Группы Ли и алгебры Ли*

Александр Лузгарев

16 декабря 2014 г.

Содержание

---

*Конспект лекций спецкурса осени 2014 г.; предварительная версия.

1 Введение

1.1 Замкнутые линейные группы

1.1.1. Топологические группы. Пусть k — поле (у нас будет $k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Напомним, что $GL(n, k)$ — **полная линейная группа** — это группа всех невырожденных матриц размера $n \times n$ с коэффициентами из k; групповой операцией служит умножение матриц. Заметим, что $GL(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ и $GL(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{2n^2}$. Мы всегда будем снабжать $GL(n, k)$ индуцированной топологией. Кроме того, множество $GL(n, k)$ открыто, поскольку является множеством матриц, на которых полиномиальная функция $\det$ (определитель) не обращается в нуль. Умножение и взятие обратного элемента являются непрерывными отображениями, поскольку они задаются многочленами от коэффициентов матриц, возможно, с делением на определитель.

Определение 1.1.1.1. Топологическое пространство G, на котором задана структура группы, называется **топологической группой**, если отображения $\mathrm{mult}\colon G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ и $\mathrm{inv}\colon G \to G$, $g \mapsto g$ являются непрерывными.

Таким образом, $GL(n, \mathbb{R})$ и $GL(n, \mathbb{C})$ являются топологическими группами.

1.1.2. Замкнутые линейные группы.

Определение 1.1.2.1. Замкнутая подгруппа $GL(n, \mathbb{C})$ называется **замкнутой линейной группой**.

Примеры 1.1.2.2.

$SL(n, \mathbb{R}) = \{x \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(x) = 1\}$;

$SL(n, \mathbb{C}) = \{x \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(x) = 1\}$;

$SO(n) = \{x \in GL(n, \mathbb{R}) \mid xx^T = 1, \det(x) = 1\}$;

$U(n) = \{x \in GL(n, \mathbb{C}) \mid xx^* = 1\}$;

$SU(n) = \{x \in U(n) \mid \det(x) = 1\}$.

Все перечисленные группы являются замкнутыми линейными, поскольку задаются полиномиальными уравнениями.

1.1.3. Гладкие кривые в линейных группах. Пусть G — некоторая замкнутая линейная группа. Сейчас нас будут интересовать *гладкие кривые* $c(t)$ в G такие, что $c(0) = 1$. Например,

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является гладкой кривой в $SO(3)$. Для каждой такой кривой можно рассмотреть матрицу $c'(0)$. Например, для указанной выше кривой получаем

$$c'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Положим
$$\mathfrak{g} = \{c'(0) \mid c\colon \mathbb{R} \to G \text{ — гладкая кривая и } c(0) = 1\}.$$
По определению $\mathfrak{g}$ является подмножеством матриц того же размера, что и матрицы из G; однако, элементы $\mathfrak{g}$ уже не обязаны быть обратимыми. Геометрически, $c'(0)$ является касательным вектором к G в точке 1, поэтому на $\mathfrak{g}$ можно смотреть как на *касательное пространство* к группе G в единице.

Предложение 1.1.3.1. *Множество $\mathfrak{g}$ является векторным $\mathbb{R}$-подпространством пространства матриц.*

Доказательство. Возьмем два элемента $c'(0), b'(0) \in \mathfrak{g}$. Продифференцируем произведение $c(t)b(t)$:
$$\frac{d}{dt}(c(t)b(t)) = c(t)b'(t) + c'(t)b(t).$$
Отсюда
$$\frac{d}{dt}(c(t)b(t))|_{t=0} = c(0)b'(0) + c'(0)b(0) = b'(0) + c'(0).$$
Поэтому $\mathfrak{g}$ замкнуто относительно сложения. Пусть теперь $c'(0) \in \mathfrak{g}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Продифференцируем $c(\lambda t)$:
$$\frac{d}{dt}(c(\lambda t)) = c'(\lambda t)\lambda.$$
Отсюда
$$\frac{d}{dt}(c(\lambda t))|_{t=0} = \lambda c'(0).$$
□

1.1.4. Присоединенное действие. Заметим, что для каждого элемента $g \in G$ имеется отображение $G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$. Если $c(t)$ — гладкая кривая в G, для которой $c(0) = 1$, то и $gc(t)g^{-1}$ является такой кривой. Значение производной такой кривой в нуле равно $gc'(0)g^{-1}$. Поэтому для каждого $g \in G$ имеется отображение $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $X \mapsto gXg^{-1}$; нетрудно видеть, что оно является линейным. Назовем это отображение $\mathrm{Ad}(g)$. Мы получили, что группа G действует на пространстве $\mathfrak{g}$ линейными отображениями; это действие называется **присоединенным действием или присоединенным представлением**.

Покажем, что в $\mathfrak{g}$ имеется еще одна операция (она называется *скобкой Ли*; ее наличие превратит $\mathfrak{g}$ в *алгебру Ли*). Пусть $X, Y \in \mathfrak{G}$, и пусть Y задается некоторой кривой $c(t)$ в G, причем $c(0) = 1$. Рассмотрим отображение
$$\mathbb{R} \to \mathfrak{g}, t \mapsto \mathrm{Ad}(c(t))X.$$
Из определения Ad легко следует, что эта функция гладкая. Посмотрим на ее производную в нуле. По определению это
$$\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(c(t))X\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(\mathrm{Ad}(c(t))X - X\big).$$
Мы знаем, что предел в правой части существует. Заметим, что X и $\mathrm{Ad}(c(t))X$ лежат в $\mathfrak{g}$, поэтому и $\frac{1}{t}\big(\mathrm{Ad}(c(t))X - X\big)$ лежит в $\mathfrak{g}$ при всех t. Множество $\mathfrak{g}$ является подпространством в пространстве матриц, и потому замкнуто. Поэтому предел, стоящий в правой части, также лежит в $\mathfrak{g}$. Посчитаем, чему он равен.

Для этого необходимо научиться дифференцировать частное $c(t)^{-1}$.

Лемма 1.1.4.1.
$$\frac{d}{dt}\big(c(t)^{-1}\big) = -c(t)^{-1}c'(t)c(t)^{-1}.$$

Доказательство. Достаточно продифференцировать тождество $c(t)c(t)^{-1} = 1$: получаем

$$c'(t)c(t)^{-1} + c(t)\frac{d}{dt}\big(c(t)^{-1}\big) = 0,$$

откуда следует нужное выражение. □

Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(\mathrm{Ad}(c(t))X\big) &= \frac{d}{dt}\big(c(t)Xc(t)^{-1}\big)\\ &= c'(t)Xc(t)^{-1} + c(t)X\left(\frac{d}{dt}\big(c(t)^{-1}\big)\right)\\ &= c'(t)Xc(t)^{-1} - c(t)Xc(t)^{-1}c'(t)(t)^{-1}.\end{aligned}$$

Мы знаем, что при подстановке $t = 0$ получается элемент из $\mathfrak{g}$. Значит, $c'(0)X - Xc'(0) = YX - XY \in \mathfrak{g}$. Поэтому пространство $\mathfrak{g}$ замкнуто относительно **скобки Ли**:

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Поэтому множество $\mathfrak{g}$ называется **алгеброй Ли** замкнутой линейной группы G.

1.2 Линейные алгебры Ли

1.2.1. Алгебры Ли. Вообще, алгеброй Ли над произвольным полем k называется векторное пространство L над k, на котором введена бинарная операция $[\cdot,\cdot]$ так, что выполняются три свойства:

1. операция $[\cdot,\cdot]$ линейна по каждому аргументу;
2. (*антикоммутативность*) $[x, x] = 0$ для всех $x \in L$;
3. (*тождество Якоби*) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ для всех $x, y, z \in L$.

Пример 1.2.1.1. Любое векторное пространство V над k можно превратить в алгебру Ли, положив $[x, y] = 0$ для всех $x, y \in V$. Такая алгебра Ли называется **абелевой**.

Упражнение 1.2.1.2. *Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра над k. Рассмотрим A как векторное пространство с операцией коммутирования $[x, y] = xy - yx$. Докажите, что эта операция превращает A в алгебру Ли. На самом деле, достаточно потребовать, чтобы A была квазиассоциативной алгеброй, а не ассоциативной. Напомним, что алгебра A называется* **ассоциативной**, *если $x(yz) - (xy)z$ равно 0 для всех $x, y, z \in A$. Алгебра A называется* **квазиассоциативной**, *если выражение $x(yz) - (xy)z$ симметрично по x и y, то есть, если $x(yz) - (xy)z = y(xz) - (yx)z$ для всех $x, y, z \in A$.*

Замечание 1.2.1.3. Из антикоммутативности немедленно следует, что $[x, y] = -[y, x]$ для всех $x, y \in L$. Поэтому тождество Якоби можно переписать следующим образом:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]].$$

Для каждого $x \in L$ рассмотрим линейное отображение $\mathrm{ad}_x\colon L \to L$, $y \mapsto [x, y]$. Тождество Якоби теперь можно записать так:

$$\mathrm{ad}_x[y, z] = [\mathrm{ad}_x y, z] + [y, \mathrm{ad}_x z].$$

В таком виде оно превращается в тождество Лейбница для дифференцирования произведения и означает, что отображение $\mathrm{ad}(x)$ является *дифференцированием* алгебры L.

1.2.2. Примеры алгебр Ли: SO_3. Вернемся к линейным группам и посчитаем несколько примеров алгебр Ли. Очевидно, что для $G = GL(n, \mathbb{R})$ и $G = GL(n, \mathbb{C})$ мы получим, что $\mathfrak{g}$ состоит из всех матриц из $M(n, \mathbb{R})$ и $M(n, \mathbb{C})$, соответственно. Поэтому в указанных случаях алгебра Ли $\mathfrak{g}$ просто получается заменой в ассоциативной алгебре вида $M(n, k)$ умножения на коммутирования. Полученная алгебра Ли обозначается через $\mathfrak{gl}(n, k)$ и называется **полной линейной алгеброй Ли**.

Для $G = SO(3)$ выше мы видели, что

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}.$$

Написав аналогичные кривые с косинусами и синусами, нетрудно понять, что

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}.$$

Поэтому $\mathfrak{g}$ содержит трехмерное подпространство, состоящее из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Такие матрицы называются **кососимметрическими**. Покажем, что на самом деле $\mathfrak{g}$ совпадает с этим трехмерным пространством. Действительно, пусть элемент из $\mathfrak{g}$ соответствует некоторой кривой $c(t)$ в G. Тогда $c(t)c(t)^T = 1$. Дифференцируя, получаем, что

$$c'(t)c(t)^T + c(t)c'(t)^T = 0.$$

Подставим $t = 0$ и вспомним, что $c(0) = 1$:

$$c'(0) + c'(0)^T = 0,$$

то есть, $c'(0)$ кососимметрична. Обозначим полученную алгебру Ли

$$\mathfrak{so}(3) = \{X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}.$$

1.2.3. Классические линейные алгебры Ли. Определим следующие алгебры Ли:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{so}(n) &= \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}, \\
\mathfrak{u}(n) &= \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\}, \\
\mathfrak{su}(n) &= \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X + X^* = 0, \operatorname{Tr} X = 0\}, \\
\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr} X = 0\}, \\
\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) &= \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \operatorname{Tr} X = 0\},
\end{aligned}$$

Вскоре окажется, что это алгебры Ли соответствующих групп Ли. Мы сейчас можем показать это для $SO(n)$ точно так же, как сделали это выше для $SO(3)$. Аналогичное рассуждение с дифференцированием показывает, что алгебра Ли группы $U(n)$ *содержится* в $\mathfrak{u}(n)$.

