая лемма станет ключевым шагом в доказательстве теоремы.

Лемма Уайтхеда. $E(R) = [GL(R), GL(R)]$.
Доказательство.

- «$\subseteq$»: Покажем, что уже $E_n(R) \subseteq [GL_n(R), GL_n(R)]$ при $n \geqslant 3$. Пусть $\xi \in R$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$; выберем $k \neq i, j$. *Коммутационная формула Шевалле* говорит, что $[t_{ik}(\xi), t_{kj}(1)] = t_{ij}(\xi)$; поэтому $t_{ij}(\xi) \in [E_n(R), E_n(R)] \leqslant [GL_n(R), GL_n(R)]$ (мы даже доказали, что группа $E_n(R)$ совершенна при $n \geqslant 3$).

- «$\supseteq$»: Пусть $A, B \in GL_n(R)$. Тогда в $GL_{2n}(R)$ имеем
$$\begin{pmatrix} ABA^{-1}B^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & B^{-1}A^{-1} \end{pmatrix},$$
и все входящие в него матрицы, кроме первой, элементарны по предыдущей лемме. Поэтому и первая матрица, отождествляемая с $[A, B]$, элементарна.

$\square$

Следствие. Если $A \in GL_n(R)$, $B \in GL_k(R)$, $X \in M(n, k, R)$, то $\begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ в $GL(R)_{ab}$. Если $n = k$, то эта матрица также совпадает с $\begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ в $GL(R)_{ab}$.

Доказательство. Заметим, что
$$\begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & A^{-1}X \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
и последняя матрица лежит в $E(R) = [GL(R), GL(R)]$. Кроме того, если $n = k$, то
$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix},$$
и последняя матрица также лежит в $E(R) = [GL(R), GL(R)]$.

Доказательство теоремы.

- Очевидно, что четыре отмеченные стрелки являются сюръективными.
- Покажем, что вертикальные стрелки сюръективны. К примеру, пусть $\alpha\colon P \to P$ — автоморфизм конечно порожденного проективного модуля, и $Q$ — проективный модуль такой, что $P \oplus Q \cong R^n$ для некоторого $n$. Тогда $[P \xrightarrow{\alpha} P] = [P \oplus Q \xrightarrow{\alpha \oplus \mathrm{id}_Q} P \oplus Q]$ в $K_1^{\oplus}(R)$, поэтому отображение $K_1^{\oplus,\text{free}} \to K_1^{\oplus}$ сюръективно. Аналогичное доказательство работает для остальных вертикальных стрелок.
- В категории $\mathcal{D}$ имеется подкатегория конечно порожденных *свободных модулей* $\mathcal{F}$; нетрудно видеть, что $\mathcal{F}$ *кофинальна* в $\mathcal{D}$, поэтому отображение $\varinjlim_n GL_n(R)_{ab} \to \varinjlim_P \mathrm{Aut}(P)_{ab}$ является изоморфизмом.
- Определим отображение $K_1^{\text{free}}(R) \to GL(R)_{ab}$, отправив класс $[R^n \xrightarrow{A} R^n]$ в матрицу $A$. Нужно проверить, что это отображение корректно определено, то есть, согласовано с соотношениями из определения группы $K_1^{\text{free}}(R)$. Согласованность с композицией очевидна. Далее, пусть имеется короткая точная последовательность автоморфизмов свободных модулей
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"] & F \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & F'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F' \arrow[r] & F \arrow[r] & F'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
Тогда в некотором базисе матрица $\alpha$ имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha' & * \\ 0 & \alpha'' \end{pmatrix}$. По Следствию класс этой матрицы в $GL(R)_{ab}$ равен $\begin{bmatrix} \alpha' & 0 \\ a & \alpha'' \end{bmatrix}$. Таким образом, $[\alpha] = [\alpha'] + [\alpha'']$. Нетрудно проверить, что построенное отображение обратно к композиции нижних горизонтальных стрелок; поэтому все отображения в нижнем ряду являются изоморфизмами.

- Похожим образом определяется отображение $K_1(R) \to \varinjlim_P \mathrm{Aut}(P)_{ab}$: отправим класс $[P \xrightarrow{\varphi} P]$ в класс $[\varphi \in \mathrm{Aut}(P)]$ в указанном копределе. Согласованность с композицией снова очевидна. Пусть имеется короткая точная последовательность автоморфизмов проективных модулей

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & P'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P' \arrow[r] & P \arrow[r] & P'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Выберем модули $Q'$ и $Q''$ такие, что $P' \oplus Q'$ и $P'' \oplus Q''$ свободны. Заметим, что $P \cong P' \oplus P''$, поэтому и модуль $P \oplus Q' \oplus Q''$ свободен. Прибавим к строкам нашей диаграммы расщепляющуюся точную последовательность $0 \to Q' \to Q' \oplus Q'' \to Q'' \to 0$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P' \oplus Q' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha' \oplus \mathrm{id}_{Q'}"] & P \oplus Q' \oplus Q'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha \oplus \mathrm{id}_{Q'} \oplus \mathrm{id}_{Q''}"] & P'' \oplus Q'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'' \oplus \mathrm{id}_{Q''}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P' \oplus Q' \arrow[r] & P \oplus Q' \oplus Q'' \arrow[r] & P'' \oplus Q'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Мы получили точную последовательность автоморфизмов свободных модулей. В предыдущем пункте мы показали, что из этого следует равенство $[\alpha \oplus \mathrm{id}_{Q'} \oplus \mathrm{id}_{Q''}] = [\alpha' \oplus \mathrm{id}_{Q'}] + [\alpha'' \oplus \mathrm{id}_{Q''}]$, откуда получаем, что $[\alpha] = [\alpha'] + [\alpha'']$. Построенное отображение является обратным к композиции верхних горизонтальных стрелок, поэтому все морфизмы в верхней строчке являются изоморфизмами.

*3.1.4. Примеры.*

1. Если $R$ — коммутативное кольцо, то определитель $\det\colon GL(R) \to R^*$ пропускается через абелианизацию, и потому индуцирует отображение $\det\colon K_1(R) \to R^*$. Это отображение расщепляется: отправим $r \in R^*$ в класс автоморфизма $R \xrightarrow{r} R$. Таким образом, $K_1(R)$ содержит $R^*$ в качестве прямого слагаемого: $K_1(R) \cong R^* \oplus SK_1(R)$. Для вычисления $K_1(R)$ теперь достаточно вычислить $SK_1(R)$.

2. Если $F$ — поле, то $K_1(F) = F^*$. Для этого достаточно показать, что если матрица $A \in GL(F)$ имеет единичный определитель, то она элементарна. Заметим сначала, что диагональная матрица с определителем 1 элементарна. Действительно, если $A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$, то $[F^n \xrightarrow{A} F^n] = [F \xrightarrow{d_1} F] + \dots + [F \xrightarrow{d_n} F] = [F \xrightarrow{d_1 \dots d_n} F] = [F \xrightarrow{1} F] = 0$ в $K_1(F)$. Осталось заметить, что произвольная матрица над полем приводится к диагональному виду допустимыми преобразованиями строк и столбцов. Значит, найдутся элементарные матрицы $T_1$, $T_2$ такие, что $T_1AT_2$ диагональна. Выше мы показали, что $T_1AT_2$ элементарна, потому и $A$ элементарна.

3. Если $R$ — эвклидово кольцо, то $K_1(R) \cong R^*$. Действительно, снова достаточно показать, что всякая обратимая матрица определителя 1 элементарна. Но любая матрица над эвклидовым кольцом приводится к верхнетреугольному виду элементарными преобразованиями строк: алгорифм Эвклида позволяет из пары элементов $(a, b)$ элементарными преобразованиями получать пару $(\gcd(a, b), 0)$; итерация этого процесса позволяет добиться того, что в первом столбце все элементы, кроме одного, равны

нулю. Но элементы, стоящие на диагонали в обратимой верхнетреугольной матрице, обязаны быть обратимыми. После этого операциями над столбцами можно обнулить и все остальные внедиагональные элементы.

*3.1.5. Определители.* Возможны следующие определения определителя (нас интересует только определитель обратимой матрицы):

1. Определитель — это полилинейная антисимметричная нормированная функция от столбцов матрицы (нормированность здесь означает, что определитель единичной матрицы равен 1).

2. Определитель матрицы $A = (a_{ij}) \in M(n, R)$ равен

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \dots a_{n,\pi(n)}.$$

3. Если нам удалось привести матрицу к виду $\begin{pmatrix} u & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ допустимыми преобразованиями, то ее определитель равен $u$.

Над полем все эти определения эквивалентны. Над произвольным коммутативным кольцом третье определение теряет смысл, но первое и второе все еще эквивалентны. При этом для коммутативного кольца выполнены следующие свойства определителя:

4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

5. $\det(t_{ij}(\xi)) = 1$ для любой элементарной трансвекции $t_{ij}(\xi)$.

6. $\det(A \oplus (1)) = \det(A)$.

Над некоммутативным кольцом первое определение полностью теряет смысл: если $x, y \in R$ таковы, что $xy \neq yx$, то

$$xy = xy \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = y \det \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = yx \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = yx,$$

противоречие. Второе определение в некоммутативном случае тоже не очень осмысленно: функция, задаваемая такой формулой, не удовлетворяет условию (4). Действительно, если снова $xy \neq yx$, то

$$\det \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \det \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & y \end{pmatrix} \right) = xy \text{ и } \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = yx.$$

Наконец, третье определение в некоммутативном случае тоже не является определением: по лемме Уайтхеда матрицы $\begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} yx & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ переводятся друг в друга допустимыми преобразованиями.

В 1943 году Жан Дьедонне ввел определитель (называемый теперь **определителем Дьедонне**) матриц над телом $D$, рассмотрев значение третьего определения в абелианизации $D^*_{ab} = D^*/[D^*, D^*]$. Он показал, что такой определитель корректно определен и индуцирует изоморфизм групп $GL_n(D)_{ab} \cong D^*_{ab}$. Это было первым шагом в построении $K_1(R) = GL_n(R)_{ab}$.

В 1940-х годах Генри Уайтхед для классификации CW-комплексов использовал определитель над групповым кольцом $\mathbb{Z}G$, где $G = \pi_1(X)$ — фундаментальная группа пространства $X$. Группа $G$ не обязана быть абелевой, поэтому кольцо $\mathbb{Z}G$ не всегда коммутативно. Этот определитель принимает значения в группе $Wh(G) = GL(\mathbb{Z}G)/(E(\mathbb{Z}G) \cdot \langle \pm g \rangle_{g \in G})$, которая называется **группой Уайтхеда**. Как видно, она отличается от $K_1(\mathbb{Z}G)$ факторизацией по «тривиальным обратимым элементам» в $\mathbb{Z}G$ вида $\pm g$.

Набор гомоморфизмов $\delta_n \colon GL_n(R) \to G$ в группу $G$ называется **определителем Уайтхеда–Басса** над кольцом $R$, если эти гомоморфизмы удовлетворяют свойствам (4)–(6). Несложно показать, что $K_1(R)$ классифицирует такие определители в следующем смысле: определители Уайтхеда–Басса взаимно однозначно соответствуют гомоморфизмам $K_1(R) \to G$.

## 3.2 Стабилизация

*3.2.1. Стабильный ранг.* Напомним, что строка $v = (a_1, \dots, a_n) \in {}^nR$ называется **унимодулярной справа**, если правый идеал, порожденный элементами $a_1, \dots, a_n$, совпадает с единичным. Эквивалентно, найдутся элементы $b_1, \dots, b_n \in R$ такие, что $a_1b_1 + \dots + a_nb_n = 1$. Это условие можно записать в матричном виде: найдется столбец $u \in R^n$ такой, что $vu = 1$. Очевидно, что если строка $v \in {}^nR$ унимодулярна, то для любой обратимой матрицы $A \in GL_n(R)$ строка $vA$ тоже унимодулярна: если $vu = 1$, то и $(vA)(A^{-1}u) = 1$. Множество всех унимодулярных строк из ${}^nR$ мы будем обозначать через $Um_n(R)$. На этом множестве действует элементарная группа $E_n(R)$ (правым умножением). Аналогично определяется унимодулярность слева; в дальнейшем мы будем по умолчанию иметь дело с правыми модулями, унимодулярными справа строчками, правым стабильным рангом, и т. д.

Отступление для знатоков: нетрудно видеть, что $Um_n(R) \cong Hom(Spec(R), \mathbb{A}^n \setminus 0)$. Более того (как доказали Фабиан Морель и Жан Фазель), если $R$ является гладкой алгеброй над полем, то $Um_n(R)/E_n(R) \cong [Spec(R), \mathbb{A}^n \setminus 0]_{\mathbb{A}^1}$, где через $[X, Y]_{\mathbb{A}^1}$ мы обозначаем множество морфизмов из $X$ в $Y$ в $\mathbb{A}^1$-гомотопической категории схем над $k$.

Будем говорить, что унимодулярную строку $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in {}^{n+1}R$ **можно сократить**, если найдутся $r_1, \dots, r_n$ такие, что строка $(a_1 + a_{n+1}r_1, \dots, a_n + a_{n+1}r_n) \in {}^nR$ снова унимодулярна. Иными словами, унимодулярную строку $v \in {}^{n+1}R$ можно сократить, если найдется матрица $A \in GL_{n+1}(R)$ вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n & 1 \end{pmatrix}$$

такая, что первые $n$ позиций матрицы $vA$ образуют унимодулярную строчку.

Кольцо $R$ **обладает $n$-сокращением**, если каждую унимодулярную строчку из ${}^{n+1}R$ можно сократить. Наконец, **стабильный ранг** кольца $R$ (обозначение: $sr(R)$) — это наименьшее положительное натуральное $n$, для которого $R$ обладает $n$-сокращением; если такого $n$ не существует, положим $sr(R) = \infty$.

Леонид Васерштейн заметил, что из $n$-сокращения следует $(n+1)$-сокращение: пусть $a_1b_1 + \dots + a_{n+2}b_{n+2} = 1$. Положим $b = a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2}$ и запишем $a_1b_1 + \dots + a_nb_n + b \cdot 1 = 1$. Из $n$-сокращения теперь следует, что для некоторых $c_1, \dots, c_n$ строчка $(a_1 + bc_1, \dots, a_n + bc_n)$ является унимодулярной. Поэтому и строчка $v = (a_1 + bc_1, \dots, a_n +$

$bc_n, a_{n+1})$ унимодулярна. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -b_{n+1}c_1 & -b_{n+1}c_2 & \dots & -b_{n+1}c_n & 1 \end{pmatrix}$$

и заметим, что строка $vA = (a_1 + a_{n+2}(b_{n+2}c_1), \dots, a_n + a_{n+2}(b_{n+2}c_n), a_{n+1} + a_{n+2}0)$ является унимодулярной.

Напомним, что элементарная подгруппа $E_n(R) \leqslant GL_n(R)$ порождена элементарными трансвекциями $t_{ij}(\xi)$, $\xi \in R$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$. Вообще говоря, мы не предполагаем, что она является нормальной, и обозначаем через $K_1^{GL_n}(R)$ фактор-множество $GL_n(R)/E_n(R)$. Рассмотрим отображения

$$\begin{array}{rrcl} s_{n,n+1}\colon & K_1^{GL_n}(R) & \to & K_1^{GL_{n+1}}(R), \\ & AE_n(R) & \mapsto & AE_{n+1}(R), \end{array}$$

и

$$\begin{array}{rrcl} s_n\colon & K_1^{GL_n}(R) & \to & K_1(R), \\ & AE_n(R) & \mapsto & [A]. \end{array}$$

Они называются **отображениями стабилизации** (а если участвующие в них фактор-множества являются фактор-группами — **гомоморфизмами стабилизации**). Мы ожидаем, что (для достаточно хороших колец $R$) эти гомоморфизмы являются изоморфизмами при достаточно больших $n$.

*3.2.2. Теорема Басса.* В 1964 году Хайман Басс доказал следующую теорему.

Теорема. Предположим, что $\mathrm{sr}(R) \leqslant n < \infty$. Тогда

1. $E_{n+1}(R)$ транзитивно действует [правым умножением] на множество унимодулярных строк из ${}^{n+1}R$;

2. $GL_{n+1}(R) = GL_n(R)E_{n+1}(R)$; отображения $s_{n,n+1}$ и $s_n$ сюръективны.

3. $E_{n+1}(R) \trianglelefteq GL_{n+1}(R)$; отображения $s_{n+1,n+2}$ и $s_{n+1}$ являются гомоморфизмами групп.

4. $[GL_{n+1}(R), GL_1(R)E_{n+1}(R)] \subseteq E_{n+1}(R)$.

Доказательство.

1. Ключевое соображение: с унимодулярной строкой длины $n+1$ можно домножением справа на элементарные матрицы проделать следующие преобразования: а) добиться, чтобы первые $n$ элементов образовали унимодулярную строку; б) прибавить эти $n$ элементов к последнему месту так, чтобы там оказалась единица; в) прибавить эту единицу обратно к первым $n$ элементам так, чтобы они обнулились.

   А именно, пусть $u \in {}^nR$, $u_{n+1} \in R$, и $(u \ \ u_{n+1}) \in \mathrm{Um}_{n+1}(R)$. При этом $n+1 > \mathrm{sr}(R)$, и эту строку можно сократить: $u' = u + u_{n+1}b \in \mathrm{Um}_n(R)$ для некоторого $b \in {}^nR$. В силу унимодулярности можно найти столбец $c \in R^n$ такой, что $u'c = 1 - u_{n+1}$. Поэтому

   $$(u \ \ u_{n+1}) \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -u' & 1 \end{pmatrix} = (0 \ \ \dots 0 \ \ 1).$$

   Это означает, что исходная строка $(u \ \ u_{n+1}) \in \mathrm{Um}_{n+1}(R)$ лежит в той же орбите, что и $(0 \ \ \dots 0 \ \ 1)$.

2. Пусть $B \in \mathrm{GL}_{n+1}(R)$. Последняя строка матрицы B унимодулярна справа, поскольку у B есть правый обратный. Запишем $B = \begin{pmatrix} X & y \\ u & u_{n+1} \end{pmatrix}$, где $X \in M(n, n, R)$. Проведем с последней строкой преобразования, описанные в первом пункте:

$$B \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -u' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку полученная матрица обратима, то и $A \in \mathrm{GL}_n(R)$. При этом

$$\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому B равно произведению матрицы $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ на элементарную матрицу. Значит, $\mathrm{GL}_{n+1}(R) = \mathrm{GL}_n(R)E_{n+1}(R)$, откуда сразу следует сюръективность $s_{n,n+1}$.

Наконец, заметим, что каждый элемент $K_1(R)$ имеет вид $s_m(AE_m(R))$ для некоторых $A \in \mathrm{GL}_m(R)$, $m > n$. Кроме того, $s_n = s_m \circ s_{m-1,m} \circ \cdots \circ s_{n,n+1}$, и каждое из отображений $s_{n,n+1}$ сюръективно; поэтому и $s_n$ сюръективно.

Заодно мы показали, что каждая матрица из $\mathrm{GL}_{n+1}(R)$ является произведением матриц, в каждой из который последний столбец или последняя строка совпадают с последним столбцом или строкой единичной матрицы.

3. Достаточно показать, что $\mathrm{GL}_n(R)$ нормализует $E_{n+1}(R)$. Сначала заметим, что для $A \in \mathrm{GL}_n(R)$ выполнено

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ uA^{-1} & 1 \end{pmatrix} \in E_{n+1}(R)$$

и

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & Av \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E_{n+1}(R).$$

Остается показать, что $At_{ij}(\xi)A^{-1} \in E_{n+1}(R)$ для $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, $\xi \in R$. Пусть $A = (a_{ij})$, $A^{-1} = (a'_{ij})$. Заметим, что $a'_{j*}a_{*i} = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{ij}(\xi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_n + A\xi e_{ij}A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_n + a_{*i}\xi a'_{j*} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -ra'_{j*}(E_n + a_{*i}\xi a'_{j*})^{-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_n & a_{*i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \xi a'_{j*} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & -a_{*i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E_{n+1}(R).
\end{aligned}$$

4. Пусть $u \in R^* = \mathrm{GL}_1(R)$. Тогда

$$\begin{aligned}
T_1 &= u \oplus E_{n-1} \oplus u^{-1} \\
&= t_{1n}(u)t_{n1}(-u^{-1})t_{1n}(u)t_{1n}(-1)t_{n1}(1)t_{1n}(-1) \in E_{n+1}(R),
\end{aligned}$$

поэтому $u \oplus E_n = (E_n \oplus u)T_1$. Если теперь $B \in GL_{n+1}(R)$, то, по уже доказанному пункту (2), $B$ можно записать в виде $B = (A \oplus 1)T_2$ для некоторых $A \in GL_n(R)$ и $T_2 \in E_{n+1}(R)$. Поэтому, если $T \in E_{n+1}(R)$, то

$$\begin{aligned}[B, (u \oplus E_n)E] &= [(A \oplus 1)T_2, (E_n \oplus u)T_1T] \\ &\equiv [A \oplus 1, E_n \oplus u] \\ &= E_{n+1}\end{aligned}$$

по модулю $E_{n+1}(R)$.

$\square$

Утверждение второго пункта теоремы Басса называется **сюръективной стабилизацией** для $K_1$-функтора. Приведем без доказательства результат об **инъективной стабилизации**: обратите внимание, что она наступает на шаг позже сюръективной.

Теорема. Пусть $\mathrm{sr}(R) < n < \infty$. Тогда $GL_n(R) \cap E(R) = E_n(R)$ и отображения

$$s_{n,m}\colon K_1^{GL_n}(R) \to K_1^{GL_m}(R) \text{ (при } m > n), \quad s_n\colon K_1^{GL_n}(R) \to K_1(R)$$

являются изоморфизмами.

*3.2.3. Теорема Суслина.* Если $R$ — коммутативное кольцо и $n \geqslant 3$, то $E_n(R) \trianglelefteq GL_n(R)$. Для доказательства нам понадобятся следующие леммы:

Лемма Уайтхеда–Васерштейна. Пусть $R$ — произвольное кольцо, $X \in M(s,t,R)$, $Y \in M(t,s,R)$, и $E_s + XY \in GL_s(R)$. Тогда $E_t + YX \in GL_t(R)$ и

$$\begin{pmatrix} E_s + XY & 0 \\ 0 & (E_t + YX)^{-1} \end{pmatrix} \in E_{s+t}(R).$$

Доказательство. Пусть $V = (E_s + XY)^{-1}$; нетрудно видеть, что тогда $(E_t + YX)^{-1} = E_t - YVX$. Кроме того,

$$\begin{pmatrix} E_s + XY & 0 \\ 0 & E_t - YVX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s & X(E_t + YX) \\ 0 & E_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ YV & E_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s & -X \\ 0 & E_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ -Y & E_t \end{pmatrix},$$

и все множители в правой части лежат в $E_{s+t}(R)$. $\square$

Следствие. Пусть $R$ — любое кольцо, $u \in R^n$, $v \in {}^nR$, $vu = 0$, и некоторая координата $v$ равна нулю. Тогда $E_n + uv \in E_n(R)$.

Доказательство. Предположим, что последняя координата $v$ равна нулю. Тогда $u = \begin{pmatrix} u' \\ u_n \end{pmatrix}$ и $v = (v' \;\; 0)$ для некоторых $u' \in R^{n-1}$ и $v' \in {}^{n-1}R$. При этом $v'u' = 0$ и $1 + v'u' = 1 \in GL_1(R)$. По лемме Уайтхеда–Васерштейна матрица $E_{n-1} + u'v'$ обратима, и

$$E_n + uv = \begin{pmatrix} E_{n-1} + u'v' & 0 \\ u_n v' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1} + u'v' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ u_n v' & 1 \end{pmatrix} \in E_n(R).$$

Упражнение: завершите доказательство. $\square$

Лемма Суслина. Пусть $R$ — коммутативное кольцо, $a \in R^n$ — унимодулярный столбец. Тогда любое решение $x \in {}^nR$ уравнения $xa = 0$ является линейной комбинацией решений вида $x(i,j) = a_j e_i - a_i e_j$, $i < j$.

Доказательство. Пусть $x = (x_1 \ \ \dots \ \ x_n)$. В силу унимодулярности $a$ найдется строка $c = (c_1 \ \ \dots \ \ c_n) \in {}^nR$ такая, что $ca = 1$. Положим $d_{ij} = x_i c_j - x_j c_i$. Прямое вычисление показывает, что $\sum_{i<j}(x_i c_j - x_j c_i)x(i,j) = x$. □

Доказательство теоремы Суслина. Достаточно доказать, что если $A = (a_{ij}) \in GL_n(R)$, то $At_{ij}(\xi)A^{-1} \in E_n(R)$ для всех $\xi \in R$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, $i \neq j$. Положим $a = a_{*i}$, $c = a'_{i*}$, $x = a'_{j*}$. Тогда $ca = 1$ и $xa = 0$. По лемме Суслина тогда $x = \sum_{i<j} y_{ij}$, где $y_{ij} = d_{ij}(a_j e_i - a_i e_j)$ для некоторых $d_{ij} \in R$. Поскольку $n \geqslant 3$, в каждой строке $y_{ij}$ хотя бы одна координата нулевая. Кроме того, $y_{ij}a = d_{ij}(a_j a_i - a_i a_j) = 0$. Потому $(\xi y_{ij})a = 0$. По следствию из леммы Уайтхеда–Васерштейна каждая матрица вида $E_n + a\xi y_{ij}$ элементарна, поэтому и их произведение элементарно:

$$\begin{aligned}\prod_{i<j}(E_n + a\xi y_{ij}) &= E_n + \sum_{i<j} a\xi y_{ij} \\ &= E_n + a\xi \sum_{i<j} y_{ij} \\ &= E_n + a\xi x \\ &= At_{ij}(\xi)A^{-1}.\end{aligned}$$

□

## 3.3 $K_2$ кольца

*3.3.1. Соотношения между элементарными трансвекциями.* Сейчас мы добавим к последовательности $K_0$, $K_1$ следующий член — $K_2(R)$. Элементы этой абелевой группы соответствуют «нестандартным» соотношениям между образующими $t_{ij}(\xi)$ элементарной группы.