Более общо, пусть f — матрица Грама невырожденной симметрической билинейной формы, J — матрица Грама невырожденной кососимметрической формы. Тогда для любого поля k определены алгебры Ли

$$\begin{aligned}\mathfrak{sl}(n,k) &= \{X \in \mathfrak{gl}(n,k) \mid \operatorname{Tr} X = 0\},\\ \mathfrak{so}(n,f,k) &= \{X \in \mathfrak{sl}(n,k) \mid Xf + fX^T = 0\},\\ \mathfrak{sp}(n,J,k) &= \{X \in \mathfrak{sl}(n,k) \mid XJ + Jx^T = 0\}.\end{aligned}$$

Для любого поля k все невырожденные кососимметричные формы изометричны (и существуют только в четной размерности); поэтому достаточно рассматривать случай матрицы

$$j = \begin{pmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $p = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ — **перъединичная матрица**. Поэтому мы будем говорить о группе $\mathfrak{sp}(n,k)$, имея в виду эту матрицу J. В то же время, над k, как правило, существует много классов изометрий симметричных билинейных форм. Тем не менее, часто рассматривают случай единичной матрицы f (как мы сделали выше для $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$) или перъединичной матрицы p; эти формы изометричны над полем характеристики не 2. Если k алгебраически замкнуто (и $\operatorname{char} k \neq 2$), то все невырожденные билинейные симметричные формы изометричны друг другу. Мы будем писать $\mathfrak{so}(n,k)$, когда имеется в виду единичная матрица $f = e$.

Для того, чтобы разобраться с остальными случаями, нужно понять, как связаны $\det$ в определении групп Ли и Tr в определении алгебр Ли. Покажем, что если $c(t)$ — гладкая кривая $\mathbb{R} \to M(n,k)$ такая, что $c(0) = 1$, то

$$\left(\frac{d}{dt}\big(\det c(t)\big)\right)\bigg|_{t=0} = \operatorname{Tr} c'(0).$$

Это проверяется несложным вычислением: представьте, что $\det c(t)$ расписан в виде суммы слагаемых, каждое из которых является произведением n элементов матрицы $c(t)$: первый берется из первой строчки, второй — из второй, и так далее. После дифференцирования каждое слагаемое превращается в сумму n слагаемых, и весь определитель можно считать суммой n определителей: в первом из них мы продифференцировали первую строчку матрицы $c(t)$, во втором — вторую, и так далее. После подстановки $t = 0$ каждый такой определитель превращается в определитель матрицы, которая отличается от единичной только в одной строке. Такой определитель равен диагональному элементу, стоящему в этой строке, то есть, диагональному элементу матрицы $c'(0)$. Сумма n определителей, стало быть, превратится в сумму диагональных элементов, что и требовалось.

Теперь несложно видеть, что алгебры Ли групп Ли $SU(n)$, $SL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{C})$ содержатся в $\mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, соответственно. Для того, чтобы доказать обратные включения, нам нужно научиться получать элементы группы Ли из элементов алгебры Ли.

1.2.4. Экспонента от матрицы. Это делается при помощи *экспоненты от матрицы.*

Определение 1.2.4.1. Пусть $A \in M(n,\mathbb{C})$. Определим

$$\exp A = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

Предложение 1.2.4.2. *Ряд e^A сходится. Более того,*

1. *если X и Y коммутируют, то $e^X e^Y = e^{X+Y}$;*
2. *матрица e^X обратима;*
3. *отображение $t \mapsto e^{tX}$ задает гладкую кривую в $GL(n,\mathbb{C})$, которая равна 1 в точке $t=0$;*
4. $\frac{d}{dt}(e^{tX}) = Xe^{tX}$*;*
5. $\det e^X = e^{\mathrm{Tr}(X)}$*;*
6. *отображение $\mathbb{R}^{2n^2} \to \mathbb{R}^{2n^2}$, $X \mapsto e^X$ является гладким.*

Доказательство. Вспомним, что нормой матрицы M называется

$$||M|| = \sup_{|x| \leqslant 1} |Mx|,$$

где через $|\cdot|$ обозначена стандартная эвклидова норма. Тогда

$$||\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{1}{n!} A^n|| \leqslant \sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{1}{n!} ||A||^n.$$

При стремлении N_1 и N_2 к бесконечности правая часть стремится к нулю, поскольку обычный ряд Тейлора для числовой функции e^x сходится для всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому последовательность частичных сумм для e^A является фундаментальной [покомпонентно], и потому сходится. Этого достаточно для обоснования всех последующих выкладок.

1. Заметим, что если X и Y коммутируют, то можно пользоваться упрощенной формулой бинома: $(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} X^k Y^{n-k}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\exp(X+Y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (X+Y)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{k+m=n \\ k,m \geqslant 0}} \frac{n!}{k!m!} X^k Y^m \\
&= \sum_{k,m \geqslant 0} \frac{1}{k!m!} X^k Y^m \\
&= \left(\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} X^k \right) \left(\sum_{m \geqslant 0} \frac{1}{m!} Y^m \right) \\
&= \exp(X) \exp(Y).
\end{aligned}$$

2. Из уже доказанного следует, что $e^X e^{-X} = e^0 = 1$.

3. Посчитаем производную от e^{tX}:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{tX}) &= \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tX)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n!}(tX)^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}t^{n-1}X^n \\
&= X\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}(tX)^{n-1} \\
&= Xe^{tX}.
\end{aligned}$$

4. См. вычисление выше.

5. Если матрица X верхнетреугольна, и на ее диагонали стоят элементы $a_1, \ldots, a_n$, то e^X верхнетреугольна с элементами $e^{a_1} \ldots e^{a_n}$ на диагонали; ее определитель равен $e^{a_1} \cdot \ldots e^{a_n} = e^{a_1+\cdots+a_n} = e^{\mathrm{Tr}(X)}$. Произвольная комплексная матрица приводится к верхнетреугольному виду сопряжением, то есть, имеет вид gXg^{-1} для верхнетреугольной X и некоторой обратимой матрицы g. Тогда

$$\det(e^{gXg^{-1}}) = \det(ge^X g^{-1}) = \det(e^X) = e^{\mathrm{Tr}(X)} = e^{\mathrm{Tr}(gXg^{-1})}.$$

6. Это следует из стандартных свойств дифференцирования функциональных рядов.

□

Теперь мы можем завершить отождествление алгебр Ли для известных нам примеров линейных групп. Сейчас мы покажем, что если X лежит в одной из перечисленных выше алгебр Ли, то e^{tX} лежит в соответствующей группе G. По предложению 1.2.4.2 отображение $t \mapsto e^{tX}$ задает гладкую кривую, которая равна 1 при $t = 0$, и производная которой в нуле равна X. Поэтому X лежит в алгебре Ли группы G, и мы докажем включение в нужную сторону.

Например, пусть $G = U(n)$ и $X \in \mathfrak{u}(n)$. Тогда $X + X^* = 0$, и потому

$$(e^{tX})(e^{tX})^* = e^{tX}e^{tX^*} = e^{tX}e^{-tX} = e^0 = 1.$$

Это и означает, что $e^{tX} \in U(n)$, и потому X лежит в алгебре Ли группы $U(n)$. Мы показали, таким образом, что эта алгебра Ли совпадает с $\mathfrak{u}(n)$.

Пусть теперь $G = SL(n, \mathbb{R})$. Если $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, то $\mathrm{Tr}(X) = 0$, и по предложению 1.2.4.2 теперь $\det e^{tX} = 1$. Поэтому e^{tX} лежит в $SL(n, \mathbb{R})$, а X лежит в алгебре Ли группы $SL(n, \mathbb{R})$. Значит, алгебра Ли группы $SL(n, \mathbb{R})$ совпадает с $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Комбинация двух рассуждений показывает, что алгебра Ли группы $SU(n, R)$ равна $\mathfrak{su}(n, \mathbb{R})$.

Иными словами, для каждого примера алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и для каждого X из $\mathfrak{g}$ мы нашли гладкую кривую в G, равную 1 при $t = 0$, производная которой в нуле равна X. Эта кривая имеет вид e^{tX}. Ниже мы распространим это рассуждение на все линейные группы: осталось доказать, что экспонента переводит $\mathfrak{g}$ в G.

1.2.5. Как попасть из алгебры Ли в группу Ли. Пусть теперь G — произвольная замкнутая линейная группа. Напомним, что ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из матриц вида $c'(0)$ для всех гладких кривых $c(t)$ в G таких, что $c(0) = 1$. Предложение 1.2.4.2 говорит нам, что для каждого X кривая e^{tX} является гладкой и что ее производная в нуле равна X. Наша цель — показать, что $e^{tX} \in G$.

Стиснув зубы, докажем две технических леммы.

Лемма 1.2.5.1. *Существуют открытый куб* $U \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ *вокруг* 0 *и открытая окрестность единицы* $V \subset GL(n, \mathbb{C})$ *такие, что* $\exp\colon U \to V$ *— гладкое биективное отображение с гладким обратным.*

Доказательство. В предложении 1.2.4.2 доказано, что exp является гладким отображением. По теореме о неявной функции достаточно доказать, что производная этого отображения в нуле невырождена. Несложное вычисление показывает, что эта производная равна единичной матрице. $\square$

Лемма 1.2.5.2. *Если* $c(t)$ *— гладкая кривая в* $GL(n, \mathbb{C})$*, и* $c(0) = 1$*,* $c'(0) = X$*, то*

$$\lim_{k \to +\infty} c\left(\frac{t}{k}\right)^k = \exp(tX)$$

для всех t *в области определения кривой* c*.*

Доказательство. Выберем U и V как в лемме 1.2.5.1 и возьмем $\delta > 0$ такое, что $c(t) \in V$ для всех $|t| < 2\delta$. По лемме 1.2.5.1 на этих значениях $c(t)$ отображение exp обратимо; пусть $Z(t) = \exp^{-1} c(t)$. Тогда Z является отображением из интервала $(-2\delta, 2\delta)$ в $M(n, \mathbb{C})$, и $Z(0) = 0$. Дифференцируя, получаем, что $Z'(0) = (\exp'(0))^{-1} c'(0) = X$. Поэтому начало ряда Тейлора для $Z(t)$ выглядит так: $Z(t) = tX + O(t^2)$. Подставим t/k вместо t: $Z(t/k) = tX/k + O(t^2/k^2)$. Поэтому для каждого фиксированного $t \in (-\delta, \delta)$ выполнено $Z(t/k) = tX/k + O(1/k^2)$ (здесь считаем, что k стремится к бесконечности). Значит, $kZ(t/k) = tX + O(1/k)$ для всех $t \in (-\delta, \delta)$. Отсюда $c(t/k)^k = (\exp Z(t/k))^k = \exp(kZ(t/k)) = \exp(tX + O(1/k))$. Устремляя k к бесконечности, получаем необходимое равенство для $t \in (-\delta, \delta)$.

Теперь нетрудно распространить это равенство на все t из области определения c. Действительно, можно выбрать натуральное число N такое, что $|t/N| < \delta$ и применить полученные оценки к t/N. Вместо замены $t \mapsto t/k$ рассмотрим замену $t/N \mapsto t/(Nk + l)$ для $0 \leqslant l \leqslant N - 1$. Снова для каждого фиксированного t получаем

$$Z\left(\frac{t}{Nk+l}\right) = \frac{t}{Nk+l} + O\left(\frac{t^2}{(Nk+l)^2}\right) = \frac{t}{Nk+l}X + O(1/k^2),$$

и поэтому $(Nk + l)Z\left(\dfrac{t}{Nk+l}\right) = tX + O(1/k)$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} c\left(\frac{t}{Nk+l}\right)^{Nk+l} &= \left(\exp Z\left(\frac{t}{Nk+l}\right)\right)^{Nk+l} \\ &= \exp\left((Nk+l)Z\left(\frac{t}{Nk+l}\right)\right) \\ &= \exp(tX + O(1/k)). \end{aligned}$$

Устремляя k к бесконечности (и варьируя l), получаем требуемое равенство. $\square$

Предложение 1.2.5.3. *Если* G *— замкнутая линейная группа,* $\mathfrak{g}$ *— ее алгебра Ли, и* $X \in \mathfrak{g}$*, то* $\exp(X) \in G$*. В частности, поэтому*

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in G \text{ для всех } t \in \mathbb{R}\}.$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{g}$, и пусть $c(t)$ — гладкая кривая в G, для которой $c(0) = 1$ и $c'(0) = X$. Тогда $c(t/n)^n \in G$ для всех $n \geqslant 1$. Лемма 1.2.5.2 говорит нам, что предел $\lim_{n\to\infty} c(t/n)^n$ существует и равен $\exp(tX)$ (по крайней мере, для всех достаточно маленьких t). Из замкнутости G теперь следует, что этот предел лежит в G, и возведение в степень показывает, что $\exp(tX)$ лежит в G для всех вещественных t. Мы доказали включение «$\subseteq$»; обратное включение немедленно следует из предложения 1.2.4.2. □

2 Алгебры Ли

2.1 Основные понятия

2.1.1. Дифференцирования. Выше мы для каждой ассоциативной алгебры A над полем k определили алгебру Ли $A^{(-)}$, которая совпадает с A как векторное пространство и снабжена скобкой Ли $[x, y] = xy - yx$. Еще один важнейший класс примеров алгебр Ли — это алгебры дифференцирований.