Мы хотим получить описание группы $E(R)$ в терминах образующих и соотношений. В качестве образующих естественно взять элементарные трансвекции $t_{ij}(\xi)$. Нетрудно показать, что они удовлетворяют следующим соотношениям:

1. R1 $t_{ij}(r)t_{ij}(s) = t_{ij}(r+s)$;
2. R2 $[t_{ij}(r), t_{kl}(s)] = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq l, j \neq k, \\ t_{il}(rs), & \text{если } i \neq l, j = k. \end{cases}$

Кроме того, выполняется следующее соотношение:

1. R3 $(t_{ij}(1)t_{ji}(-1)t_{ij}(1))^4 = 1$.

Действительно, $t_{12}(1)t_{21}(-1)t_{12}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Нильсен (в 1924 году для $n = 3$) и Магнус (в 1935 году для $n \geqslant 4$) показали, что все соотношения между элементарными трансвекциями в $E_n(\mathbb{Z})$ следуют из соотношений (R1)–(R3). Как следствие, группа $E(\mathbb{Z})$ задается образующими $t_{ij}(r)$, $r \in \mathbb{Z}$, $i,j \geqslant 1$, $i \neq j$, с соотношениями (R1)–(R3).

Определим **[нестабильную] группу Стейнберга** $St_n(R)$ как группу, порожденную образующими $x_{ij}(r)$ при $r \in R$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, $i \neq j$ с соотношениями

1. ST1 $x_{ij}(r)x_{ij}(s) = x_{ij}(r+s)$;

2. ST2 $[x_{ij}(r), x_{kl}(s)] = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq l, j \neq k \\ x_{il}(rs), & \text{если } i \neq l, j = k. \end{cases}$

Убирая ограничения $i, j \neq n$ на образующие $x_{ij}(r)$, получаем определение **[стабильной] группы Стейнберга** $\mathrm{St}(R) = \mathrm{St}_\infty(R)$. В силу выполнения соотношений (R1)–(R3) имеются канонические сюръективные гомоморфизмы групп $\varphi_n\colon \mathrm{St}_n(R) \to E_n(R)$, $\varphi\colon \mathrm{St}(R) \to E(R)$. Ядра этих гомоморфизмов обозначаются через $K_2^{\mathrm{GL}_n}(R)$ и $K_2(R)$.

Композицию гомоморфизмов $\varphi$, $\varphi_n$ с вложениями $E(R) \to \mathrm{GL}(R)$, $E_n(R) \to \mathrm{GL}_n(R)$ будем обозначать теми же буквами. Получаем точную последовательность

$$1 \longrightarrow K_2(R) \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{St}(R) \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathrm{GL}(R) \xrightarrow{\ \pi\ } K_1(R) \longrightarrow 1,$$

где $i$ — вложение, а $\pi$ — каноническая проекция на абелианизацию.

*3.3.2. Универсальные центральные расширения.* Нетрудно понять, что если $f\colon R \to R'$ — гомоморфизм колец, то отображение $x_{ij}(R) \mapsto x_{ij}(f(r))$ определяет гомоморфизм групп $\mathrm{St}(f)\colon \mathrm{St}(R) \to \mathrm{St}(R')$. Этот гомоморфизм индуцирует гомоморфизм $K_2(f)\colon K_2(R) \to K_2(R')$. Поэтому St и $K_2$ являются функторами из категории колец в категорию групп; гомоморфизм $\varphi$ при этом индуцирует естественное преобразование функторов $\mathrm{St} \to K_2$.

Теорема. Для каждого кольца $R$ группа $K_2(R)$ совпадает с центром группы $\mathrm{St}(R)$.

Доказательство. Пусть $c \in Z(\mathrm{St}(R))$. В силу сюръективности $\varphi$ имеем $\varphi(c) \in Z(E(R))$. Поэтому $\varphi(c)$ коммутирует со всеми матрицами вида $t_{ij}(1)$, и $\varphi(c) = rE_\infty$ для некоторого $r \in R$. Но у любой матрицы из $\mathrm{GL}(R)$ все диагональные элементы, начиная с некоторого места, равны 1. Поэтому $r = 1$, $\varphi(c) = E_\infty$, откуда $c \in K_2(R)$.

Обратно, пусть $d \in K_2(R)$ и $m$ — достаточно большое целое число такое, что $d$ раскладывается в произведение образующих вида $x_{ij}(r)$, для которых $i, j < m$. Обозначим через $U_m(R)$ подгруппу в $\mathrm{St}(R)$, порожденную элементами вида $x_{im}(r)$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, $r \in R$ (на $U_m$ удобно смотреть как на унипотентный радикал параболической подгруппы $P_m$ в $\mathrm{St}(R)$). Из соотношений (ST1) и (ST2) следует, что $U_m$ — абелева группа и что $x_{im}(r)^{-1} = x_{im}(-r)$. Каждый элемент группы $U_m(r)$ можно записать в виде

$$x_{1m}(r_1)x_{2m}(r_2)\dots x_{m-1,m}(r_{m-1}).$$

Применяя к такому элементу гомоморфизм $\varphi$, получаем

$$t_{1m}(r_1)t_{2m}(r_2)\dots t_{m-1,m}(r_{m-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_{m-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in E_m(R),$$

и поэтому $\varphi$ инъективен на $U_m$. Выберем индексы $i, j, k \in \{1, \dots, m-1\}$ так, что $i \neq j$, и элементы $r, s \in R$. Рассмотрим

$$x_{ij}(r)x_{km}(s)x_{ij}(r)^{-1} = [x_{ij}(r), x_{km}(s)]x_{km}(s),$$

что равно $x_{km}(s)$ или $x_{im}(rs)x_{km}(s)$. В любом случае, этот элемент лежит в $U_m$. Поэтому $x_{ij}(r)U_m x_{ij}(r)^{-1} \subseteq U_m$. Элемент $d$ раскладывается в произведение таких $x_{ij}(r)$, поэтому

$dU_m d^{-1} \subseteq U_m$. Если $p \in U_m$, то $dpd^{-1} \in U_m$, и поэтому $\varphi(dpd^{-1}) = \varphi(d)\varphi(p)\varphi(d)^{-1} = \varphi(p)$. Из инъективности $\varphi$ на $U_m$ теперь следует, что $dpd^{-1} = p$. Поэтому $d$ коммутирует с каждым элементом группы $U_m$.

Аналогично показывается, что $d$ коммутирует с каждым элементом подгруппы $U_m^- \leqslant \mathrm{St}(R)$, порожденной элементами вида $x_{mi}(r)$ с $1 \leqslant i \leqslant m-1$, $r \in R$. Поэтому если $1 \leqslant i, j \leqslant m-1$, $i \neq j$, $r \in R$, то $d$ коммутирует с $x_{ij}(r) = [x_{im}(r), x_{mj}(1)]$. Теперь можно увеличить $m$ и показать, что $d$ коммутирует с каждой образующей группы $\mathrm{St}(R)$, а поэтому и с каждым элементом $\mathrm{St}(R)$. □

Напомним, что **центральным расширением** группы $H$ называется сюръективный гомоморфизм групп $\theta\colon G \to H$, ядро которого содержится в центре группы $G$. Категория центральных расширений группы $H$ определяется естественным образом. Начальный объект этой категории называется **универсальным центральным расширением** группы $H$.

Теорема. Для любого кольца $R$ отображение $\varphi\colon \mathrm{St}(R) \to E(R)$ является универсальным центральным расширением.

Вообще, универсальное центральное расширение группы $H$ существует тогда и только тогда, когда $H$ совершенна; его ядро называется **мультипликатором Шура**. Таким образом, $K_2(R)$ является мультипликатором Шура совершенной группы $E(R)$. Вместе с тем, известно, что мультипликатор Шура совершенной группы $H$ естественно изоморфен $H_2(H, \mathbb{Z})$: центральные расширения группы $H$ при помощи $A$ классифицируются множеством

$$\mathrm{Ext}(H, A) \cong H^2(H, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(H, \mathbb{Z}), A).$$

Если $i \neq j$ и $a, b \in R^*$, определим элементы $w_{ij}(a) = x_{ij}(a)x_{ji}(-a^{-1})x_{ij}(a)$ и $h_{ij}(a) = w_{ij}(a)w_{ij}(-1)$ в $\mathrm{St}_2(R)$. Нетрудно проверить, что $h_{ij}(a) = h_{kj}(a)h_{ji}(a)^{-1} = h_{ji}(a)^{-1}$. **Символом Стейнберга** над кольцом $R$ называется элемент $\{a, b\} = h_{12}(ab)h_{12}(a)^{-1}h_{12}(b)^{-1} \in K_2(R)$, где $a, b \in R^*$ — коммутирующие обратимые элементы. Можно показать, что $\{a, b\} = h_{ij}(ab)h_{ij}(a)^{-1}h_{ij}(b)^{-1} = [h_{ik}(a), h_{ij}(b)]$ для любых $i \neq j$.

Теорема. Если $R = F$ — поле, то $K_2(F)$ порождается символами Стейнберга.

Теорема. Пусть $a, b, c \in R^*$ — коммутирующие обратимые элементы. Тогда в $K_2(R)$ выполнены следующие соотношения:

1. $\{a, b\}^{-1} = \{b, a\}$;
2. $\{ab, c\} = \{a, c\}\{b, c\}$;
3. $\{a, bc\} = \{a, b\}\{a, c\}$;
4. $\{a, b\} = 1$, если $a + b = 1$.

*3.3.3. Относительные $K$-функторы.* Пусть $R$ — коммутативное кольцо, $I \trianglelefteq R$ — идеал в $R$. Обозначим через $D$ расслоенное произведение кольца $R$ на себя над $R/I$: имеется декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[d] \\ R \arrow[r] & R/I \end{tikzcd}$$

Применим к этому квадрату функтор $F = K_0, K_1, K_2$ и рассмотрим ядра горизонтальных стрелок. Они обозначаются через $F^S(R, I)$ и $F'(R, I)$:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & F^S(R,I) \arrow[r] \arrow[d] & F(D) \arrow[r] \arrow[d] & F(R) \arrow[d] \\ 1 \arrow[r] & F'(R,I) \arrow[r] & F(R) \arrow[r] & F(R/I) \end{tikzcd}$$

В частности, получаем группы $K_0^S(R, I)$, $K_1^S(R, I)$, $K_2^S(R, I)$, которые называются **относительными K-группами**. В частности, $K_0(R, I)$ не зависит от $R$ (и совпадает с $K_0(I)$, где $I$ рассматривается как кольцо без единицы).

Теорема. Имеется не очень длинная точная последовательность групп

$$\begin{aligned} & K_2^S(R,I) \longrightarrow K_2(R) \longrightarrow K_2(R/I) \longrightarrow \\ \longrightarrow\ & K_1^S(R,I) \longrightarrow K_1(R) \longrightarrow K_1(R/I) \longrightarrow \\ \longrightarrow\ & K_0^S(R,I) \longrightarrow K_0(R) \longrightarrow K_0(R/I) \longrightarrow 1 \end{aligned}$$

Наличие этой последовательности наводит на желании продолжить ее вверх, определив группы (абсолютные и относительные) $K_n$ для всех $n \geqslant 0$. Впрочем, $K_2^S(R, I)$ не подходит для продолжения этой последовательности: его стоит заменить на $K_2(R, I)$; в то же время, $K_1^S(R, I) = K_1(R, I)$ и $K_0^S(R, I) = K_0(R, I)$.

Различные определения **высшей K-теории** $K_n$ были даны Ричардом Суоном, Даниэлем Квилленом, Джоном Вагонером, Володиным, Максом Каруби совместно с Орландо Вилламайором, ... Все эти определения совпадают друг с другом для $n = 0, 1, 2$ (и с определенными нами функторами); все, кроме K-теории Каруби–Вилламайора, совпадают и для $n \geqslant 3$. K-теория Каруби–Вилламайора совпадает с остальными для регулярного кольца.

С другой стороны, Джон Милнор, исходя из теории квадратичных форм, построил другой набор групп, который традиционно называется «K-теорией Милнора»; более правильно называть их **группами циклов** Милнора.

## 3.4 K-теория Милнора

*3.4.1. Квадратичные формы.* Пусть теперь $F$ — поле характеристики, отличной от 2. Напомним, что если $V$ — векторное пространство над $F$ и $b\colon V \to V \to F$ — билинейная симметричная форма, то отображение $q\colon V \to F$, $v \mapsto b(v, v)$ называется **квадратичной формой, ассоциированной с билинейной формой** $b$. Заметим, что $q(u + v) = b(u + v, u + v) = b(u, u) + 2b(u, v) + b(v, v) = q(u) + q(v) + 2b(u, v)$, поэтому выполняется **теорема косинусов**: $b(u, v) = (q(u+v) - q(u) - q(v))/2$. Отображение $q\colon V \to F$ называется **квадратичной формой**, если отображение $b_q\colon (u, v) \mapsto q(u + v) - q(u) - q(v)$ является билинейной симметричной формой; таким образом, понятия квадратичной формы и билинейной симметричной формы эквивалентны.