Определение 2.1.1.1. Пусть A — алгебра над полем k. Отображение $D\colon A \to A$ называется **дифференцированием** алгебры A, если оно является линейным отображением векторных пространств и $D(xy) = Dx \cdot y + x \cdot Dy$ для всех $x, y \in A$.

Обозначим через $\mathrm{Der}(A)$ множество всех дифференцирований алгебры A.

Предложение 2.1.1.2. *Для любой* k*-алгебры* A *множество* $\mathrm{Der}(A)$ *является алгеброй Ли относительно естественных операций сложения, умножения на скаляр, и скобки Ли* $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$*. Кроме того,* $\mathrm{Der}(A)$ *является подалгеброй Ли алгебры* $\mathfrak{gl}(L)$*.*

Доказательство. Несложно проверить, что если $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(A)$, $\lambda \in k$, то $D_1 + D_2$ и λD_1 также являются дифференцированиями алгебры A. Проверим, что $[D_1, D_2] \in \mathrm{Der}(A)$. Линейность $[D_1, D_2]$ немедленно следует из линейности D_1 и D_2. Тождество Лейбница:

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](xy) &= D_1(D_2(xy)) - D_2(D_1(xy)) = \\
&= D_1(D_2x \cdot y + x \cdot D_2y) - D_2(D_1x \cdot y + x \cdot D_1y) \\
&= D_1(D_2x) \cdot y + D_2x \cdot D_1y + D_1x \cdot D_2y + x \cdot D_1(D_2y) \\
&\qquad - D_2(D_1x) \cdot y - D_1x \cdot D_2y - D_2x \cdot D_1y - x \cdot D_2(D_1y) \\
&= (D_1(D_2x) - D_2(D_1x)) \cdot y + x \cdot (D_1(D_2y) - D_2(D_1y)) \\
&= [D_1, D_2]x \cdot y + x \cdot [D_1, D_2]y.
\end{aligned}$$

Последнее утверждение очевидно. □

Пример 2.1.1.3. Пусть L — алгебра Ли, $x \in L$. Рассмотрим отображение

$$\mathrm{ad}_x\colon L \to L, \quad y \mapsto [x, y].$$

Отображение такого вида называется **внутренним дифференцированием** алгебры Ли L. Мы уже знаем, что оно действительно является дифференцированием (см. замечание 1.2.1.3).

2.1.2. Гомоморфизмы и представления.

Определение 2.1.2.1. Пусть L, M — алгебры Ли над полем k. Отображение $\varphi\colon L \to M$ называется **гомоморфизмом алгебр Ли**, если оно является линейным отображением векторных пространств и $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ для всех $x, y \in L$.

Определение 2.1.2.2. Пусть V — векторное пространство над k, L — алгебра Ли над k. Гомоморфизм алгебр Ли $\pi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ называется **линейным представлением** алгебры Ли L в векторном пространстве V. Обычно мы будем рассматривать лишь конечномерные представления, для которых $\dim(V) < \infty$. Если гомоморфизм π инъективен, то L отождествляется с подалгеброй алгебры $\mathfrak{gl}(V)$; в конечномерном случае такая алгебра Ли называется **линейной**.

Пример 2.1.2.3. Пусть L — алгебра Ли. Рассмотрим отображение

$$\mathrm{ad}\colon L \to \mathrm{Der}(L) \leqslant \mathfrak{gl}(L), \quad x \mapsto \mathrm{ad}_x.$$

Проверим, что оно является представлением алгебры Ли L. Аддитивность ad очевидна. Осталось проверить, что $\mathrm{ad}_{[x,y]}(z) = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y](z) = \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y(z) - \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x(z)$, а это еще одна форма тождества Якоби. Таким образом, ad является представлением L; оно называется **присоединенным**.

Упражнение 2.1.2.4. *Выберем следующий базис в* $\mathfrak{sl}(2, k)$*:*

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Найдите образы этих векторов в присоединенном представлении $\mathfrak{sl}(2, k)$*.*

2.1.3. Подалгебры и идеалы.

Определение 2.1.3.1. Векторное подпространство $M \leqslant L$ называется **подалгеброй** алгебры Ли L, если $[x, y] \in M$ для всех $x, y \in M$.

Пример 2.1.3.2. Любой одномерное подпространство алгебры Ли является его [абелевой] подалгеброй Ли.

Пример 2.1.3.3. Мы будем обозначать через $\mathfrak{b}(n, k) \leqslant \mathfrak{gl}(n, k)$ подалгебру, состоящую из верхнетреугольных матриц, через $\mathfrak{n}(n, k) \leqslant \mathfrak{gl}(n, k)$ подалгебру строго верхнетреугольных матриц, а через $\mathfrak{d}(n, k) \leqslant \mathfrak{gl}(n, k)$ — подалгебру диагональных матриц.

Определение 2.1.3.4. Векторное подпространство $I \leqslant L$ называется **идеалом** алгебры Ли L, если $[x, y] \in I$ для всех $x \in L$, $y \in I$. Обозначение: $I \trianglelefteq L$.

Эквивалентное определение: подпространство I является идеалом в L тогда и только тогда, когда оно выдерживает все внутренние дифференцирования L, то есть, когда $\mathrm{ad}_x(I) \leqslant I$ для всех $x \in L$. В силу антикоммутативности понятия левого и правого идеала совпадают.

Пример 2.1.3.5. Алгебра $\mathfrak{sl}(n, k)$ является идеалом в $\mathfrak{gl}(n, k)$.

Пример 2.1.3.6. Любая алгебра Ли L содержит два очевидных идеала, 0 и L. Неабелева алгебра Ли называется **простой**, если в ней нет неочевидных идеалов.

Упражнение 2.1.3.7. *Покажите, что ядро любого гомоморфизма алгебр Ли* $L \to M$ *является идеалом в* L*.*

Определение 2.1.3.8. Пусть L_1, L_2 — алгебры Ли. Рассмотрим пространство $L = L_1 \oplus L_2$ и определим на нем скобку Ли формулой $[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2])$ для всех $x_i, y_i \in L_i$. Нетрудно проверить, что получится алгебра Ли; она называется **прямой суммой** алгебр Ли L_1 и L_2. При этом L_1 и L_2 оказываются идеалами в L.

Пример 2.1.3.9. Нетрудно проверить, что если $A, B \trianglelefteq L$, то подпространство, порожденное всеми элементами вида $[x, y]$, где $x \in A$, $y \in B$, является идеалом в L. Этот идеал называется **коммутатором** идеалов A и B, и обозначается через $[A, B]$. В частности, $[L, L] \trianglelefteq L$; этот идеал называется **коммутантом** алгебры Ли L.

Пример 2.1.3.10. Множество $\{x \in L \mid [x, y] = 0 \text{ для всех } y \in L\}$ называется **центром** алгебры Ли L. Очевидно, что это идеал в L. Более общо, если $M \trianglelefteq L$, можно рассмотреть множество $C_L(M) = \{x \in L \mid [x, y] = 0 \text{ для всех } y \in M$. Оно называется **централизатором** идеала M в L. Если $x \in C_L(M)$, $y \in L$, $z \in M$, то $[[x, y], z] = [x, [y, z]] + [[x, z], y]$. При этом $[y, z] \in M$, поэтому $[x, [y, z]] = 0$, и $[x, z] = 0$. Отсюда следует, что и $[x, y] \in C_L(M)$. Значит, централизатор идеала является идеалом в L.

Упражнение 2.1.3.11. *Покажите, что если* $A, B \trianglelefteq L$, *то* $A + B, A \cap B \trianglelefteq L$.

Определение 2.1.3.12. Пусть $A \leqslant L$ — подалгебра Ли. Ее **нормализатором** называется подалгебра $N_L(A) = \{x \in L \mid [x, A] \leqslant A\}$. Иными словами, $N_L(A)$ — наибольшая подалгебра Ли в L, в которой A является идеалом. Подалгебра A называется **самонормализуемой**, если $N_L(A) = A$.

Пример 2.1.3.13. Покажите, что $\mathfrak{b}(n, k)$ и $\mathfrak{d}(n, k)$ являются самонормализуемыми подалгебрами в $\mathfrak{gl}(n, k)$. Вычислите нормализатор подалгебры $\mathfrak{n}(n, k)$.

Определение 2.1.3.14. Подпространство $I \leqslant L$ называется **характеристическим идеалом** алгебры Ли L, если $Dy \in I$ для всех $y \in I$ и всех дифференцирований D алгебры L. Иными словами, характеристический идеал выдерживает *все* дифференцирования L, в то время как идеал по определению выдерживает лишь *внутренние дифференцирования.*

Упражнение 2.1.3.15. *Если* A, B — *характеристические идеалы в* L, *то* $[A, B]$ *также является характеристическим идеалом в* L.

Определение 2.1.3.16. Пусть $I \trianglelefteq L$. Определим на фактор-пространстве L/I скобку Ли естественным образом: $[x + I, y + I] = [x, y] + I$. Получится алгебра Ли, которая называется **фактор-алгеброй** алгебры L по идеалу I.

2.1.4. Алгебры Ли маленькой размерности. Классифицируем алгебры Ли небольшой размерности. Очевидно, что есть только одна алгебра размерности 1 — абелева. Заметим также, что если $e_1, \dots, e_n$ — базис алгебры Ли L (как векторного пространства над k), то операция в L *полностью* определяется набором скаляров c_{ij}^h, где

$$[e_i, e_j] = \sum_h c_{ij}^h e_h$$

Эти скаляры называются **структурными константами** алгебры Ли L относительно базиса $e_1, \dots, e_n$.

Пример 2.1.4.1. Пусть M — неабелева алгебра Ли размерности 2. Если u, v — произвольный базис M, то $[M, M]$ порождается вектором $y = [u, v]$; в силу неабелевости этот вектор отличен от нуля. Дополним его до базиса M вектором x. Тогда $[x,y]=cy$, и, после домножения x на скаляр, можно считать, что $c=1$. Поэтому M изоморфна линейной алгебре Ли, состоящей из матриц вида

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$x=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее можно описать другими словами: это алгебра Ли аффинной группы Ли прямой $(ax+b)$.

Для анализа следующей размерности нам понадобится некоторая информация про построенную двумерную неабелеву алгебру Ли.