Пусть $\dim(V) = n$ и $a_1, \dots, a_n \in F$. Если $B$ — некоторый базис пространства $V$ и $(v_1, \dots, v_n)$ — координаты вектора $v \in V$ в этом базисе, то отображение $v \mapsto a_1v_1^2 + \dots + a_nv_n^2$ является квадратичной формой на $V$. Мы будем обозначать эту форму через $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$. Матрица Грама этой формы в базисе $B$ диагональна. Хорошо известно, что каждую квадратичную форму можно диагонализовать: в некотором базисе она имеет вид $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$.

Если $(V, q)$ — пространство с квадратичной формой, $U \leqslant V$ — подпространство, то $U^{\perp} = \{v \in V \mid b_q(u, v) = 0$ для всех $u \in U\}$. Форма $q$ называется **невырожденной**, если $V^{\perp} = 0$.

Теорема Витта о сокращении говорит, что если

$$\langle a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l\rangle \cong \langle a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_l\rangle,$$

то $\langle b_1, \dots, b_l\rangle \cong \langle c_1, \dots, c_l\rangle$. Поэтому моноид [классов изометрий] невырожденных квадратичных форм (относительно прямой суммы) является моноидом с сокращением. Группа Гротендика этого моноида обозначается через $GW(F)$; на этой абелевой группе вводится умножение посредством тензорного произведения $\otimes$: $\langle a_1, \dots, a_n\rangle \cdot \langle b_1, \dots, b_k\rangle = \sum_{i,j}\langle a_i b_j\rangle$. Полученное кольцо $GW(F)$ называется **кольцом Гротендика–Витта** поля $F$. Заметим, что в $GW(F)$ выполнены соотношения $\langle ab^2\rangle = \langle a\rangle$ и $\langle a, b\rangle = \langle a + b, (a + b)ab\rangle$.

Рассмотрим идеал $\langle \mathbb{H}\rangle \trianglelefteq GW(F)$, порожденный классом **гиперболической плоскости** $\mathbb{H} = \langle 1, -1\rangle$. Нетрудно видеть, что $\mathbb{H} = \langle a, -a\rangle$, поэтому идеал $\langle \mathbb{H}\rangle$ изоморфен (как абелева группа) $\mathbb{Z}$. Фактор-кольцо $W(F) = GW(F)/\langle \mathbb{H}\rangle$ называется **кольцом Витта** поля $F$. Заметим, что если $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$ — квадратичная форма, то $\langle -a_1, \dots, -a_n\rangle$ в сумме с ней дает элемент идеала $\langle \mathbb{H}\rangle$, поэтому элементы $W(F)$ представляются классами *настоящих* квадратичных форм, а не их формальных разностей.

Размерность задает гомоморфизм $GW(F) \to \mathbb{Z}$. Обозначим его ядро через $GI(F)$, а образ $GI(F)$ при композиции $GI(F) \hookrightarrow\to GW(F) \to W(F)$ через $I(F)$. Нетрудно проверить, что $I(F)$ состоит в точности из классов эквивалентности четномерных форм. Кроме того, идеал $I$ аддитивно порождается формами $\langle 1, a\rangle$, и потому $I^n$ аддитивно порождается произведениями вида $\langle 1, a_1\rangle \cdot \langle 1, a_2\rangle \cdot \dots \cdot \langle 1, a_n\rangle$.

На кольце Витта размерность индуцирует изоморфизм $W/I \to \mathbb{Z}/2$. Аналогично, определитель является гомоморфизмом групп $GW(F) \to F^*/(F^*)^2$, но он не продолжается до гомоморфизма групп $W(F) \to F^*/(F^*)^2$. Определим **дискриминант** формы $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$: положим $\operatorname{disc}(\langle a_1, \dots, a_n\rangle) = (-1)^{n(n-1)/2}(a_1 \dots a_n)$. Получим отображение $W(F) \to F^*/(F^*)^2$; оно не обязаны быть гомоморфизмом групп, но если мы ограничим его на $I(F)$, то получится гомоморфизм $I(F) \to F^*/(F^*)^2$. Определитель элемента вида $\langle 1, a\rangle \cdot \langle 1, b\rangle$ является квадратом, поэтому мы получаем сюръективный гомоморфизм групп $I/I^2 \to F^*/(F^*)^2$. Оказывается, это изоморфизм.

Итак, мы получили отображение $e_0 \colon W(F) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = H^0(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, которое превращается в изоморфизм $W/I \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, и отображение $e_1 \colon I(F) \to F^*/(F^*)^2 = H^2(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, которое превращается в изоморфизм $I/I^2 \to F^*/(F^*)^2$. При желании нетрудно построить **инвариант Клиффорда** $e_2 \colon I^2 \to H^2(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, проверить, что он является гомоморфизмом, и что $I^3$ лежит в его ядре. Отображение $I^2/I^3 \to H^2(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ является изоморфизмом: это доказал в начале 1980-х годов Александр Меркурьев.

На это можно посмотреть следующим образом: идеал $I$ состоит из всех элементов $W(F)$, для которых $e_0 = 0$; $I^2$ состоит из всех элементов, для которых $e_0 = 0$ и $e_1 = 1$; и по теореме Меркурьева $I^3$ состоит в точности из элементов, для которых инварианты $e_0$, $e_1$, $e_2$ тривиальны.

*3.4.2. Определение $K$-теории Милнора.* Рассмотрим градуированное кольцо $\operatorname{Gr}_I W(F)$, построенное по степеням идеала $I$:

$$\operatorname{Gr}_I W(F) = \bigoplus_{n \geqslant 0} I^n/I^{n+1}.$$

Мы пытаемся сравнить это кольцо с кольцом когомологий $H^*(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; выше описаны изоморфизмы между ними в размерностях $0, 1, 2$. Милнор построил кольцо, которое отображается и в $\operatorname{Gr}_I W(F)$, и в $H^*(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Пусть $R$ — коммутативное кольцо. Напомним, что тензорная алгебра абелевой группы $R^*$ определяется как $T(R^*) = \bigoplus_{n\geqslant 0} T^n(R^*)$, где $T^0(R^*) = \mathbb{Z}$, $T^1(R^*) = R^*$, и вообще $T^n(R^*) = \underbrace{R^* \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} R^*}_{n}$. Обозначим через $[r]$ класс элемента $r \in R^*$ в $T^1(R^*)$. Пусть $J \trianglelefteq T(R^*)$ — идеал, порожденный элементами вида $[r]\otimes[s]$ для $r, s \in R^*$ таких, что $r+s = 1$ в $R$. Фактор-кольцо $K^M_*(R) = T(R^*)/J$ называется **кольцом Милнора** кольца $R$. Это градуированное кольцо $K^M_*(R) = \bigoplus_{n\geqslant 0} K^M_n(R)$, где $K^M_n(R) = T^n(R^*)/(J \cap T^n(R^*))$ — **$n$-ая группа Милнора** кольца $R$.

*3.4.3. Гипотезы Милнора.* Милнор определил два гомоморфизма колец: $\eta\colon K^M_*(F)/2 \to H^*(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $\nu\colon K^M_*(F)/2 \to \operatorname{Gr}_I W(F)$. Для определения $\nu$ заметим, что мы же установили изоморфизм $F^*/(F^*)^2 \to I/I^2$, $\{a\} \mapsto \langle a, -1\rangle = \langle a\rangle - \langle 1\rangle$. Эта формула описывает действие $\nu$ на элементах степени 1. Поскольку эти элементы порождают кольцо $K^M_*(F)$, для построения $\nu$ достаточно проверить, что соотношения, определяющие $K^M_*(F)$, выполняются в $\operatorname{Gr}_I W(F)$.

Действительно, $\nu(\{a, 1-a\}) = (\langle a\rangle - \langle 1\rangle)\cdot(\langle 1-a\rangle - \langle 1\rangle) = \langle a(1-a), 1\rangle - \langle a, 1-a\rangle$, что напрямую следует из соотношения $\langle a, b\rangle = \langle a+b, ab(a+b)\rangle$ в кольце Витта. Кроме того, $2\{a\} = \{a^2\} \mapsto \langle a^2\rangle - \langle 1\rangle = 0$. Аналогично определяется и $\eta$: мы уже знаем, что $H^1(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong F^*/(F^*)^2$, поэтому знаем, куда должен перейти образующие элементы $\{a\} \in K^M_1(F)$. Остается проверить, что $a \cup (1-a) = 0$ в $H^2(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Милнор заметил, что во всех известных ему случаях отображения $\eta$ и $\nu$ являются изоморфизмами. Утверждение о том, что $\eta$ является изоморфизмом, сейчас называется **гипотезой Милнора**. Она была доказана Владимиром Воеводским в 1996 году. Утверждение о том, что $\nu$ является изоморфизмом, называется **гипотезой Милнора о квадратичных формах**. В случае характеристики 0 эту гипотезу доказали в 1996 году Дмитрий Орлов, Александр Вишик и Владимир Воеводский. Их доказательство ссылалось на работы Воеводского (и на доказательство гипотезы Милнора!), которые позже были обобщены на случай произвольной характеристики, так что теперь оно работает и в случае характеристики $p > 0$. Набросок независимого доказательства (также в случае характеристики 0) был дан Фабианом Морелем.

Отображение $\eta$ называется **символом норменного вычета**; можно определить отображение $\eta\colon K^M_i(F)/l \to H^i(F;\mu_l^{\otimes i})$. **Гипотеза Блоха–Като** состоит в том, что это изоморфизм для всех простых $l$, отличных от характеристики поля $F$. Доказательство этой гипотезы было опубликовано Воеводским в 2003 году.

*3.4.4. Примеры вычисления.*

- Пусть $F$ — алгебраически замкнутое поле. Тогда $F = F^2$, поэтому каждая невырожденная форма изоморфна ровно одной форме вида $\langle 1, 1, \dots, 1\rangle$. Поэтому $GW(F) \cong \mathbb{Z}$, и $W(F) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, причем $I(F) = 0$. Поэтому $\operatorname{Gr}_I W(F) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Абсолютная группа Галуа поля $F$ тривиальна, потому $H^*(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Наконец, все образующие $K^M_*(F)$ обращаются в нуль в $K^M_1(F)/2$.

- Пусть $F = \mathbb{R}$. Хорошо известно, что квадратичные формы классифицируются рангом и сигнатурой. Поэтому $GW(\mathbb{R})$ — свободная абелева группа на двух образующих $\langle 1\rangle$ и $\langle -1\rangle$. Кроме того, $\langle -1\rangle^2 = \langle 1\rangle$. Поэтому $GW(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2-1)$ и $W(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}$, причем $I(\mathbb{R}) = 2\mathbb{Z}$. Значит, $\operatorname{Gr}_I W(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[a]$. Абсолютная группа Галуа поля $\mathbb{R}$ равна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, поэтому $H^*(\mathbb{R}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^*(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[a]$. Наконец, $K_1^M(\mathbb{R})/2 = \mathbb{R}^*/(\mathbb{R}^*)^2 \cong \{1, -1\}$. Аналогичное рассуждение показывает, что $K_i^M(\mathbb{R})/2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ для всех $i$, и единственный ненулевой элемент равен $\{-1, -1, dots, -1\}$. Поэтому $K_*^M(\mathbb{R})/2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[a]$.

- Пусть $F = \mathbb{F}_q$, где $q$ нечетно. В этом случае $F^* \cong \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$, и потому $K_1^M/2 = F^*/(F^*)^2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Если $g$ — образующая этой группы, то $\{g, g, \dots, g\}$ порождает группу $K_n^M/2$, но может обращаться в 0. Можно показать, что $\{g, g\} = 0 \in K_2^M$, и поэтому $K_*^M = 0$ для $* \geqslant 2$. Значит, $K_*^M(F)/2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ сосредоточено в степенях 0 и 1. Абсолютная группа Галуа конечного поля равна $\widehat{\mathbb{Z}}$ — проконечное пополнение $\mathbb{Z}$. Когомологии Галуа $H^*(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ совпадают с когомологиями $B\mathbb{Z} \cong S^1$ (с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, поэтому они равны $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Наконец, заметим, что группа Гротендика–Витта порождается элементами $\langle 1 \rangle$ и $\langle g \rangle$. Хорошо известно, что любой элемент в $\mathbb{F}_q^*$ является суммой двух квадратов. Запишем $g = a^2 + b^2$. Тогда

$$\langle 1, 1 \rangle = \langle a^2, b^2 \rangle = \langle a^2 + b^2, a^2 b^2 (a^2 + b^2) \rangle = \langle a^2 + b^2, a^2 + b^2 \rangle = \langle g, g \rangle.$$

  Это означает, что $2(\langle 1 \rangle - \langle g \rangle) = 0$. Поэтому $GW(F) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, с образующими $\langle 1 \rangle$ и $\langle 1 \rangle - \langle g \rangle$ соответственно. Вычисление группы Витта зависит от того, является ли $-1$ квадратом в $F$. Поскольку в $F^* = \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ элемент $-1$ имеет порядок 2, то $-1$ является квадратом тогда и только тогда, когда $q-1$ делится на 4. Поэтому если $q \equiv 1 \pmod 4$, то $\langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$ и $W(F) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. В этом случае $I(F) = (\langle 1 \rangle - \langle g \rangle) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Если же $q \equiv 3 \pmod 4$, то $\langle g \rangle = \langle -1 \rangle$, и потому $W(F) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, причем $I(F) = (2)$. В любом случае $\mathrm{Gr}_I W(F) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Гипотеза Милнора о квадратичных формах говорит, что $\mathrm{Gr}_I W(F)$ зависит только от абсолютной группы Галуа поля $F$; последний пример показывает, что этого нельзя сказать про $W(F)$.

# 4 Высшая K-теория

## 4.1 Немного топологии

*4.1.1. План действий.* Мы определим высшие алгебраические K-группы кольца $R$ как гомотопические группы некоторого топологического пространства $K(R)$: $K_n(R) = \pi_n K(R)$. Пространство $K(R)$, конечно, будет выбрано таким образом, чтобы в случаях $n = 0, 1, 2$ группы $\pi_n K(R)$ совпадали с группами $K_n(R)$, определенными выше. Напомним, что мы определили $K_0$ категории в двух ситуациях:

- категория с операцией $\oplus$ (симметрическая моноидальная категория);
- категория с точными последовательностями (точная категория).

В этих ситуациях мы определим и высшую K-теорию, построив по категории $\mathcal{C}$ топологическое пространство $K\mathcal{C}$ и положив $K_n\mathcal{C} = \pi_n K\mathcal{C}$. В случае $n = 0$ построенная группа $\pi_0 K\mathcal{C}$ будет совпадать с определенной выше группой $K_0\mathcal{C}$. Группу $K_0(R)$ кольца $R$ можно определить как группу $K_0$ категории $K_0\mathcal{P}(R)$, причем $\mathcal{P}(R)$ можно рассматривать как симметрическую моноидальную категорию или как точную категорию. Мы покажем, что наши конструкции дадут гомотопически эквивалентные пространства $K\mathcal{P}(R)$ и, следовательно, одинаковые гомотопические группы. В результате группы $K_n(R) = \pi_n K\mathcal{P}(R)$ не зависят от конструкции.

Напомним, что мы определили бесконечную полную линейную группу

$$\mathrm{GL}(R) = \varinjlim \mathrm{GL}_n(R);$$

ее коммутант $E(R)$ является совершенной подгруппой. Фактор-группа $\mathrm{GL}(R)/E(R)$ по определению равна $K_1(R)$.

Наша ближайшая цель — построить [естественным образом] по группе $G$ связное топологическое пространство $BG$, фундаментальная группа которого равна $G$, а высшие гомотопические группы тривиальны. Более того, гомологии топологического пространства $BG$ (с коэффициентами в $G$-модуле $M$) совпадут с гомологиями группы $G$ (с коэффициентами в $M$).

*4.1.2. Симплициальные множества.* Обозначим через $\Delta$ следующую категорию:

- Объекты: для каждого натурального числа $n$ обозначим через $\underline{n}$ упорядоченное множество $\{0 < 1 < \cdots < n\}$.
- Морфизмы: неубывающие отображения, то есть, отображения $f\colon \underline{m} \to \underline{n}$ такие, что $f(i) \leqslant f(j)$ для $i < j$.

Для $n > 0$ и $i = 0, \ldots, n$ имеются инъективные морфизмы $\partial_i^n\colon \underline{n-1} \to \underline{n}$:

$$\partial_i^n(j) = \begin{cases} j, & \text{если } j < i, \\ j+1, & \text{если } j \geqslant i. \end{cases}$$

Они называются **отображениями граней**. Кроме того, для $n > 0$ и $i = 0, \ldots, n-1$ есть сюръективные морфизмы $s_i^{n-1}\colon \underline{n} \to \underline{n-1}$:

$$s_i^{n-1}(j) = \begin{cases} j, & \text{если } j \leqslant i, \\ j-1, & \text{если } j > i. \end{cases}$$

Они называются **отображениями вырождений**. Эти отображения удовлетворяют некоторым очевидным тождествам, и любой морфизм в $\Delta$ можно записать как композицию отображений граней и вырождений. **Симплициальным объектом** в категории $\mathcal{C}$ называется контравариантный функтор из категории $\Delta$ в $\mathcal{C}$, то есть, функтор $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ (иными словами, это предпучок на категории $\Delta$ со значениями в $\mathcal{C}$). Морфизмом симплициальных объектов (в одной категории) называется естественное преобразование функторов.

Например, **симплициальное множество** — это предпучок множеств на $\Delta$, то есть, функтор $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Sets}$; **симплициальное пространство** — это функтор $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Top}$.

Пусть $F\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Sets}$ — симплициальное множество. Тогда для каждого натурального $n$ задано множество $F(\underline{n})$, называемое **множеством $n$-симплексов** $F$. Образами отображений $\partial_i^n$ являются отображения множеств $F(\underline{n}) \to F(\underline{n-1})$, также называемые **отображениями граней**. Они сопоставляют каждому $n$-симплексу $x$ из $F(\underline{n})$ набор $(n-1)$-симплексов (в количестве $n+1$ штук), называемых **гранями** симплекса $x$. Мы будем называть множество $F(\partial_i^n)(x)$ $i$-ой гранью симплекса $x$. Аналогично, отображения $s_i^{n-1}$ превращаются в отображения $F(\underline{n-1}) \to F(\underline{n})$, сопоставляющие каждому $(n-1)$-симплексу набор из $n$ «вырожденных» $n$-симплексов. Эти отображения $F(\underline{n-1}) \to F(\underline{n})$ называются **отображениями вырождения**.

*4.1.3. Примеры симплициальных множеств.* Пусть $X$ — топологическое пространство. Обозначим через $S(X)$ тотальный сингулярный комплекс пространства $X$: в нем $S_n(X)$ —- множество сингулярных $n$-симплексов, то есть, множество всех непрерывных отображений $\Delta_n \to X$, где $\Delta_n$ — стандартный топологический $n$-симплекс:

$$\Delta_n^{top} = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geqslant 0, \ \sum t_i = 1\}.$$

Превратим $S(X) = \{S_n(X)\}_{n \geqslant 0}$ в симплициальное множество. Для этого мы сопоставим морфизму $f\colon \underline{m} \to \underline{n}$ в $\Delta$ морфизм $S_n(X) \to S_m(X)$ следующим образом: сначала опишем непрерывное отображение $\widetilde{f}\colon \Delta_m \to \Delta_n$ и получим функтор $\Delta \to \mathfrak{Top}$, который $\underline{m}$ переводит в $\Delta_m$, $f$ переводит в $\widetilde{f}$. Поскольку $S_n(X) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}}(\Delta_n, X)$, мы получим функтор $\Delta^{op} \to \mathfrak{Top}$.

Итак, для неубывающего отображения $f\colon \underline{m} \to \underline{n}$ и $\Delta_m = \{(s_0, \ldots, s_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid s_j \geqslant 0, \ \sum s_j = 1\}$ положим $\widetilde{f}\colon \Delta_m \to \Delta_n$, $(s_0, \ldots, s_m) \mapsto (t_0, \ldots, t_n)$, где $t_i = \sum_{f(j)=i} s_j$.

В качестве конкретного примера рассмотрим симплициальное множество $S^n$. Положим

$$(S^n)_m = \begin{cases} \{e_m\}, & 0 \leqslant m \leqslant n-1, \\ \{e_n, f_n\}, & m = n, \\ \{e_m\} \cup \{\text{вырожденные симплексы, приходящие из } f_n\}, & m \geqslant n+1. \end{cases}$$

Геометрически нужно представлять себе $S^n$ как $n$-мерную сферу, полученную приклеиванием к точке $n$-мерного диска. При этом $e_m$ соответствует симплексам, сосредоточенным в точке (они вырождены при $m \geqslant 1$), а $f_n$ соответствует приклеенному диску. Каждая грань $e_m$ равна $e_{m-1}$; каждое вырождение $e_m$ равно $e_{m+1}$; каждая грань $f_n$ равна $e_{n-1}$. Убедитесь, что можно уточнить определение $S^n$ так, что получится симплициальное множество.

*4.1.4. Геометрическая реализация.* Теперь мы построим по всякому симплициальному множеству $F$ топологическое пространство $|F|$, называемое его **геометрической реализацией**. Определим

$$|X| = \left( \coprod_{n \geqslant 0} F(\underline{n}) \times \Delta_n^{top} \right) \Big/ \sim,$$

где $\sim$ — отношение эквивалентности, натянутое на $(x, \widetilde{f}(y)) \sim (F(f)(x), y)$ для всех $x \in F(\underline{n})$, $y \in \Delta_m^{top}$, $f\colon \underline{m} \to \underline{n}$. Полученное фактор-множества наделяется стандартной топологией, индуцированной с копроизведения (в котором $F(\underline{n})$ рассматривается как дискретное множество).

Например, геометрическая реализация описанной выше симплициальной сферы $S^n$ гомеоморфна обычной топологической сфере $S^n$. Вообще, геометрическая реализация любого симплициального множества $F$ гомеоморфна CW-комплексу, $n$-клетки которого соответствуют невырожденным симплексам из $F(\underline{n})$ (то есть, симплексам, не лежащим в объединении образов $s_i^{n-1}$).

Конструкция геометрической реализации функториальна: нетрудно понять, что морфизм симплициальных множеств $F \to G$ индуцирует непрерывное отображение топологических пространств $|F| \to |G|$.

Если $F, G$ — два симплициальных множества, обозначим через $F \times G$ симплициальное множество, $n$-симплексы которого образуют множество $F(\underline{n}) \times G(\underline{n})$, с очевидными отображениями.

Теорема Милнора. Отображение $|F \times G| \to |F| \times |G|$, индуцированное морфизмами симплициальных множеств $F \times G \to F$, $F \times G \to G$, является непрерывной биекцией. Более того, если снабдить $|F| \times |G|$ компактно порожденной топологией, ассоциированной с топологией произведения (то есть, если рассматривать произведение $|F|$ и $|G|$ в категории компактно порожденных пространств), то это отображение является гомеоморфизмом.

В частности, если $|F|$ или $|G|$ локально компактно, то $|F \times G|$ гомеоморфно $|F| \times |G|$ (со стандартной топологией произведения). Обозначим через $\Delta(n) = \mathrm{Hom}_\Delta(-, \underline{n})$ предпучок, представленный объектом $\underline{n}$ категории $\Delta$. Нетрудно видеть, что $|\Delta(n)| = \Delta_n$. Упражнение. докажите теорему Милнора для частного случая $F = \Delta(n)$, $G = \Delta(m)$ и выведите общий случай из этого.

Приведем метод вычисления гомологий пространства $|F|$. Обозначим через $C_n(F)$ свободную абелеву группу с базисом $F(\underline{n})$; пусть $\widetilde{\partial}_i^n \colon C_n(F) \to C_{n-1}(F)$ — гомоморфизмы, естественно индуцированные отображениями $F(\partial_i^n)$. Положим $d_n = \sum (-1)^i \widetilde{\partial}_i^n$. Тогда $C_\bullet(F)$ является цепным комплексом, и для любой абелевой группы $A$ выполнено

$$H_*(|F|, A) \cong H_*(C(F) \otimes_{\mathbb{Z}} A), \quad H^*(|F|, A) \cong H^*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C(F), A)).$$

*4.1.5. Классифицирующее пространство категории.* Пусть $\mathcal{C}$ — малая категория (то есть, категория, объекты которой образуют множество. Часто рассматриваемые нами категории не являются малыми, но их нетрудно заменить на эквивалентные малые категории). Сейчас мы построим по $\mathcal{C}$ симплициальное множество, называемое **нервом** категории $\mathcal{C}$: $n$-симплексом $N\mathcal{C}$ назовем диаграмму вида

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n,$$

где $A_i$ — объекты категории $\mathcal{C}$, $f_i$ — морфизмы в $\mathcal{C}$. Морфизм $i$-ой грани переводит этот симплекс в $(n-1)$-симплекс

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \to \cdots \to A_{i-1} \xrightarrow{f_{i+1} \circ f_i} A_{i+1} \to \cdots \to A_n,$$

а морфизм $i$-го вырождения — в $(n+1)$-симплекс

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \to \cdots \to A_i \xrightarrow{\mathrm{id}} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1} \to \cdots \to A_n.$$

Геометрическая реализация симплициального множества $N\mathcal{C}$ называется **классифицирующим пространством** категории $\mathcal{C}$: $B\mathcal{C} = |N\mathcal{C}|$. Эта конструкция, очевидно, функториальна: функтор $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ между малыми категориями индуцирует морфизм симплициальных множеств $N\mathcal{C} \to N\mathcal{D}$, который индуцирует непрерывное отображение $BF \colon B\mathcal{C} \to B\mathcal{D}$.