Лемма 2.1.4.2. *Любое дифференцирование алгебры Ли M является внутренним.*

Доказательство. Пусть $D\colon M \to M$ — дифференцирование. Поскольку $y \in [M,M]$ и $[M,M]$ является характеристическим идеалом в M, то $Dy \in [M,M]$, и потому $Dy=\lambda y$ для некоторого $\lambda \in k$. В то же время, $[\lambda x, y] = \lambda[x,y] = \lambda y$, поэтому и $\mathrm{ad}_{\lambda x}(y)=y$. Вычитая, получаем $(D-\mathrm{ad}_{\lambda x})y=0$. Поэтому, с точностью до внутреннего дифференцирования, можно считать, что $Dy=0$. Тогда

$$[Dx,y]=[Dx,y]+[x,Dy]=D[x,y]=Dy=0.$$

Отсюда следует, что $Dx=\mu y$ для некоторого $\mu \in k$. Но и $\mathrm{ad}_{-\mu y}(x)=[-\mu y,x]=\mu[x,y]=\mu y$. Наконец, $\mathrm{ad}_{-\mu y}(y)=0$. Поэтому $D=\mathrm{ad}_{-\mu y}$, а это внутреннее дифференцирование. □

Лемма 2.1.4.3. *Пусть $M \trianglelefteq L$ для некоторой алгебры Ли L. Тогда M выделяется как прямое слагаемое в L.*

Доказательство. Мы знаем, что $I=C_L(M)$ является идеалом в L (см. пример 2.1.3.10). Покажем, что $L=I\oplus M$. Действительно, $I\cap M=0$, поскольку центр алгебры M тривиален. Кроме того. если $x\in L$, то ограничение внутреннего дифференцирования ad_x на идеал M является, конечно, дифференцированием M. По лемме 2.1.4.2 это дифференцирование внутреннее, то есть, найдется $y\in M$ такой, что $\mathrm{ad}_x|_M=\mathrm{ad}_y|M$. Это означает, что $[x,z]=[y,z]$ для всех $z\in M$, и поэтому $x-y\in I$. Но тогда $x=(x-y)+y$, где $x-y\in I$ и $y\in M$, поэтому $I+M=L$. □

Пусть теперь L — трехмерная алгебра Ли. Обозначим $s=\dim[L,L]$.

- Если $s=0$, L абелева.
- Если $s=1$, пусть подпространство $[L,L]$ натянуто на вектор z. Если z не лежит в центре L, нетрудно показать, что L изоморфна прямому произведению двумерной алгебры M из примера 2.1.4.1 и одномерной абелевой алгебры. Если же z лежит в центре, пусть $x,y\in L$ таковы, что $[x,y]=z$. Тогда x,y,z линейно независимы, и алгебра L изоморфна линейной алгебре Ли матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Такая алгебра называется **алгеброй Гейзенберга** H_3.

- Если $s = 2$, подалгебра $[L, L]$ должна быть абелевой: действительно, неабелева алгебра Ли размерности 2 изоморфна M, и по лемме 2.1.4.3 выделяется прямым слагаемым ($[L, L]$, конечно, является идеалом в L), откуда $L = M \oplus k$; но в прошлом пункте мы посчитали, что $\dim[L, L] = 1$ — противоречие. Пусть $[L, L]$ натянута на векторы y, z такие, что $[y, z] = 0$. Возьмем $x \in L \backslash [L, L]$. Тогда мы можем записать

$$[x, y] = ay + bz, \quad [x, z] = cy + dz$$

для некоторых $a, b, c, d \in k$ таких, что $ad - bc \neq 0$. Замена базиса в $[L, L]$ приводит к сопряжению этой матрицы, а замена $x \mapsto \lambda x$ — к домножению на λ. Поэтому над алгебраически замкнутым полем мы можем считать, что эта матрица совпадает с одной из следующих:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В первом случае получаем, что

$$[x, y] = y, \quad [x, z] = \lambda z, \quad [y, z] = 0,$$

и λ определен с точностью до взятия обратного (то есть, для $1/\lambda$ получим изоморфную алгебру). Это дает (для бесконечного поля) бесконечно много примеров неизоморфных алгебр. Во втором случае получаем

$$[x, y] = y, \quad [x, z] = y + z, \quad [y, z] = 0.$$

- Если $s = 3$, алгебра Ли L должна быть простой (почему?). Над алгебраически замкнутым полем k такая алгебра ровно одна, и это $\mathfrak{sl}(2, k)$. Можно выбрать базис в ней так, что

$$[x, y] = z, \quad [y, z] = x, \quad [z, x] = y.$$

Отметим, что в случае произвольного поля у этой алгебры может быть много неизоморфных форм (то есть, алгебр, которые становятся изоморфными $\mathfrak{sl}(2, k)$ при переходе к алгебраическому замыканию). Например, для $k = \mathbb{R}$ имеется две простые трехмерные алгебры: $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^3$ с векторным умножением, и эти алгебры не изоморфны.

2.1.5. Простота $\mathfrak{sl}(n, k)$.

Теорема 2.1.5.1. *Классические алгебры Ли*

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n, k) &= \{x \in \mathfrak{gl}(n, k) \mid \mathrm{Tr}(x) = 0\}, \\ \mathfrak{so}(n, k) &= \{x \in \mathfrak{sl}(n, k) \mid x + x^T = 0\}, \\ \mathfrak{sp}(2n, k) &= \{x \in \mathfrak{sl}(2n, k) \mid xJ + Jx^T = 0\}, \end{aligned}$$

над полем k характеристики 0 являются простыми, за исключением

$$\mathfrak{so}(4, k) = \mathfrak{sl}(2, k) \oplus \mathfrak{sl}(2, k).$$

Мы докажем эту теорему только для $\mathfrak{sl}(n, k)$. Понятно, что элементы вида $\{e_{ij} \mid i, j\colon 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\}$ и $\{e_{ii} - e_{ss} \mid i\colon 1 \leqslant i \leqslant n, i \neq s\}$ образуют базис алгебры $\mathfrak{sl}(n, k)$ для любого фиксированного s. Таким образом, $\dim \mathfrak{sl}(n, k) = n^2 - 1$.

Лемма 2.1.5.2. *Пусть* $\mathrm{char}(k) \neq 2$. *Тогда* $\mathfrak{sl}(n,k)$ *порождается, как идеал, любым элементом вида* e_{rs}, *где* $r \neq s$.

Доказательство. Обозначим через $I \trianglelefteq \mathfrak{sl}(n,k)$ идеал, порожденный элементом e_{rs}. Заметим, что I содержит $[e_{rs}, e_{sr}] = e_{rr} - e_{ss}$ и $[[e_{rs}, e_{sr}], e_{sr}] = -2e_{sr}$. В силу ограничения на характеристику получаем, что $e_{sr} \in I$. Пусть теперь $i, j \notin \{r, s\}$. Тогда $e_{is} = [e_{ir}, e_{rs}] \in I$, $e_{rj} = [e_{rs}, e_{sj}] \in I$, и поэтому $e_{sj} = [e_{sr}, e_{rj}] \in I$, $e_{ir} = [e_{is}, e_{sr}] \in I$. Наконец, если $i \neq j$, то $e_{ij} = [e_{is}, e_{sj}] \in I$, $e_{ii} - e_{ss} = [e_{is}, e_{si}]$. □

Теорема 2.1.5.3. *Пусть* $\mathrm{char}(k) = p$, $n \geqslant 2$. *Предположим, что* $p \neq 2$ *и* $p \nmid n$. *Тогда алгебра Ли* $\mathfrak{sl}(n,k)$ *проста.*

Доказательство. Очевидно, что алгебра $\mathfrak{sl}(n,k)$ неабелева. Остается показать, что если $I \trianglelefteq \mathfrak{sl}(2,k)$ — ненулевой идеал в ней, то $I = \mathfrak{sl}(2,k)$. Выберем произвольный ненулевой элемент $g = (g_{ij}) \in I$. Если найдутся $i \neq j$ такие, что $g_{ij} \neq 0$, то $[[g, e_{ji}], e_{ji}] = -2g_{ij}e_{ij} \in I$. По предположению, $2g_{ij} \neq 0$, и поэтому $e_{ij} \in I$. По лемме 2.1.5.2 теперь $I = \mathfrak{sl}(n,k)$. Пусть теперь $g_{ij} = 0$ при всех $i \neq j$; то есть, матрица g диагональна. Если $g_{ii} \neq g_{jj}$ при некоторых $i \neq j$, то $[g, e_{ij}] = (g_{ii} - g_{jj})e_{ij} \in I$, откуда $e_{ij} \in I$, и можно применить лемму 2.1.5.2. Наконец, осталось рассмотреть случай, когда матрица g диагональна, и все диагональные элементы в ней совпадают. Это значит, что $g = \lambda e$ для некоторого $\lambda \in k$. Тогда $0 = \mathrm{Tr}(g) = n\lambda$, откуда следует, что $\lambda = 0$, и $g = 0$ — противоречие. □

2.1.6. Автоморфизмы. Напомним, что у каждой алгебры Ли имеется присоединенное представление $L \to \mathfrak{gl}(L)$, $x \mapsto \mathrm{ad}_x$. Его ядро состоит из всех элементов $x \in L$, для которых $\mathrm{ad}_x = 0$, то есть, для которых $[x, y] = 0$ при всех $y \in L$. Иными словами, $\ker(\mathrm{ad}) = Z(L)$. Отметим, что если алгебра L проста, то $Z(L) = 0$, и потому $\mathrm{ad}\colon L \to \mathfrak{gl}(L)$ — мономорфизм: *любая простая алгебра Ли является линейной.*

Определение 2.1.6.1. **Автоморфизмом** алгебры Ли называется ее изоморфизм на себя. Все автоморфизмы алгебры Ли L образуют группу, которая обозначается через $\mathrm{Aut}(L)$.

Пример 2.1.6.2. Пусть L — линейная алгебра Ли, то есть, $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$. Если $g \in GL(V)$ и $gLg^{-1} = L$, то отображение $x \mapsto gxg^{-1}$ является автоморфизмом алгебры L. В частности, если $L = \mathfrak{gl}(V)$ или $\mathfrak{sl}(V)$, то условие gLg^{-1} выполнено автоматически. Стало быть, у этих алгебр Ли много автоморфизмов.

Пример 2.1.6.3. Пусть снова L — линейная алгебра Ли, и пусть $\mathrm{char} k = 0$. Предположим, что $x \in L$ таков, что оператор ad_x нильпотентен, то есть, $(\mathrm{ad}_x)^k = 0$ для некоторого $k > 0$. Тогда ряд

$$\exp(\mathrm{ad}_x) = 1 + \mathrm{ad}_x + \frac{(\mathrm{ad}_x)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{ad}_x)^3}{3!} + \dots + \frac{(\mathrm{ad}_x)^{k-1}}{(k-1)!} + \dots$$

содержит лишь конечное число членов, и потому имеет смысл над k. Сейчас мы покажем, что $\exp(\mathrm{ad}_x) \in \mathrm{Aut}(L)$. Более того, можно заменить здесь ad_x на произвольное нильпотентное дифференцирование $\delta \in \mathrm{Der}(L)$. Действительно, пусть $\varphi = \exp(\delta)$. Правило Лейбница утверждает, что

$$\frac{\delta^n}{n!}(xy) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\delta^k(x) \cdot \frac{1}{(n-k)!}\delta^{n-k}(y).$$

Из этого следует (проверьте!), что $(\exp(\delta))(x) \cdot (\exp(\delta))(y) = (\exp(\delta))(xy)$. Поэтому $\varphi(xy - yx) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x)$. Кроме того, очевидно, что φ обратим. Поэтому $\varphi \in \mathrm{Aut}(L)$.

Определение 2.1.6.4. Автоморфизм линейной алгебры Ли L вида $\exp(\mathrm{ad}_x)$ для $x \in L$ такого, что ad_x нильпотентен, называется **внутренним**. Подгруппа в $\mathrm{Aut}(L)$, порожденная такими автоморфизмами, обозначается через $\mathrm{Int}(L)$; ее элементы тоже называются внутренними автоморфизмами.

Замечание 2.1.6.5. Покажем, что $\mathrm{Int}(L) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(L)$. Действительно, если $\varphi \in \mathrm{Aut}(L)$, $x \in L$, то $\varphi(\mathrm{ad}_x)\varphi^{-1} = \mathrm{ad}_{\varphi(x)}$; поэтому

$$\varphi \exp(\mathrm{ad}_x)\varphi^{-1} = \exp(\mathrm{ad}_{\varphi(x)}).$$

Лемма 2.1.6.6. *Пусть* $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ *— линейная алгебра Ли, и* $x \in L$ *— нильпотентный элемент. Тогда* $\exp(x)y(\exp(x))^{-1} = (\exp(\mathrm{ad}_x))(y)$ *при всех* $y \in L$.