Простой пример: категория $\{0 < 1\}$, состоящая из двух объектов $0, 1$ и единственного нетождественного морфизма $0 \to 1$. Несложно видеть, что $B\{0 < 1\} = I$, единичный отрезок.

Лемма. Пусть $F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ — функторы между малыми категориями, и пусть существует естественное преобразование $F \to G$. Тогда непрерывные отображения $BF, BG \colon B\mathcal{C} \to B\mathcal{D}$ гомотопны.

Следствие. Пусть $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ — функтор между малыми категориями, у которого имеется левый или правый сопряженный. Тогда $BF$ — гомотопическая эквивалентность. В частности, если в малой категории $\mathcal{C}$ имеется начальный или конечный объект, то пространство $B\mathcal{C}$ стягиваемо.

*4.1.6. Классифицирующее пространство группы.* Пусть $G$ — дискретная группа. Обозначим через $\underline{G}$ группу $G$, рассматриваемую как категорию с одним объектом $\star$ и множеством морфизмов $\mathrm{Hom}_{\underline{G}}(\star, \star) = G$. Мы утверждаем, что классифицирующее пространство категории $\underline{G}$ является классифицирующим пространством группы $G$ (в смысле алгебраической топологии). Обозначим через $\widetilde{G}$ категорию, объекты которой соответствуют объектам группы $G$ ($\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{[g]\}_{g \in G}$, и для каждой пары $g, h \in G$ множество морфизмов $\mathrm{Hom}_{\widetilde{G}}([g], [h])$ состоит из единственного элемента $\delta(g, h)$. Композиция морфизмов определяется единственным возможным способом. Имеется функтор $\widetilde{G} \to \underline{G}$, переводящий все объекты $[g]$ в объект $\star$, а морфизм $\delta(g, h)$ в морфизм $hg^{-1} \in G = \mathrm{Hom}_{\underline{G}}(\star, \star)$. Кроме того, группа $G$ действует на категории $\widetilde{G}$: $g \cdot [h] = [hg^{-1}]$ с очевидным действием на морфизмах. Нетрудно понять, что это действие индуцирует свободное действие группы $G$ на классифицирующем пространстве $B\widetilde{G}$. Функтор $\widetilde{G} \to \underline{G}$ согласован с действием группы $G$, если снабдить $B\underline{G}$ тривиальным действием. Нетрудно понять, что $B\widetilde{G} \to B\underline{G}$ — локально тривиальное накрытие с дискретным слоем, изоморфным $G$, и группа $G$ транзитивно действует на этом слое. Поэтому $B\underline{G} \cong B\widetilde{G}/G$, и $B\widetilde{G} \to B\underline{G}$ — накрытие Галуа с группой $G$. Поскольку в $\widetilde{G}$ имеется начальный объект (любой объект $\widetilde{G}$ является начальным), пространство $B\widetilde{G}$ стягиваемо. Поэтому $G \cong \pi_1(B\underline{G})$ и $\pi_i(B\underline{G}) = 0$ для $i \neq 0$. Нетрудно видеть, что $B\widetilde{G} \to B\underline{G}$ является главным $G$-расслоением со стягиваемым тотальным пространством, так что $B\underline{G}$ — классифицирующее пространство группы $G$ в обычном смысле (с точностью до гомотопической эквивалентности).

## 4.2 +-конструкция Квиллена

*4.2.1.* $BGL(R)^+$. Мы будем обозначать через $BGL(R)^+$ любой CW-комплекс вместе с непрерывным отображением $BGL(R) \to BGL(R)^+$, для которого

1. $\pi_1 BGL(R)^+ \cong K_1(R)$, и естественное отображение

$$GL(R) = \pi_1 BGL(R) \to \pi_1 BGL(R)^+ \cong K_1(R)$$

является сюръекцией с ядром $E(R)$.

2. $H_*(BGL(R); M) \xrightarrow{\cong} H_*(BGL(R)^+; M)$ для каждого $K_1(R)$-модуля $M$.

Такой CW-комплекс $X$ будет называться *моделью* для $BGL(R)^+$; любые две модели гомотопически эквивалентны. Таким образом, $BGL(R)^+$ однозначно определено как объект гомотопической категории.

Для $n \geqslant 1$ определим $K_n(R) = \pi_n BGL(R)^+$. По построению так определенная группа $K_1(R)$ совпадает с $GL(R)/E(R)$; ниже мы покажем, что $K_2(R)$ совпадает с группой $K_2(R)$, определенной ранее. При этом $\pi_0 BGL(R)^+$ тривиально; можно определить $K(R) = K_0(R) \times BGL(R)^+$ (здесь $K_0(R)$ рассматривается как пространство с дискретной топологией); тогда $\pi_0 K(R) = K_0(R)$ и $\pi_n K(R) = \pi_n BGL(R)^+ = K_n(R)$ при $n \geqslant 1$.

*4.2.2. Свойства +-конструкции.* На самом деле, +-конструкция Квиллена работает в более общем контексте. Интересующие нас свойства этой конструкции описаны в следующей теореме.

Теорема Квиллена. Пусть $(X, x)$ — линейно связное пространство, $N \trianglelefteq \pi_1(X, x)$ — совершенная нормальная подгруппа. Тогда существует непрерывное отображение пространств с отмеченной точкой $f\colon (X, x) \to (X^+, x^+)$ такое, что

1. последовательность
$$0 \to N \to \pi_1(X, x) \xrightarrow{f_*} \pi_1(X^+, x^+) \to 0$$
точна;

2. для любой локальной системы коэффициентов $L$ на $X^+$ отображение
$$f_*\colon H_n(X, f^*L) \to H_n(X^+, L)$$
является изоморфизмом для всех $n \geqslant 0$;

3. если $g\colon (X, x) \to (Y, y)$ — непрерывное отображение, для которого
$$N \subseteq \ker(g_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)),$$
то существует непрерывное отображение $h\colon (X^+, x^+) \to (Y, y)$, единственное с точностью до гомотопии, делающее диаграмму
$$\begin{tikzcd}
(X, x) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & (X^+, x^+) \arrow[dl, "h"] \\
& (Y, y) &
\end{tikzcd}$$
коммутативной.

*4.2.3. Совпадение с классической* $K$*-теорией.* Мы используем эту теорему в частном случае $X = B\,GL(R)$, $N = E(R)$. Обозначим через $F(R)$ гомотопический слой отображения $B\,GL(R) \to B\,GL(R)^+$ (заметим, что пространство $B\,GL(R)^+$ связно, поэтому $F(R)$ не зависит от выбора отмеченных точек в наших пространствах).

Предложение.

1. Пространство $F(R)$ ациклично: $\widetilde{H}_n(F(R), \mathbb{Z}) = 0$ для всех $n \geqslant 0$.
2. $\pi_1(F(R)) = St(R)$.
3. $\pi_q(F(R))$ действует тривиально на $\pi_i(F(R))$ при $i \geqslant 2$ (иными словами, пространство $F(R)$ простое в размерности $\geqslant 2$).

Набросок доказательства. Обозначим через $\widetilde{B\,GL}(R)^+$ универсальное накрытие пространства $B\,GL(R)^+$, и через $\widehat{B\,GL}(R)$ накрытие пространства $B\,GL(R)$, индуцированное при помощи морфизма $B\,GL(R) \to B\,GL(R)^+$. Такая замена не меняет гомотопического слоя, поэтому мы будем обозначать гомотопический слой отображения $\widehat{B\,GL}(R) \to \widetilde{B\,GL}(R)^+$ также через $F(R)$. Нетрудно понять, что $\widehat{B\,GL}(R)$ — это накрытие пространства $B\,GL(R)$, соответствующее подгруппе $E(R) \subseteq GL(R) = \pi_1(B\,GL(R))$. Поэтому $\widehat{B\,GL}(R) \cong K(E(R), 1)$.

1. Имеется спектральная последовательность
$$E^2_{p,q} = H_p(\widetilde{B\,GL}(R)^+, H_q(F(R), \mathbb{Z})) \Rightarrow H_{p+q}(\widehat{B\,GL}(R), \mathbb{Z}),$$
и граничные гомоморфизмы
$$H_n(\widehat{B\,GL}(R), \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow E^\infty_{n,0} \to E^2_{n,0} = H_n(\widetilde{B\,GL}(R)^+, \mathbb{Z})$$
являются изоморфизмами. Поэтому $E^2_{n,0} = E^\infty_{n,0}$ и $E^\infty_{p,q} = 0$ при $q \neq 0$. После этого несложно показать, что $F(R)$ ациклично.

2. Рассмотрим спектральную последовательность, построенную по универсальному накрытию $\widetilde{F}(R) \to F(R)$:

$$E^2_{p,q} = H_p(\pi_1(F(R)), H_q(\widetilde{F}(R), \mathbb{Z})) \Rightarrow H_{p+q}(F(R), \mathbb{Z}),$$

где, в силу уже доказанного, $\widetilde{H}_n(F(R), \mathbb{Z}) = 0$ для всех $n$. Из односвязности $\widetilde{F}(R)$ следует, что $H_1(\widetilde{F}(R), \mathbb{Z}) = 0$. Поэтому

$$E^2_{1,0} = E^\infty_{1,0} = 0, \quad E^2_{2,0} = E^\infty_{2,0} = 0,$$

и отображение $E^2_{3,0} \cong E^3_{3,0} \xrightarrow{d_3} E^3_{0,2} \cong E^2_{0,2}$ должно быть изоморфизмом: его ядро равно $E^\infty_{3,0} = 0$, а коядро равно $E^\infty_{0,2} = 0$. Поэтому

$$H_1(\pi_1 F(R), \mathbb{Z}) = H_2(\pi_1 F(R), \mathbb{Z}) = 0, \quad H_3(\pi_1 F(R), \mathbb{Z}) \cong H_0(\pi_1 F(R), H_2(\widetilde{F}(R)).$$

Рассмотрим точную последовательность гомотопических групп для расслоения

$$\widehat{B\,GL}(R) \to \widetilde{B\,GL}(R)^+$$

со слоем $F(R)$. Мы знаем, что $\pi_i(\widetilde{B\,GL}(R)^+) \cong \pi_i(B\,GL(R)^+)$ и $\pi_i(\widehat{B\,GL}(R)) = 0$ при $i \geqslant 2$. Поэтому $\pi_{i+1}(B\,GL(R)^+) \cong \pi_i(F(R))$ при $i \geqslant 2$, и есть точная последовательность

$$0 \to \pi_2(B\,GL(R)^+) \to \pi_1 F(R) \to E(R) \to 0.$$

Действие $\pi_1 F(R)$ на себе сопряжением оказывается тривиальным на $\ker(\pi_1 F(R) \to E(R))$, и $G$ тривиально действует на $\pi_i F(R)$ при $i \geqslant 2$. Это означает, что $F(R)$ просто в размерности $\geqslant 2$.

3. Указанная точная последовательность является центральным расширением группы $E(R)$, и $H_1(\pi_1 F(R), \mathbb{Z}) = H_2(\pi_1 F(R), \mathbb{Z}) = 0$. Значит, оно изоморфно универсальному центральному расширению

$$0 \to K_2(R) \to \mathrm{St}(R) \to E(R) \to 0.$$

В частности, $G \cong \mathrm{St}(R)$.

$\square$

Следствие. $\pi_i(B\,GL(R)^+) \cong K_i(R)$ при $i = 1, 2$, и $\pi_3(B\,GL(R)^+) \cong H_3(\mathrm{St}(R), \mathbb{Z})$. Доказательство. Равенства для $i = 1, 2$ следуют из предыдущего предложения. Осталось доказать формулу для $\pi_3(B\,GL(R)^+)$. Используя теорему Гуревича, получаем

$$\pi_3(B\,GL(R)^+) \cong \pi_2(F(R)) \cong \pi_2(\widetilde{F}(R)) \cong H_2(\widetilde{F}(R), \mathbb{Z}).$$

Кроме того, в силу простоты $F(R)$ в размерности 2,

$$H_3(\pi_1 F(R), \mathbb{Z}) \cong H_0(\pi_1 F(R), H_2(\widetilde{F}(R))) \cong H_0(\pi_1 F(R), \pi_2 F(R)) \cong \pi_2 F(R).$$

$\square$

Мы показали, что если $i = 1, 2$, то K-теория Квиллена $K_i(R) = \pi_i(B\,GL(R)^+)$ совпадает с классической K-теорией. Кроме того, мы выяснили, что $K_3(R) = H_3(\mathrm{St}(R), \mathbb{Z})$.

## 4.3 Q-конструкция

*4.3.1. Точные категории.* Мы будем называть **точной категорией** полную аддитивную подкатегорию $\mathcal{C}$ в абелевой категории $\mathcal{A}$, удовлетворяющую следующему свойству: если $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ — точная последовательность в $\mathcal{A}$ и $M', M'' \in \mathcal{C}$, то $M$ изоморфно объекту из $\mathcal{C}$. В $\mathcal{C}$ тогда определены *точные последовательности*: это те точные последовательности в $\mathcal{A}$, все члены которых лежат в $\mathcal{C}$. Аддитивный функтор между точными категориями называется **точным**, если он переводит точные последовательности в точные последовательности.

Если $\mathcal{C}$ — [малая] точная категория, мы можем определить группу Гротендика $K_0(\mathcal{C})$ обычным образом: $K_0(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}^{(\mathcal{I})}/\mathcal{R}$, где $\mathcal{I}$ — множество классов изоморфизма объектов в $\mathcal{C}$, а подгруппа $\mathcal{R} \leqslant \mathbb{Z}^{(\mathcal{I})}$ порождена разностями вида $[M] - [M'] - [M'']$ для всех точных последовательностей $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ в $\mathcal{C}$.

Мономорфизм $i\colon Z \to Y$ в точной категории $\mathcal{C}$ называется **допустимым**, если найдется точная последовательность в $\mathcal{C}$ вида $0 \to Z \xrightarrow{i} Y \to Y' \to 0$. Аналогично, эпиморфизм $q\colon Z \to X$ называется **допустимым**, если в $\mathcal{C}$ есть точная последовательность вида $0 \to X' \to Z \xrightarrow{q} Z \to 0$.

Построим по категории $\mathcal{C}$ новую категорию $Q\mathcal{C}$ следующим образом: объекты в $Q\mathcal{C}$ такие же, как в $\mathcal{C}$, а морфизм из $X$ в $Y$ задается классом изоморфизма диаграмм вида $X \overset{q}{\twoheadleftarrow} Z \overset{i}{\hookrightarrow} Y$, где $i$ — допустимый мономорфизм, а $q$ — допустимый эпиморфизм. Такая диаграмма изоморфна диаграмме вида $X \overset{q'}{\twoheadleftarrow} Z' \overset{i'}{\hookrightarrow} Y$, если существует изоморфизм между $Z$ и $Z'$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, hook] \arrow[dd, "\cong"] & \\
X & & Y \\
 & Z' \arrow[ul, two heads] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

коммутативной. Композиция морфизмов в $Q\mathcal{C}$ определяется следующим образом: для пары морфизмов $X \twoheadleftarrow Z \hookrightarrow Y$, $Y \twoheadleftarrow V \hookrightarrow T$ рассмотрим (в категории $\mathcal{A}$) диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X & & \\
Z \arrow[u, two heads] \arrow[r, hook] & Y & \\
Z \times_Y V \arrow[u, two heads] \arrow[r, hook] & V \arrow[r, hook] & T
\end{tikzcd}$$

Заметим, что ядра вертикальных стрелок в указанном декартовом квадрате совпадают; поэтому $Z \times_Y V$ лежит в $\mathcal{C}$. Нетрудно понять, что диаграмма $X \twoheadleftarrow Z \times_Y V \hookrightarrow T$ определяет морфизм из $X$ в $T$ в категории $Q\mathcal{C}$, и что класс изоморфизма этой диаграммы зависит лишь от классов изоморфизма исходных морфизмов.

Нулевой объект в $\mathcal{C}$ и $Q\mathcal{C}$ мы обозначаем через $0$; поэтому $\{0\}$ — точка в пространстве $BQ\mathcal{C}$. Квиллен показал, что имеется естественный изоморфизм $\pi_1(BQ\mathcal{C}, \{0\}) \cong K_0(\mathcal{C})$. Поэтому следующее определение имеет смысл: положим $K_i(\mathcal{C}) = \pi_{i+1}(BQ\mathcal{C}, \{0\})$ при $i \geqslant 0$.

*4.3.2. Резольвенты и dévissage.* Следующая теорема позволяет заменить точную категорию на ее подкатегорию с сохранением K-групп. Пусть $\mathcal{M}$ — точная категория, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ —

ее полная аддитивная подкатегория, замкнутая относительно расширений в $\mathcal{M}$. Тогда, очевидно, $\mathcal{P}$ сама является точной категорией, и включение $\mathcal{P} \to \mathcal{M}$ — точный функтор.

Теорема. Пусть $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ — как выше, и предположим, что

- если последовательность $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ точна в $\mathcal{M}$ и $M, M'' \in \mathcal{P}$, то $M' \in \mathcal{P}$;
- для любого объекта $M \in \mathcal{M}$ есть конечная резольвента

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0,$$

  где $P_i \in \mathcal{P}$.

Тогда $BQ\mathcal{P} \to BQ\mathcal{M}$ — гомотопическая эквивалентность, и, в частности, $K_i(\mathcal{P}) = K_i(\mathcal{M})$ для всех $i$.

Теорема (dévissage). Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория, $\mathcal{B}$ — полная абелева подкатегория, замкнутая относительно взятия подобъектов, фактор-объектов, и конечных произведений в $\mathcal{A}$. Предположим, что у каждого объекта $M \in \mathcal{A}$ есть точная фильтрация в $\mathcal{A}$ вида

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M,$$

и $M_i/M_{i+1} \in \mathcal{B}$ для всех $i \geqslant 1$. Тогда $BQ\mathcal{B} \to BQ\mathcal{A}$ — гомотопическая эквивалентность, и, в частности, $K_i(\mathcal{B}) \cong K_i(\mathcal{A})$.

*4.3.3. Подкатегории Серра и локализация.* Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория, и $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ — ее полная аддитивная подкатегория, замкнутая относительно взятия подобъектов, фактор-объектов и расширений в $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{B}$ является абелевой категорией и называется **подкатегорией Серра** категории $\mathcal{A}$.

Польза подкатегории Серра в том, что по ней можно факторизовать. Сейчас мы построим новую категорию $\mathcal{A}/\mathcal{B}$. Объекты $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ будут такими же, как объекты $\mathcal{A}$. Для объектов $M, N \in \mathcal{A}/\mathcal{B}$ и для подобъектов $M' \subseteq M$, $N' \subseteq N$ таких, что $M/M' \in \mathcal{B}$, $N' \in \mathcal{B}$ имеется естественный гомоморфизм $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N/N')$. Когда $(M', N')$ пробегает все такие пары подобъектов, мы получаем направленную систему абелевых групп вида $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N/N')$; положим $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}(M, N) = \varinjlim_{(M',N')} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N/N')$. Нетрудно проверить, что мы получаем действительно категорию, и имеется канонический аддитивный функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$, являющийся точным.

Теорема (локализация). Пусть $\mathcal{B}$ — подкатегория Серра абелевой категории $\mathcal{A}$, $s\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ и $p\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$ — канонические точные функторы. Тогда $BQ\mathcal{A} \overset{BQp}{\to} BQ(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ — расслоение с гомотопическим слоем $BQ\mathcal{B} \overset{BQs}{\to} BQ\mathcal{A}$. В частности, имеется длинная точная последовательность

$$\cdots \to K_{i+1}(\mathcal{A}/\mathcal{B}) \to K_i(\mathcal{B}) \to K_i(\mathcal{A}) \to K_i(A/\mathcal{B}) \to \cdots \to K_0(\mathcal{A}/\mathcal{B}) \to 0.$$

*4.3.4.* $+ = Q$. Пусть $R$ — кольцо, и $\mathcal{P}(R)$ — категория конечно порожденных проективных $R$-модулей. Это полная подкатегория абелевой категории левых $R$-модулей, и нетрудно видеть, что $\mathcal{P}(R)$ — точная категория, в которой все точные последовательности расщепляются. Следующая теорема утверждает, что $Q$-конструкция, примененная к категории $\mathcal{P}(R)$, дает ту же $K$-теорию, что и $+$-конструкция Квиллена.

Теорема. Существует естественная (с точностью до гомотопии) гомотопическая эквивалентность
$$B\,GL(R)^+ \to (\Omega BQ\mathcal{P}(R))^0$$
(здесь $\Omega$ обозначает взятие пространства петель, а верхний индекс 0 указывает на взятие связной компоненты тривиального пути в точке $\{0\} \in BQ\mathcal{P}(R)$). В частности, группы $K_i(\mathcal{P}(R))$ и $\pi_i(B\,GL(R)^+)$ естественно изоморфны при $i \geqslant 1$.

Таким образом, новое определение K-теории Квиллена, $K_i(R) = K_i(\mathcal{P}(R))$ совпадает с определением, построенным по $+$-конструкции; в частности, новые $K_1$ и $K_2$ совпадают с классическими. Кроме того, как мы отмечали в конце раздела 4.3.1, новый $K_0$ также совпадает с классическим.

Если вместо категории $\mathcal{P}(R)$ конечно порожденных модулей взять категорию $\mathcal{M}(R)$ *всех* конечно порожденных модулей, можно определить G-теорию $G_i(R) = K_i(\mathcal{M}(R))$. Вложение категорий $\mathcal{P}(R) \subseteq \mathcal{M}(R)$ индуцирует естественные отображения $K_i(R) \to G_i(R)$; по теореме о резольвенте для регулярного [слева] кольца $R$ эти отображения являются изоморфизмами.

Нетрудно показать, что функторы $G_i$, как и ранее определенные $G_0$, гомотопически инвариантны.

Теорема. Пусть $R$ — нетерово кольцо. Для каждого $i \geqslant 0$ имеются следующие естественные изоморфизмы:

1. $G_i(R) \cong G_i(R[t])$;
2. $G_i(A[t, t^{-1}]) \cong G_i(A) \oplus G_{i-1}(A)$,

где для $i = 0$ удобно положить $G_{-1}(A) = 0$.

## 4.4 Vista

*4.4.1. Топологический* $K_0$. Для переноса определения функтора $K_0$ на топологическую ситуацию полезно знать, каков аналог понятия «проективный модуль». Оказывается, это «векторное расслоение». Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Мы будем называть $\mathbb{F}$-векторным расслоением на топологическом пространстве $X$ непрерывное открытое сюръективное отображение $p\colon E \to X$ такое, что

- для каждой точки $x \in X$ слой $p^{-1}(x)$ снабжен структурой конечномерного векторного пространства над $\mathbb{F}$ (и естественная топология на этом пространстве совпадает с топологией, индуцированной с $E$);
- существуют непрерывные отображения $E \times E \to E$, $\mathbb{F} \times E \to E$, ограничения которых на каждый слой вида $p^{-1}(x)$ задают на нем ту самую структуру векторного пространства;
- расслоение $E \to X$ *локально тривиально*: для каждой точки $x \in X$ имеется ее окрестность $U_x \subseteq X$, векторное пространство $V$ над $\mathbb{F}$ и гомеоморфизм $V \times U_x \to p^{-1}(U_x)$ над $U_x$, совместимый со структурой, заданной предыдущими пунктами.

Пример: проекция ленты Мебиуса на экватор является вещественным векторным расслоением (ранга 1) на окружности.

Обозначим через $\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X)$ множество классов изоморфизма $\mathbb{F}$-векторных расслоений на $X$. Это абелев моноид относительно прямой суммы векторных расслоений. Определим $K^0_{\mathrm{top}}(X) = K_0(\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X))$, $KO^0_{\mathrm{top}}(X) = K_0(\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X))$.

Обратите внимание, что мы используем верхний индекс 0, а не нижний (как в алгебраической K-теории), поскольку мы получили контравариантный функтор. А именно, если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, и $p\colon E \to Y$ — $\mathbb{F}$-векторное расслоение на $Y$, то пулбэк $E \times_Y X \to X$ является $\mathbb{F}$-векторным расслоением на $X$. Это сопоставление продолжается до гомоморфизма абелевых групп $f^*\colon K^0_{top}(Y) \to K^0_{top}(X)$.

Топологическая K-теория неразрывно связана с алгебраической: следующую теорему доказал Ричард Суон.

Теорема. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, $X$ — компактное хаусдорфово пространство, $\mathcal{C}(X, \mathbb{F})$ — кольцо непрерывных функций $X \to \mathbb{F}$. Для каждого $E \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X)$ определим $\mathbb{F}$-векторное пространство глобальных сечений расслоения $E$: $\Gamma(X, E) = \{s\colon X \to E \mid p \circ s = \mathrm{id}_X\}$. Сопоставление $E \mapsto \Gamma(X, E)$ продолжается до изоморфизма $K^0_{top}(X) \to K_0(\mathcal{C}(X, \mathbb{C}))$, $KO^0_{top}(X) \to K_0(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}))$.

*4.4.2. K-теория схем.* Пусть $X$ — квази-проективное многообразие. Напомним, что **квази-когерентным пучком** $\mathcal{O}_X$-модулей называется пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ (то есть, пучок абелевых групп вместе с морфизмом $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, снабжающим для каждого открытого $U \subseteq X$ группу $\mathcal{F}(U)$ структурой $\mathcal{O}_X(U)$-модуля согласованным с ограничениями образом), для которого существует такое покрытие $X = \bigcup_i U_i$ аффинными открытыми подсхемами, что $\mathcal{F}|_{U_i}$ — пучок, ассоциированный с некоторым $\mathcal{O}_X(U_i)$-модулем $M_i$ для каждого $i$. Квази-когерентный пучок называется **когерентным**, если в этом определении можно выбрать *конечно порожденные* $\mathcal{O}_X(U_i)$-модули $M_i$.