Доказательство. Обозначим через l_x и r_x эндоморфизмы $V \to V$, $y \mapsto xy$ и $y \mapsto yx$ (правое и левое умножение на x). Тогда $\mathrm{ad}_x = l_x + r_{-x}$. Операторы l_x и r_{-x} коммутируют и нильпотентны (в силу нильпотентности x). Тогда $\exp(\mathrm{ad}_x) = \exp(l_x + r_{-x}) = \exp(l_x) \cdot \exp(r_{-x}) = l_{\exp(x)} \cdot r_{\exp(-x)}$. Применяя обе части к $y \in L$, получаем требуемое равенство. □

2.2 Нильпотентность и разрешимость

2.2.1. Нильпотентные алгебры Ли.

Определение 2.2.1.1. Пусть L — алгебра Ли. Определим индуктивно **убывающий центральный ряд**

$$C_0(L) = L, \quad C_1(L) = [L, L], \quad C_n(L) = [L, C_{n-1}(L)].$$

Очевидно (?!), что $C_n(L)$ является характеристическим идеалом в L для всех натуральных n.

Упражнение 2.2.1.2. *Докажите, что* $[C_m(L), C_n(L)] \leqslant C_{m+n+1}(L)$.

Определение 2.2.1.3. Алгебра Ли L называется **нильпотентной**, если существует натуральное n, для которого $C_n(L) = 0$. Наименьшее такое n называется **классом нильпотентности** алгебры L.

Упражнение 2.2.1.4. *Докажите, что трехмерная алгебра Гейзенберга* H *(см. 2.1.4) является нильпотентной класса 2.*

Упражнение 2.2.1.5. *Алгебра* $\mathfrak{n}(n, k)$ *строго верхнетреугольных матрица нильпотентна.*

Чуть ниже мы увидим (теорема 2.2.2.4), что строго верхнетреугольные матрицы — это главный и (в некотором смысле) единственный пример нильпотентных линейных алгебр Ли.

Упражнение 2.2.1.6. *Любая подалгебра нильпотентной алгебры нильпотентна. Любая фактор-алгебра нильпотентной алгебры нильпотентна.*

Предложение 2.2.1.7. *Пусть* L *— алгебра Ли.*

1. *Если алгебра* $L/Z(L)$ *нильпотентна, то и алгебра* L *нильпотентна.*

2. *Если алгебра* L *нильпотентна и* $L \neq 0$, *то* $Z(L) \neq 0$.

Доказательство. 1. Пусть $C_n(L) \subseteq Z(L)$. Тогда $C_{n+1}(L) = [L, C_n(L)] \subseteq [L, Z(L)] = 0$.

2. Пусть $C_n(L) \neq 0$ и $C_{n+1}(L) = 0$. Это значит, что $[L, C_n(L)] = 0$, и потому $C_n(L) \subseteq Z(L)$. □

2.2.2. Теорема Энгеля. Очевидно, что алгебра L является нильпотентной класса n тогда и только тогда, когда $[[\dots[[x_1, x_2], x_3], \dots], x_{n+1}] = 0$ для всех $x_1, \dots, x_{n+1} \in L$. Равносильно: $\mathrm{ad}_{x_1} \circ \dots \circ \mathrm{ad}_{x_n} = 0$ для всех $x_1, \dots, x_n \in L$. В частности, если L нильпотентна, то все ее элементы ad-нильпотентны. Удивительно, что верно и обратное (теорема 2.2.2.5).

Упражнение 2.2.2.1. *Пусть $x \in \mathrm{End}(V)$ — нильпотентный оператор. Покажите, что оператор $\mathrm{ad}_x \colon \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ также нильпотентен.* Указание: *запишите $\mathrm{ad}_x = l_x + r_{-x}$, как в доказательстве леммы 2.1.6.6.*

Определение 2.2.2.2. Оператор $x \in \mathrm{End}(V)$ называется **ad-нильпотентным**, если ad_x нильпотентен.

Упражнение 2.2.2.1 говорит, что из нильпотентности следует ad-нильпотентность. Отметим, что обратное неверно: матрица может быть ad-нильпотентной, но не нильпотентной (например, если эта матрица диагональна).

Теорема 2.2.2.3 (Энгеля). *Пусть $L \leqslant \mathfrak{gl}(V)$ — линейная алгебра Ли, состоящая из нильпотентных операторов, и $V \neq 0$. Тогда найдется ненулевой вектор $v \in V$ такой, что $Lv = 0$.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по $\dim(L)$. Если $\dim(L) \leqslant 1$, утверждение очевидно. Пусть теперь $\dim(L) > 1$. Рассмотрим в L максимальную собственную подалгебру K. Заметим, что K действует на L посредством присоединенного представления:

$$K \hookrightarrow L \xrightarrow{\mathrm{ad}} \mathfrak{gl}(L)$$

Упражнение 2.2.2.1 говорит, что каждый оператор этого действия нильпотентен. Более того, K действует и на фактор-пространстве L/K:

$$i \colon K \to \mathfrak{gl}(L/K).$$

Размерность K меньше размерности L, поэтому к этому действию можно применить предположение индукции; получаем, что существует вектор $x + K \in L/K$, отличный от $0 + K$, такой, что $i(K)(x + K) = 0 + K$. Это означает, что $[y, x] \in K$ для всех $y \in K$, и $x \notin K$. Поэтому x лежит в нормализаторе $N_L(K)$ алгебры K, но не лежит в K. В силу максимальности K получаем, что $N_L(K) = L$, то есть, K является идеалом в L.

Если $\dim(L/K) > 1$, можно выбрать в L/K произвольную одномерную подалгебру; ее прообраз в L будет собственной подалгеброй, содержащей K, что снова противоречит максимальности K. Поэтому $\dim(L/K) = 1$. Запишем $L = K + kz$ для произвольного элемента $z \in L \backslash K$.

Рассмотрим пространства $W = \{v \in V \mid K \cdot v = 0\}$. Применим к K предположение индукции; получим, что пространство W ненулевое. Оно инвариантно относительно L: действительно, если $x \in L$, $y \in K$, $w \in W$, то $y(xw) = x(yw) - [x, y]w = 0$. Поэтому можно рассмотреть действие нильпотентного оператора z на W. У него есть собственный вектор, то есть, $v \in W$ такой, что $zv = 0$. Мы получили, что $Kv = 0$ и $zv = 0$; поэтому и $Lv = 0$, что и требовалось. $\square$

Теорема 2.2.2.4 (Энгеля). *Пусть $L \leqslant \mathfrak{gl}(V)$ — линейная алгебра Ли, состоящая из нильпотентных операторов. Тогда найдется базис V, в котором L состоит из строго верхнетреугольных матриц.*

Доказательство. Действуем индукцией по $\dim(V)$. Случай $\dim(V)=1$ очевиден. По теореме 2.2.2.3 найдется $v \in V$ такой, что $Lv = 0$. Рассмотрим индуцированное действие алгебры L на пространстве V/kv. Оно, разумеется, состоит из нильпотентных операторов. По предположению индукции в пространстве V/kv найдется базис, в котором все матрицы этого действия верхнетреугольны. Выберем прообраз этого базиса в V и припишем к нему в качестве первого вектора v. Нетрудно видеть, что получится искомый базис пространства V. □

Теорема 2.2.2.5 (Энгеля). *Если все элементы алгебры Ли* L ad-*нильпотентны, то* L *нильпотентна.*

Доказательство. Можно считать, что $L \neq 0$ и действовать индукцией по $\dim(L)$. Рассмотрим присоединенное представление

$$L \xrightarrow{\mathrm{ad}} \mathfrak{gl}(L).$$

Алгебра $\mathrm{ad}(L) \leqslant \mathfrak{gl}(L)$ удовлетворяет условию теоремы 2.2.2.3. Поэтому в L найдется такой вектор $x \neq 0$, что $[L, x] = 0$. Это означает, что $x \in Z(L) \neq 0$. Алгебра $L/Z(L)$ состоит, очевидно, из ad-нильпотентных элементов, и ее размерность меньше, чем размерность L. По предположению индукции $L/Z(L)$ нильпотентна. Из предложения 2.2.1.7 теперь следует, что и L нильпотентна. □

2.2.3. Разрешимые алгебры Ли.

Определение 2.2.3.1. Пусть L — алгебра Ли. Определим индуктивно **производный ряд**

$$D_0(L) = L, \quad D_1(L) = [L, L], \quad D_n(L) = [D_{n-1}(L), D_{n-1}(L)].$$

Очевидно (?!), что $D_n(L)$ является характеристическим идеалом в L для всех натуральных n.

Определение 2.2.3.2. Алгебра Ли L называется **разрешимой**, если существует n такое, что $D_n(L) = 0$. Наименьшее такое n называется **степенью разрешимости** алгебры L.

Упражнение 2.2.3.3. *Покажите, что* $D_n(L) \leqslant C_n(L)$. *Поэтому любая нильпотентная алгебра Ли является разрешимой.*

Пример 2.2.3.4. Алгебра $\mathfrak{b}(n, k)$ верхнетреугольных матриц является разрешимой, но не нильпотентной.

Упражнение 2.2.3.5. *Любая подалгебра разрешимой алгебры разрешима. Любая фактор-алгебра разрешимой алгебры разрешима.*

Предложение 2.2.3.6. *Пусть* L *— алгебра Ли.*

1. *Если* I *— разрешимый идеал в* L*, и алгебра* L/I *разрешима, то и алгебра* L *разрешима.*

2. *Если* $I, J \trianglelefteq L$ *— разрешимые идеалы в* L*, то и их сумма* $I + J$ *разрешима.*

Доказательство. 1. Пусть $D_n(L/I) = 0$. Рассмотрим каноническую проекцию $\pi\colon L \to L/I$. Очевидно, что $\pi(D_n(L)) = D_n(L/I)$. Поэтому $D_n(L) \subseteq I$. Если $D_m(I) = 0$, то $D_{n+m}(L) = D_m(D_n(L)) \subseteq D_m(I) = 0$.

2. По теореме о гомоморфизме
$$\frac{I+J}{J} = \frac{I}{I \cap J}.$$
Правая часть разрешима в силу разрешимости I. Поэтому J — разрешимый идеал в $I + J$, фактор по которому разрешим, и можно применить первый пункт.

$\square$

2.2.4. Теорема Ли. Начиная с этого места мы будем всегда считать, что $\operatorname{char} k = 0$.

Напомним, что теорема Энгеля 2.2.2.3 утверждает, что если алгебра Ли состоит из нильпотентных эндоморфизмов, то у них есть общий собственный вектор. Теорема Ли в некотором смысле является аналогом теоремы Энгеля: у эндоморфизмов разрешимой алгебры есть общий собственный вектор. Однако, в нильпотентном случае это был вектор, соответствующий нулевому собственному числу, а в разрешимом случае собственное число может оказаться любым. Поэтому основное поле должно быть алгебраически замкнутым.

Теорема 2.2.4.1 (Ли)**.** *Пусть L — разрешимая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$. Если $V \neq 0$, то V содержит общий собственный вектор для всех эндоморфизмов из L.*

Доказательство. Попытаемся повторить доказательство теоремы 2.2.2.3. Мы действуем индукцией по $\dim(L)$. Для этого нужно

1. найти в L идеал K коразмерности 1;

2. воспользоваться предположением индукции и получить, что для K существуют общие собственные векторы;

3. проверить, что L сохраняет подпространство, натянутое на такие векторы;

4. выбрать $z \in L \backslash K$ и найти в этом подпространстве собственный вектор для z.

Проделаем эти шаги для разрешимой алгебры $L \leqslant \mathfrak{gl}(V)$.

1. Из разрешимости L следует, что $L \neq [L, L]$. Алгебра $L/[L, L]$ абелева, поэтому в ней любое подпространство является идеалом. Выбрав подпространство коразмерности 1 и рассмотрев его прообраз в K, получим идеал коразмерности 1 в L.