Когерентный пучок $\mathcal{E}$ на квази-проективном многообразии $X$ называется **алгебраическим векторным расслоением**, если $\mathcal{E}$ локально свободен, то есть, существует открытое покрытие $X = \bigcup_i U_i$, для которого $\mathcal{E}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_i})^{e_i}$ при всех $i$.

Определим $K_0(X)$ следующим образом: рассмотрим свободную абелеву группу, порожденную множеством классов изоморфизма алгебраических векторных расслоений на $X$ и профакторизуем ее по подгруппе, порожденной соотношениями $[\mathcal{E}] - [\mathcal{E}_1] - [\mathcal{E}_2]$ для всех коротких точных последовательностей вида $0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_2 \to 0$.

*4.4.3. Топологическая K-теория.* Пусть $T$ — связное топологическое пространство. Обозначим через $U(n)$ унитарную группу (группу автоморфизмов невырожденной эрмитовой метрики на $n$-мерном комплексном векторном пространстве). На каждом [топологическом] векторном расслоении ранга $n$ на $T$ можно ввести структуру $U(n)$-расслоения (с помощью процесса ортогонализации Грама–Шмидта), и каждое сюръективное отображение векторных расслоений на $X$ расщепляется. Нетрудно понять, что при этом множество $[T, BU(n)]$ гомотопических классов отображений из $T$ в классифицирующее пространство $BU(n)$ естественно отождествляется с множеством классов изоморфизма векторных расслоений ранга $n$ на $T$. Обозначим через $BU$ прямой предел пространств $BU(n)$ относительно естественных вложений, индуцированных вложениями групп $U(n) \to U(n+1)$. Заметим, что множество гомотопических классов отображений $[T, BU \times \mathbb{Z}]$ обладает естественной структурой абелевой группы, индуцированной взятием прямой суммы матриц $U(n) \times U(m) \to U(n+m)$. Определим $K^0_{top}(T) = [T, BU \times \mathbb{Z}]$. Для любого компактного хаусдорфова пространства мы получим то же, что и раньше: эта группа естественно изоморфна группе Гротендика моноида топологических векторных расслоений на $T$ с операцией прямой суммы.

Если $T$ теперь является топологическим пространством с отмеченной точкой $t_0$, определим *приведенную* K-теорию формулой $\widetilde{K}^0_{top}(T) = K^0_{top}(T)/K^0_{top}(t_0)$, и *относительную* K-теорию формулой $K^0_{top}(T, A) = \widetilde{K}^0_{top}(T/A)$ для каждой пары пространств $(T, A)$ (здесь $T$ — топологическое пространство и $A \subseteq T$ — замкнутое подпространство). При этом

$K^0_{top}(T,\varnothing) = \widetilde{K}^0_{top}(T/\varnothing) = \widetilde{K}^0_{top}(T\coprod\{\star\}) = K^0_{top}(T)$. Для $n \geqslant 0$ положим $K^{-n}_{top}(T) = K^{-n}_{top}(T,\varnothing) = \widetilde{K}^0_{top}(\Sigma^n(T_+))$.

Обратите внимание, что верхние индексы принимают отрицательные значения: таким образом длинные точные последовательности K-групп индексированы правильным (когомологическим) образом.

*4.4.4.* K*-теория кольца целых числового поля.* Квиллен вычислил K-теорию конечного поля. Приведем ответ:

Теорема. Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из $q$ элементов, $i > 0$. Тогда $K_i(\mathbb{F}_q) = \mathbb{Z}/(q^j - 1)$ для $i = 2j - 1$, $K_i(\mathbb{F}_q) = 0$ для $i = 2j$.

Это один из немногих случаев, в которых K-теория полностью известна! Из этого вычисления и гомотопической инвариантности $G_i$ сразу следует, что $K_*(\mathbb{F}_q[t]) = K_*(\mathbb{F}_q)$ и $K_*(\mathbb{F}_q([t, t^{-1}])) = K_*(\mathbb{F}_q) \oplus K_{*-1}(\mathbb{F}_q)$.

Следующий естественный вопрос — чему равна $K_i(\mathbb{Z})$? Перечислим известные на сегодняшний день результаты, касающиеся кольца целых $\mathcal{O}_K$ числового поля $K$ (например, $K = \mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$). Обозначим через $r_1$ количество вещественных вложений $K \hookrightarrow \mathbb{R}$, и через $r_2$ количество пар сопряженных комплексных вложений $K \hookrightarrow \mathbb{C}$, образ которых не лежит в $\mathbb{R}$.

- Герман Минковский показал, что $K_0(\mathcal{O}_K) \otimes \mathbb{Q}$ одномерно (конечность числа классов поля $K$).
- Петер Густав Лежен Дирихле показал, что $K_1(\mathcal{O}_K) \otimes \mathbb{Q}$ имеет размерность $r_1 + r_2 - 1$ (теорема Дирихле о единицах).
- Даниэль Квиллен показал, что $K_i(\mathcal{O}_K)$ — конечно порожденная абелева группа для всех $i$.
- Арман Борель показал, что при $i > 1$

$$\dim_{\mathbb{Q}}(K_i(\mathcal{O}_K) \otimes \mathbb{Q}) = \begin{cases} 0, & i \equiv 0 \pmod 4 \\ r_1 + r_2, & i \equiv 1 \pmod 4 \\ 0, & i \equiv 2 \pmod 4 \\ r_2, & i \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

- Джон Рогнес и Чарльз Вайбель вычислили $K_*(\mathcal{O}_K) \otimes \mathbb{Z}/2$ как следствие доказательства Владимиром Воеводским гипотезы Милнора.
- Аналогично, $K_i(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/p$ известно для всех $i$, не делящихся на 4, как следствие гипотезы Блоха–Като, доказанной Маркусом Ростом и Владимиром Воеводским.

Гипотетически, $K_{4k}(\mathbb{Z}) = 0$ для $k \geqslant 1$. Результат вычисления $K_i(\mathbb{Z})$ приведен в следующей таблице (с точностью до ошибок в нумерации чисел Бернулли):

$$\begin{aligned}
K_{8k}(\mathbb{Z}) &= ?0, k \geqslant 1,\\
K_{8k+1}(\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2, k \geqslant 1,\\
K_{8k+2}(\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/2c_{4k+2} \oplus \mathbb{Z}/2,\\
K_{8k+3}(\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/2d_{4k+2},\\
K_{8k+4}(\mathbb{Z}) &= ?0,\\
K_{8k+5}(\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z},\\
K_{8k+6}(\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/2c_{2k+2},\\
K_{8k+7}(\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/2c_{4k+4}.
\end{aligned}$$

Здесь $c_k/d_k = B_k/(4k)$, где $B_k$ — k-ое число Бернулли, определенное рядом

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k.$$

В частности, $K_{22}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/691$.

Даже конечная порожденность K-групп пока неизвестна в достаточной общности:

Гипотеза Басса. Пусть R — конечно порожденная коммутативная алгебра над $\mathbb{Z}$. Тогда группа $G_n(A)$ является конечно порожденной для всех $n$. В частности, если $A$, кроме того, является регулярным кольцом, то $K_n(A)$ — конечно порожденная абелева группа.

*4.4.5. ζ-функция и гипотеза Лихтенбаума.* Вычисление K-теории кольца целых чисел берет свои истоки в 1736 году, когда великий петербургский математик Леонард Эйлер вычислил значения следующих рядов:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6},\\
\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{90},\\
&\dots\\
\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{12}} &= \frac{691}{6825 \cdot 93555}\pi^{12},\\
&\dots
\end{aligned}$$

Теорема Эйлера. Если $m \geqslant 1$, то

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{2m}} = (-1)^{m+1} \frac{B_{2m}}{(2m)!} 2^{2m-1} \pi^{2m}.$$

Иными словами, Эйлер вычислил значения дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$$

в четных положительных точках $s = 2m$. Дзета-функция Римана, определенная указанным рядом при $\mathrm{Re}(s) > 1$, имеет мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость с единственным полюсом в точке $s = 1$. Хорошо известно, что она удовлетворяет некоторому функциональному уравнению, связывающему значения $\zeta(s)$ и $\zeta(1-s)$. Поэтому из вычисления Эйлера сразу следует, что $\zeta(1-2m) = -\frac{B_{2m}}{2m}$.

Про значения дзета-функции в *нечетных* положительных точках известно не так много. В 1979 году Роже Апери показал, что $\zeta(3)$ иррационально. Тангуй Ривоал доказал, что $\zeta(1+2m)$ иррационально для бесконечно многих значений $m$, и как минимум для одного $m$ такого, что $2 \leqslant m \leqslant 10$. Дзета-функция имеет простой нуль в точке $s = -2m$. Мы будем обозначать через $\zeta^*(-2m)$ первый ненулевой коэффициент в ряде Тейлора дзета-функции в точке $s = -2m$; $\zeta^*(-2m)$ называется *особым значением* дзета-функции в точке $s = -2m$. Из функционального уравнения на дзета-функцию тогда следует, в частности, что $\zeta(3) = -4\pi^2 \cdot \zeta^*(2)$.

Пусть теперь $F$ — числовое поле с $r_1$ вещественными вложениями и $r_2$ парами комплексных вложений. Мы обозначаем, как всегда, через $\mathcal{O}_F$ кольцо целых поля $F$, и для любого ненулевого идеала $I \trianglelefteq \mathcal{O}_F$ положим $N(I) = |\mathcal{O}_F/I|$. Рихард Дедекинд обобщил дзета-функцию Римана на случай числового поля: $\zeta_F(s) = \sum_{0 \neq I \trianglelefteq \mathcal{O}_F} \frac{1}{N(I)^s}$, и эта функция снова сходится для $\mathrm{Re}(s) > 1$ и может быть продолжена до мероморфной функции на комплексной плоскости с единственным простым полюсом в точке $s = 1$. Снова имеется функциональное уравнение, связывающее $\zeta_F(s)$ и $\zeta_F(1-s)$.

Дирихле доказал следующую формулу числа классов:

$$\zeta_F^*(0) = -\frac{h_F}{w_F} \cdot R_F,$$

где через $h_F$ обозначается число классов поля $F$, $w_F$ — число корней из единицы в $F$, и $R_F$ — *регулятор Дирихле*. А именно, по теореме Дирихле о единицах группа единиц кольца $\mathcal{O}_F$ является прямым произведением группы корней из единицы в $F$ и свободной абелевой группы порядка $r_1 + r_2 - 1$. Пусть $u_1, \ldots, u_{r_1+r_2-1}$ — образующие этой свободной абелевой группы. Обозначим через $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_1}$ вложения $F$ в $\mathbb{R}$, а через $\sigma_{r_1+1}, \ldots, \sigma_{r_1+r_2}$ — попарно несопряженные вложения $F$ в $\mathbb{C}$, образ каждого из которых не лежит в $\mathbb{R}$. Для каждого из $r_1 + r_2$ вложений $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_1+r_2}$ рассмотрим $\ln(|\sigma_i(u_j)|)$. Эти значения образуют матрицу $(r_1 + r_2 - 1) \times (r_1 + r_2)$. При этом сумма значений в каждой строке равна 0, поскольку произведение всех норм $\sigma_i(u_j)$ при фиксированном $j$ равна единице. Поэтому после удаления любого столбца определитель этой матрицы оказывается одним и тем же; этот определитель и называется регулятором Дирихле.

Заметим, что $K_0(\mathcal{O}_F) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Cl}(F)$ (здесь $\mathrm{Cl}(F)$ — группа классов идеалов кольца $\mathcal{O}_F$) и $K_1(\mathcal{O}_F) \cong \mathcal{O}_F^*$. Поэтому формулу числа классов можно переписать следующим образом:

$$\zeta^*(0) = -\frac{|K_0(\mathcal{O}_F)_{\mathrm{tors}}|}{|K_1(\mathcal{O}_F)_{\mathrm{tors}}|} \cdot R_F.$$

Борель обобщил регулятор Дирихле, построив регуляторное отображение

$$\rho_n^B(F)\colon K_{2n-1}(\mathcal{O}_F) \to \mathbb{R}^{d_n}$$

и определив *регулятор Бореля* $R_n^B(F)$. Около 1971 года Лихтенбаум предложил следующее обобщение формулы Дирихле для числа классов:

Гипотеза Лихтенваума. Для $n \geqslant 2$ выполнено

$$\zeta_F^*(1-n) = \pm\frac{|K_{2n-2}(\mathcal{O}_F)|}{|K_{2n-1}(\mathcal{O}_F)_{\mathrm{tors}}|} \cdot R_n^B(F)$$

с точностью до множителя, являющегося степенью двойки.