2. Подалгебра K в L разрешима. Если $K = 0$, то L абелева, и потому можно завершить доказательства, взяв произвольный ненулевой вектор в качестве собственного. Если же $K \neq 0$, можно применить предположение индукции, и найти общий собственный вектор v для элементов K. Это означает, что $xv = \lambda(x)v$ для всех $x \in K$, где $\lambda\colon K \to k$ — некоторая функция. Очевидно, что λ линейна. Для такой функции λ обозначим через W подпространство
$$\{w \in V \mid xw = \lambda(x)w \text{ для всех } x \in K\}.$$
При этом $v \in W$, так что $W \neq 0$.

3. Покажем, что L сохраняет подпространство W. Пусть $w \in W$, $x \in L$. Мы хотим показать, что $xw \in W$, то есть, что $yxw = \lambda(y)xw$ для всех $y \in K$. С другой стороны, $yxw = xyw - [x, y]w$. При этом $yw = \lambda(y)w$, поскольку $y \in K$, и $[x, y]w = \lambda([x, y])w$, поскольку $[x, y] \in K$ (K является идеалом в L). Таким образом, нужно показать, что $x\lambda(y)w - \lambda([x, y])w = \lambda(y)xw$. Покажем, что на самом деле $\lambda([x, y]) = 0$.

   Для этого посмотрим на циклическое подпространство относительно x, порожденное вектором w, то есть, на линейную оболочку векторов w, xw, x^2w, ... Пусть n —

его размерность. Это означает, что векторы $w, xw, \dots, x^{n-1}w$ линейно независимы. Пусть $W_i = \langle w, xw, \dots, x^{i-1}w$; тогда $\dim(W_i) = i$ для всех $i = 0, \dots, n$, и указанное циклическое подпространство совпадает с W_n. Любой элемент из K оставляет на месте все подпространства W_i (это следует из тождества $yxw = xyw - [x,y]w$ для $y \in K$). Покажем, что в базисе $w, xw, \dots, x^{n-1}w$ пространства W_n элемент $y \in K$ представляется верхнетреугольной матрицей с $\lambda(y)$ на диагонали. Для этого нужно доказать, что

$$yx^iw \equiv \lambda(y)x^iw \pmod{W_i}$$

Докажем это сравнение индукцией по i. База: $i = 0$, $y \in K$, и потому $yw = \lambda(y)w$.

Переход:

$$yx^iw = (yx)x^{i-1}w = (xy)x^{i-1}w - [x,y]x^{i-1}w.$$

По предположению индукции

$$yx^{i-1}w = \lambda(y)x^{i-1}w + w'$$

для некоторого $w' \in W_{i-1}$. При этом $xw' \in W_i$ по определению подпространств W_i, и $[x,y] \in K$, откуда $[x,y]x^{i-1}w \in W_i$. Переход доказан.

Таким образом, матрица ограничения эндоморфизма $y \in K$ на W_n имеет след $n\lambda(y)$. В частности, и матрица элемента $[x,y]|_{W_n}$ имеет след $n\lambda([x,y])$. С другой стороны, W_n инвариантно относительно x и относительно y, и потому $[x,y]$ должен иметь след 0. Поэтому $\lambda([x,y]) = 0$, что и требовалось.

4. Запишем $L = K + \langle z \rangle$ для произвольного $z \in L \setminus K$. Мы показали, что подпространство W инвариантно относительно действия L. У эндоморфизма $z|_W$ есть собственный вектор $v_0 \in W$, и потому v_0 является собственным вектором для всей алгебры L.

□

Теорема 2.2.4.2 (Теорема Ли). *Пусть L — разрешимая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$. Тогда в некотором базисе пространства V матрицы всех элементов L верхнетреугольны.*

Доказательство. Следует из теоремы 2.2.4.1 индукцией по $\dim V$. □

Следствие 2.2.4.3. *Пусть алгебра L разрешима. Тогда существует цепочка*

$$0 = L_0 \leqslant L_1 \leqslant L_2 \leqslant \dots \leqslant L_n = L$$

идеалов в L такая, что $\dim(L_i) = i$.

Доказательство. Пусть $\varphi \colon L \to \mathfrak{gl}(L)$ — присоединенное представление алгебры L. По упражнению 2.2.3.5 образ $\varphi(L)$ разрешим, и по теореме 2.2.4.2 сохраняет некоторый полный флаг подпространств в L. Этот флаг и является нужной цепочкой идеалов. □

Следствие 2.2.4.4. *Пусть алгебра L разрешима. Тогда каждый элемент $[L,L]$ является ad-нильпотентным. Как следствие, $[L,L]$ — нильпотентная алгебра.*

Доказательство. Выберем флаг идеалов как в следствии 2.2.4.3, и базис $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в L такой, что $L_i = \langle x_1, \dots, x_i \rangle$. В силу инвариантности L_i все матрицы вида ad_x верхнетреугольны относительно этого базиса. Поэтому матрицы вида $[ad_x, \mathrm{ad}_y] = \mathrm{ad}_{[x,y]}$ являются строго верхнетреугольными. Это означает, что ad_x нильпотентен (на L) при $x \in [L,L]$; он остается нильпотентным и при ограничении на $[L,L]$. Из этого следует, что алгебра $[L,L]$ нильпотентна (теорема Энгеля 2.2.2.5). □

2.2.5. Разложение Жордана–Шевалле. Пусть k — алгебраически замкнутое поле, V — векторное пространство над k. Напомним, что у эндоморфизма $x \in \mathrm{End}(V)$ имеется *жорданова форма*: существует базис, в котором матрица этого эндоморфизма является суммой жордановых блоков; в каждом блоке на диагонали стоит собственное число, а над диагональю — единицы. Каждый такой блок можно представить в виде суммы диагональной и нильпотентной матрицы:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Более того, поскольку первое слагаемое является не просто диагональной матрицей, а скалярной, то эти слагаемые коммутируют. Собирая вместе диагональные и нильпотентные части различных блоков, получаем, что x в выбранном базисе представляется в виде суммы диагональной и нильпотентной матрицы, которые коммутируют между собой.

Отметим, что свойство матрицы быть нильпотентной не зависит от выбора базиса. Свойство быть диагональной зависит, поэтому разумно ввести следующее понятие: назовем эндоморфизм $x \in \mathrm{End}(V)$ **полупростым**, если он диагонализуем. Хорошо известно, что два коммутирующих полупростых эндоморфизма можно диагонализовать одновременно, поэтому их сумма и разность снова полупросты.

Теорема 2.2.5.1 (Разложение Жордана–Шевалле). *Пусть $x \in \mathrm{End}(V)$. Тогда*

1. *существуют единственные элементы $x_s, x_n \in \mathrm{End}(V)$ такие, что $x = x_s + x_n$, x_s полупрост, x_n нильпотентен, и $x_s x_n = x_n x_s$;*
2. *существуют многочлены $p(t)$, $q(t)$ от одной переменной без свободного члена такие, что $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$.*
3. *если $y \in \mathrm{End}(V)$ коммутирует с x, то он коммутирует с x_s и с x_n;*
4. *если $U' \leqslant U \leqslant V$ — подпространства в V такие, что $x(U) \leqslant U'$, то $x_s(U) \leqslant U'$ и $x_n(U) \leqslant U'$.*

Доказательство. Пусть характеристический многочлен x равен

$$\chi_x(t) = \prod_{i=1}^{s} (t - \lambda_i)^{m_i},$$

так что $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — попарно различные собственные числа эндоморфизма x. Обозначим через V_i корневое подпространство, соответствующее λ_i:

$$V_i = \ker(x - \lambda_i \,\mathrm{id})^{m_i}.$$

Из курса линейной алгебры мы знаем, что $V = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i$, и каждое V_i инвариантно относительно x. При этом характеристический многочлен ограничения x на V_i равен $\chi_{x|_{V_i}}(t) = (t - \lambda_i)^{m_i}$. Такие многочлены для различных i взаимно просты. По китайской теореме об остатках найдется многочлен $p(t)$ такой, что $p(t) \equiv \lambda_i \pmod{(t - \lambda_i)^{m_i}}$ для всех $i = 1, \dots, s$ и $p(t) \equiv 0 \pmod{t}$ (если среди собственных чисел λ_i есть нулевое, то последнее условие излишне: оно следует из уже выписанных). Пусть $q(t) = t - p(t)$. Очевидно, что у многочленов q и p нет свободного члена. Положим $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. Это многочлены от

x, потому они коммутируют друг с другом и с любым эндоморфизмом $y \in \mathrm{End}(V)$, который коммутирует с x. Кроме того, они оставляют инвариантными те подпространства в V, которые инвариантны относительно x. В частности, $x_s(V_i) \subseteq V_i$. Из сравнения $p(t) \equiv \lambda_i \pmod{(t-\lambda_i)^{m_i}}$ получаем, что $(x_s - \lambda_i \,\mathrm{id})|_{V_i} = 0$. Поэтому x_s полупрост, и все собственные значения $x_n = x - x_s$ равны 0. Значит, x_n нильпотентен. Проверим единственность разложения: если $x = x_s + x_n = x_s' + x_n'$, то $x_s - x_s' = x_n' - x_n$. При этом все эндоморфизмы в этом равенстве коммутируют между собой. Поэтому $x_s - x_s'$ полупрост, а $x_n' - x_n$ нильпотентен. Но одновременно полупростым и нильпотентным может быть лишь нулевой эндоморфизм. Остальные утверждения очевидны. □

Следствие 2.2.5.2. *Пусть* $x \in \mathrm{End}(V)$, $x = x_s + x_n$ *— разложение Жордана–Шевалле. Тогда* $\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{x_s} + \mathrm{ad}_{x_n}$ *— разложение Жордана–Шевалле для* ad_x.

Доказательство. Из упражнения 2.2.2.1 следует, что оператор ad_{x_n} нильпотентен. Покажем, что ad_{x_s} полупрост. Выберем базис, в котором матрица x_s диагональна, и на диагонали стоит $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тогда легко видеть, что в стандартном базисе (e_{ij}) пространства $M(n,k)$ $\mathrm{ad}_{x_s}(e_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)e_{ij}$. Поэтому матрица ad_{x_s} в этом базисе диагональна.

Наконец, ad_{x_n} и ad_{x_s} коммутируют, поскольку $[\mathrm{ad}_{x_s}, \mathrm{ad}_{x_n}] = \mathrm{ad}_{[x_s,x_n]} = 0$. Осталось воспользоваться единственностью разложения Жордана–Шевалле. □

Предложение 2.2.5.3. *Пусть* A *— конечномерная алгебра над* k. *Тогда* $\mathrm{Der}(A)$ *является подалгеброй Ли в* $\mathfrak{gl}(A)$, *которая содержит полупростые и нильпотентные части всех своих элементов.*

Доказательство. Пусть $D \in \mathrm{Der}(A)$ и $D = S + N$ для полупростого $S \in \mathfrak{gl}(A)$ и нильпотентного $N \in \mathfrak{gl}(A)$. Покажем, что $S \in \mathrm{Der}(A)$. Обозначим через A_λ корневое подпространство для оператора D, соответствующее собственному числу λ:

$$A_\lambda = \{x \in A \mid (D - \lambda\,\mathrm{id})^k x = 0 \text{ для некоторого } k\}.$$

Тогда A является прямой суммой подпространств A_λ, соответствующих собственным значениям D. На каждом подпространстве A_λ оператор S действует как умножение на λ. Если $\lambda, \mu \in k$, то

$$(D - (\lambda+\mu)\,\mathrm{id})^n(xy) = \sum_{i=0}^{n} ((D - \lambda\,\mathrm{id})^{n-i}(x))((D - \mu\,\mathrm{id})^i(y))$$

для всех $x, y \in A$. Из этой формулы следует, что если $x \in A_\lambda$, $y \in A_\mu$, то $xy \in A_{\lambda+\mu}$. Поэтому $S(xy) = (\lambda+\mu)xy$; в то же время, и $S(x)y + xS(y) = \lambda xy + \mu xy = (\lambda+\mu)xy$. Поэтому S является дифференцированием, как и $N = D - S$. □

2.3 Полупростые алгебры Ли

2.3.1. Критерий Картана.

Лемма 2.3.1.1. *Пусть* $A \leqslant B \leqslant \mathfrak{gl}(V)$ *— два подпространства в* $\mathfrak{gl}(V)$. *Обозначим* $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, B] \subseteq A\}$. *Предположим, что* $x \in M$ *таков, что* $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ *для всех* $y \in M$. *Тогда* x *нильпотентен.*

Доказательство. Пусть $x = s + n$ — разложение Жордана для x. Выберем базис в V, в котором матрица s имеет вид $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Пусть L — векторное $\mathbb{Q}$-подпространство в k, порожденное $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Покажем, что на самом деле $L = 0$, и потому $s = 0$. Для этого покажем, что двойственное пространство $L^* = \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Q})$ нулевое. Пусть $f\colon L \to$

$\mathbb{Q}$ — линейное отображение, и $y \in \mathfrak{gl}(V)$ — элемент, матрица которого в нашем базисе равна $\mathrm{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))$. Матрица ad_s в соответствующем базисе пространства $\mathfrak{gl}(V)$ диагональна и на диагонали там стоят числа $\lambda_i - \lambda_j$; матрица ad_y также диагональна, и на диагонали стоят $f(\lambda_i) - f(\lambda_j)$. Пусть $g(T) \in k(t)$ — многочлен, удовлетворяющий условиям $g(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i) - f(\lambda_j)$. Тогда $\mathrm{ad}_y = g(\mathrm{ad}_s)$.

По следствию 2.2.5.2 ad_s — полупростая часть элемента ad_x, и потому является многочленом от ad_x без свободного члена. Поэтому и ad_y — многочлен от ad_x без свободного члена. По условию $\mathrm{ad}_x(B) \subseteq A$, потому и $\mathrm{ad}_y(B) \subseteq A$, откуда $y \in M$. Мы предположили, что $\mathrm{Tr}(xy) = 0$, откуда $\sum \lambda_i f(\lambda_i) = 0$. Применяя f, получаем, что $\sum f(\lambda_i)^2 = 0$. Отсюда все $f(\lambda_i)$ равны нулю, и f — нулевая функция. □

Упражнение 2.3.1.2. *Если* $x, y, z \in \mathrm{End}(V)$, *то* $\mathrm{Tr}([x, y]z) = \mathrm{Tr}(x[y, z])$.

Теорема 2.3.1.3 (Критерий Картана). *Пусть* $L \leqslant \mathfrak{gl}(V)$ *— линейная алгебра Ли. Предположим, что* $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ *при всем* $x \in [L, L]$, $y \in L$. *Тогда* L *разрешима.*

Доказательство. Применим лемму 2.3.1.1 к случаю $A = [L, L]$, $B = L$. Тогда $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, L] \subseteq [L, L]\}$. Очевидно, что $L \subseteq M$. По условию $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ при $x \in [L, L]$, $y \in L$. Но для применения леммы нужно знать, что это так при всех $x \in [L, L]$, $y \in M$. Пусть $x_1, x_2 \in L$, $y \in M$. Из упражнения 2.3.1.2 следует, что $\mathrm{Tr}([x_1, x_2]y) = \mathrm{Tr}(x_1[x_2, y]) = \mathrm{Tr}([x_2, y]x_1)$; по определению M теперь $[x_2, y] \in [L, L]$, и потому правая часть равна нулю.

Применяя лемму 2.3.1.2, получаем, что x нильпотентен. По упражнению 2.2.2.1 он является ad-нильпотентным, и по теореме Энгеля 2.2.2.5 алгебра $[L, L]$ нильпотентна. Из этого нетрудно получить, что L разрешима. □

Следствие 2.3.1.4. *Пусть* L *— такая алгебра Ли, что* $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y) = 0$ *для всех* $x \in [L, L]$, $y \in L$. *Тогда* L *разрешима.*

Доказательство. Применим критерий Картана 2.3.1.3 к присоединенному представлению $\mathrm{ad}\colon L \to \mathfrak{gl}(L)$. Получим, что $\mathrm{ad}(L)$ разрешима. Очевидно, что идеал $\ker(\mathrm{ad}) = Z(L)$ разрешим, и по предложению 2.2.3.6 алгебра L разрешима. □

2.3.2. Форма Киллинга.

Определение 2.3.2.1. Пусть L — алгебра Ли. Билинейная форма $B\colon L \times L \to k$ называется **ассоциативной**, если

$$B([x, y], z) = B(x, [y, z])$$

для всех $x, y, x \in L$.

Пример 2.3.2.2. Пусть $\pi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление L. Рассмотрим форму $B_\pi(x, y) = \mathrm{Tr}(\pi(x) \circ \pi(y))$. Нетрудно видеть, что это симметричная билинейная форма. Ее ассоциативность следует из упражнения 2.3.1.2.

В случае $\pi = \mathrm{ad}$ полученная симметричная билинейная форма B_{ad} на L называется **формой Киллинга**: $B_{\mathrm{ad}}(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)$.

Лемма 2.3.2.3. *Пусть* L *— алгебра Ли,* $I \trianglelefteq L$. *Тогда форма Киллинга на идеале* I *(рассматриваемом как алгебра Ли) совпадает с ограничением формы Киллинга алгебры* L *на подпространство* I.

Доказательство. Пусть $x, y \in I$; тогда $\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y$ — эндоморфизм, отображающий L в I. Поэтому его след совпадает со следом эндоморфизма $(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)|_I$. Действительно, выберем произвольный базис $v_1, \dots, v_m$ в I и дополним его до базиса L векторами $v_{m+1}, \dots, v_n$. Тогда матрица $\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y$ имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и сумма ее диагональных элементов равна сумме диагональных элементов левого верхнего блока. $\square$

Определение 2.3.2.4. Напомним, что **радикалом** симметричной билинейной формы φ на пространстве L называется подпространство $\mathrm{Rad}_\varphi = L^\perp = \{x \in L \mid \varphi(x, y) = 0 \text{ для всех } y \in L\}$. Форма φ называется **невырожденной**, если ее радикал нулевой.

Замечание 2.3.2.5. Пусть φ — произвольная ассоциативная форма на алгебре Ли L. Заметим, что если $x \in \mathrm{Rad}_\varphi$, $y \in L$, то $\varphi([x, y], z) = \varphi(x, [y, z]) = 0$ для всех $z \in L$, и потому $[x, y] \in \mathrm{Rad}_\varphi$. Это значит, что Rad_φ является идеалом алгебры L. В частности, это так для формы Киллинга.

2.3.3. Критерий полупростоты.

Определение 2.3.3.1. Пусть L — алгебра Ли. Рассмотрим ее максимальный разрешимый идеал I (то есть, разрешимый идеал, не содержащийся ни в каком другом разрешимом идеале). Если J — произвольный разрешимый идеал в L, то (по предложению 2.2.3.6) $J + I$ разрешим и содержит I; поэтому $J + I = I$ и, следовательно, $J \subseteq I$. Значит, в L есть единственный максимальный разрешимый идеал; он называется **радикалом** алгебры L и обозначается через $\mathrm{Rad}(L)$. Алгебра Ли L называется **полупростой**, если ее радикал $\mathrm{Rad}(L)$ равен нулю.

Лемма 2.3.3.2. *Алгебра L полупроста тогда и только тогда, когда в ней нет ненулевых абелевых идеалов.*

Доказательство. Любой абелев идеал разрешим, и потому лежит в $\mathrm{Rad}(L)$. Обратно, если $\mathrm{Rad}(L) \neq 0$, то последний ненулевой член производного ряда для $\mathrm{Rad}(L)$ является абелевым идеалом в L. $\square$

Теорема 2.3.3.3 (Критерий полупростоты). *Пусть L — ненулевая алгебра Ли. Алгебра L полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга невырожденна.*

Доказательство. Пусть φ — форма Киллинга на L. Предположим, что $\mathrm{Rad}(L) = 0$. По определению радикала $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y) = 0$ при всех $x \in \mathrm{Rad}_\varphi$, $y \in L$. По критерию Картана (теорема 2.3.1.3) подалгебра $\mathrm{ad}(\mathrm{Rad}_\varphi)$ разрешима; потому и Rad_φ разрешима. С другой стороны, Rad_φ — идеал в L, и потому $\mathrm{Rad}_\varphi \subseteq \mathrm{Rad}(L) = 0$, и φ невырожденна.

Обратно, предположим, что $\mathrm{Rad}_\varphi = 0$. По лемме 2.3.3.2 достаточно показать, что в L нет ненулевых абелевых идеалов. Пусть $I \trianglelefteq L$ — такой идеал, $x \in I$, $y \in L$. Рассмотрим отображение $(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)^2 \colon L \to L$. Нетрудно видеть, что его образ содержится в $[I, I] = 0$. Поэтому $\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y$ нильпотентен, и его след $\varphi(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)$ нулевой. Значит, $I \subseteq S = 0$. $\square$

Пример 2.3.3.4. Пусть $L = \mathfrak{sl}(2, k)$, $V = k^2$ — стандартное представление, то есть, $\varphi \colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ — тождественное отображение. В L можно выбрать базис

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3.4. Разложение в сумму простых идеалов. Заметим, что если алгебра Ли L является прямой суммой подпространств $I_1, \dots, I_r$, каждое из которых является идеалом в L, то $[I_i, I_j] \subseteq I_i \cap I_j = 0$ для всех $i \neq j$. Поэтому алгебра Ли L является прямой суммой алгебр Ли $I_1, \dots, I_r$ (в смысле определения 2.1.3.8).

Теорема 2.3.4.1. *Пусть алгебра L полупроста. Тогда она является прямой суммой некоторых своих простых идеалов $L_1, \dots, L_r$. Любой простой идеал алгебры L совпадает с одним из L_i.*

Доказательство. Обозначим через φ форму Киллинга на L. Пусть $I \trianglelefteq L$ — произвольный идеал. Рассмотрим множество $I^\perp = \{x \in L \mid \varphi(x, y) = 0 \text{ для всех } y \in I\}$. Если $x \in I^\perp$, $y \in L$, то $\varphi([x, y], z) = \varphi(x, [y, z]) = 0$ для всех $z \in I$, и поэтому $[x, y] \in I^\perp$. Это означает, что $I^\perp$ является идеалом в L.

Посмотрим на I как на алгебру Ли; в ней есть идеал $I \cap I^\perp$. Применяя критерий Картана, получаем, что он разрешим. С другой стороны, в L нет ненулевых разрешимых идеалов. Это значит, что $I \cap I^\perp = 0$, и потому $L = I \oplus I^\perp$.

Покажем индукцией по $\dim(L)$, что L раскладывается в прямую сумму простых идеалов. Если у L нет ненулевых собственных идеалов, то L проста и доказывать нечего. Иначе, пусть I — минимальный ненулевой идеал; мы показали, что $L = I \oplus I^\perp$. При этом любой идеал в I является идеалом в L. Поэтому алгебра I полупроста; то же самое можно сказать про алгебру $I^\perp$. По предположению индукции каждая из них раскладывается в прямую сумму простых идеалов, являющихся идеалами и в L. Поэтому такое разложение есть и для L.

Если теперь $I \trianglelefteq L$ — любой простой идеал, то $[I, L]$ — ненулевой идеал в I (поскольку $Z(L) = 0$). Поэтому $[I, L] = I$. С другой стороны, $I = [I, L] = [I, L_1] \oplus \dots \oplus [I, L_r]$. Поэтому все слагаемые, кроме одного, должны равняться нулю. Если же $I = [I, L_i]$, то $I = L_i$ в силу простоты L_i. □

Следствие 2.3.4.2. *Если алгебра L полупроста, то $[L, L] = L$. Все идеалы и гомоморфные образы алгебры L полупросты или равны нулю. Каждый идеал в L является суммой некоторых ее простых идеалов.*

Доказательство. Упражнение. □

2.3.5. Внутренние дифференцирования.

Лемма 2.3.5.1. *Пусть L — алгебра Ли. Рассмотрим ее присоединенное представление* $\mathrm{ad}\colon L \to \mathrm{Der}(L) \subseteq \mathfrak{gl}(L)$. *Его образ* $\mathrm{ad}(L)$ *является идеалом в* $\mathrm{Der}(L)$.

Доказательство. $[D, \mathrm{ad}_x] = \mathrm{ad}_{D(x)}$ для всех $D \in \mathrm{Der} L$, $x \in L$. □

Теорема 2.3.5.2. *Если алгебра L полупроста, то любое дифференцирование в ней является внутренним:* $\mathrm{ad}(L) = \mathrm{Der}(L)$.

Доказательство. Заметим, что $\ker(\mathrm{ad}) = Z(L) = 0$. Поэтому $L \to \mathrm{ad}(L)$ — изоморфизм алгебр Ли. Поэтому форма Киллинга на $\mathrm{ad}(L)$ невырожденна (теорема 2.3.3.3). По лемме 2.3.2.3 форма Киллинга на $\mathrm{ad}(L)$ является ограничением формы Киллинга на $\mathrm{Der}(L)$. Пусть $I = \mathrm{ad}(L)^\perp$ — подпространство в $\mathrm{Der}(L)$, ортогональное к $\mathrm{ad}(L)$. Тогда $I \cap \mathrm{ad}(L) = 0$. При этом I и $\mathrm{ad}(L)$ — идеалы в $\mathrm{Der}(L)$, и потому $[I, \mathrm{ad}(L)] = 0$. Если $D \in I$, $x \in L$, то $\mathrm{ad}(D(x)) = [D, \mathrm{ad}(x)] = 0$ в силу ортогональности. Из этого следует, что $D(x) = 0$ для всех $x \in L$, то есть, что $D = 0$. Получили, что $I = 0$, и $\mathrm{ad}(L) = \mathrm{Der}(L)$. □

2.3.6. Абстрактное разложение Жордана. Пусть L — полупростая алгебра Ли. Для каждого элемента $x \in L$ элемент $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{Der}(L) \subseteq \mathfrak{gl}(L)$ обладает разложением Жордана. По теореме 2.2.5.3 полупростая и нильпотентная части элемента ad_x снова лежат в $\mathrm{Der}(L)$ По теореме 2.3.5.2 они лежат в $\mathrm{ad}(L)$. Наконец, $\mathrm{ad}(L)$ изоморфна L, и потому найдутся элементы $s, n \in L$ такие, что $\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_s + \mathrm{ad}_n$ — разложение Жордана элемента ad_x. Нетрудно видеть, что при этом $x = s+n$, $[s, n] = 0$, элемент s является ad-*полупростым* (то есть, ad_s полупрост), а элемент n является ad-нильпотентным. Мы будем называть $s = x_s$ и $n = x_n$ *полупростой частью* и *нильпотентной частью* элемента x. Разложение $x = x_s + x_n$ называется **абстрактным разложением Жордана**.

Обозначения x_s, x_n двусмысленны, если L — линейная алгебра Ли. Позже мы покажем, что полученное абстрактное разложение Жордана в таком случае согласовано с обычным разложением Жордана.

2.4 Представления полупростых алгебр

2.4.1. L*-модули.*

Определение 2.4.1.1. Пусть L — Векторное пространство над k вместе с билинейным отображением $L \times V \to V$, $(x, v) \mapsto xv$ называется L-модулем, если $[x, y](v) = x(yv) - y(xv)$ для всех $x, y \in L$, $v \in V$.

Пусть $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление алгебры Ли L. Определим отображение $L \times V \to V$ формулой $(x, v) \mapsto \varphi(x)(v)$. Нетрудно проверить, что оно превращает V в L-модуль. Обратно, если V — L-модуль, можно определить представление $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ формулой $\varphi(x)(v) = xv$. Таким образом, язык L-модулей полностью эквивалентен языку представлений алгебры L.

Определение 2.4.1.2. Гомоморфизмом L-модулей называется линейное отображение

$$f\colon V \to W$$

такое, что $f(xv) = x\varphi(v)$ для всех $v \in V$. Несложно определить (обычным образом) понятия подмодуля, фоктор-модуля, ядра и образа гомоморфизма L-модулей. L-модуль V называется **неприводимым**, если у него есть ровно два L-подмодуля: 0 и V. Модуль V называется **вполне приводимым**, если он является прямой суммой неприводимых L-подмодулей. Эти термины в равной степени применимы к представлениям.

Лемма 2.4.1.3 (Лемма Шура). *Пусть V, W — два неприводимых L-модуля. Если $f\colon V \to W$ — гомоморфизм L-модулей, то либо $f = 0$, либо f — изоморфизм.*

Доказательство. Предположим, что $f \neq 0$. Ядро гомоморфизма f является подмодулем в V, поэтому оно совпадает либо с V, либо с 0. Если оно совпадает с V, то f нулевой; поэтому ядро нулевое. Аналогично, образ f является подмодулем в W и потому совпадает либо с 0, либо с W. Если образ нулевой, то $f = 0$; поэтому образ равен W. Таким образом, f инъективен и сюръективен, а потому является изоморфизмом. □

Лемма 2.4.1.4 (Лемма Шура). *Пусть представление $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ неприводимо. Если $f \in \mathrm{End}(V)$ коммутирует со всеми отображениями $\varphi(x)$, то f является скаляром, то есть, имеет вид $\lambda\,\mathrm{id}_V$ для некоторого $\lambda \in k$.*

Доказательство. Рассмотрим V как L-модуль, соответствующий представлению φ. Тогда $f\colon V \to V$ является гомоморфизмом этого модуля в себя: действительно, из $f\circ\varphi(x) = \varphi(x)\circ f$

следует, что $f(\varphi(x)(v)) = \varphi(x)(f(v))$, что означает, что $f(xv) = xf(v)$ для всех $v \in V$. Поэтому и $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ — гомоморфизм L-модулей из V в себя. Возьмем в качестве λ какое-нибудь собственное число f; тогда $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ имеет нетривиальное ядро, и по лемме Шура из этого следует, что $f - \lambda\,\mathrm{id}_V = 0$. □

На L-модули можно перенести и стандартные конструкции новых модулей из старых: если V — L-модуль, то двойственное пространство $V^* = \mathrm{Hom}(V, k)$ можно превратить в L-модуль, положив $(xf)(v) = -f(xv)$ для всех $x \in L$, $f \in V^*$, $v \in v$. Если V, W — L-модули, то тензорное произведение $V \otimes W$ можно превратить в L-модуль: для $x \in L$, $v \in V$, $w \in W$ положим $x(v \otimes w) = (xv) \otimes w + v \otimes (xw)$. Заметим также, что $\mathrm{End}(V) \cong V \otimes V^*$, поэтому и $\mathrm{End}(V)$ можно сделать L-модулем. Эту структуру можно описать и явно: для $x \in L$, $f \in \mathrm{End}(V)$, $v \in V$ положим $(xf)(v) = x(f(v)) - f(xv)$.

2.4.2. Элемент Казимира представления.

Определение 2.4.2.1. Представление $L\colon \to \mathfrak{gl}(V)$ алгебры Ли L называется **точным**, если оно инъективно.

Лемма 2.4.2.2. *Пусть алгебра L полупроста, $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ — ее точное представление. Тогда симметрическая билинейная форма $\beta(x, y) = \mathrm{Tr}(\varphi(x)\varphi(y))$ на L невырожденна.*

Доказательство. Форма β ассоциативна (пример 2.3.2.2); поэтому ее радикал Rad_β является идеалом в L (замечание 2.3.2.5). К подалгебре $\varphi(\mathrm{Rad}_\beta)$ можно применить теорему Картана 2.3.1.3: действительно, $\mathrm{Tr}(ab) = 0$ для всех $a, b \in \mathrm{Rad}_\beta$. Поэтому алгебра $\varphi(\mathrm{Rad}_\beta)$ разрешима. Но $\varphi(\mathrm{Rad}_\beta) \cong \mathrm{Rad}_\beta$; поэтому Rad_β — разрешимый идеал в L. Из полупростоты L теперь следует, что $\mathrm{Rad}_\beta = 0$. □

Пусть L — полупростая алгебра, $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ — ее точное представление; обозначим через $\beta(x, y) = \mathrm{Tr}(\varphi(x)\varphi(y))$ соответствующую невырожденную ассоциативную форму. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — некоторый базис L, и $y_1, \ldots, y_n$ — двойственный к нему относительно формы β. Положим

$$c_\varphi = \sum_i \varphi(x_i)\varphi(y_i) \in \mathrm{End}(V).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
[\varphi(x), c_\varphi] &= \sum_i [\varphi(x), \varphi(x_i)\varphi(y_i)] \\
&= \sum_i [\varphi(x), \varphi(x_i)] y_i + \sum_i \varphi(x_i)[\varphi(x), \varphi(y_i)].
\end{aligned}$$

Запишем $[x, x_i] = \sum_j a_{ij} x_j$ и $[x, y_i] = \sum_j b_{ij} y_j$. Тогда $\beta([x, x_i], y_k) = \sum_j a_{ij}\beta(x_j, y_k) = a_{ik}$; с другой стороны, $\beta([x, x_i], y_k) = \beta(-[x_i, x], y_k) = \beta(-x_i, [x, y_k]) = -\sum_j b_{kj}\beta(x_i, y_j) = -b_{ki}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
[\varphi(x), c_\varphi] &= \sum_i [\varphi(x), \varphi(x_i)]\varphi(y_i) + \sum_i \varphi(x_i)[\varphi(x), \varphi(y_i)] \\
&= \sum_{i,j} a_{ij}\,\varphi(x_j)\varphi(y_i) + \sum_{i,j} b_{ij}\,\varphi(x_i)\varphi(y_j) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Определение 2.4.2.3. Это означает, что $c_\varphi \in \mathrm{End}(V)$ коммутирует с $\varphi(L)$. Элемент c_φ называется **элементом Казимира** представления φ. Если представление φ неприводимо, то c_φ является скаляром (по лемме Шура 2.4.1.4); в этом случае c_φ не зависит от выбранного базиса в L.

Замечание 2.4.2.4. Заметим, что $\mathrm{Tr}(c_\varphi) = \sum_i \mathrm{Tr}(\varphi(x_i)\varphi(y_i) = \sum_i \beta(x_i, y_i)) = \dim(L)$. Для неприводимого представления, стало быть, $c_\varphi = \dim(L)/\dim(V)$.

Замечание 2.4.2.5. Если представление φ не точное (а алгебра L все еще полупроста), конструкцию элемента Казимира следует модифицировать. Тогда $\ker\varphi$ является суммой простых идеалов. Пусть L' — сумма остальных простых идеалов. Ограничение φ на L' является точным представлением, и можно построить элемент Казимира c_φ, коммутирующий с $\varphi(L) = \varphi(L')$.

2.4.3. Теорема Вейля.

Лемма 2.4.3.1. *Пусть $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление полупростой алгебры Ли L. Тогда $\varphi(L) \subseteq \mathfrak{sl}(V)$. В частности, любое действие L на одномерном пространстве тривиально.*

Замечание 2.4.3.2. Если алгебра L проста, то любое ее представление, кроме одномерного (с тривиальным действием L) и нулевого, является точным.

Теорема 2.4.3.3 (Вейля). *Пусть $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление полупростой алгебры Ли L, $V \neq 0$. Тогда φ вполне приводимо.*

Доказательство. Предположим, что в V имеется L-подмодуль W коразмерности один. По лемме 2.4.3.1 действие L на V/W тривиально. Получаем точную последовательность вида

$$0 \to W \to V \to k \to 0.$$

Покажем, что можно свести теорему к случаю неприводимого L-модуля W. Будем действовать индукцией по размерности W. Действительно, если W' — нетривиальный подмодуль в W, то имеется точная последовательность

$$0 \to W/W' \to V/W' \to k \to 0.$$

По предположению индукции в V/W' существует одномерный L-подмодуль (обозначим его через $\widetilde{W}/W'$), дополнительный к W/W'. То есть, существует точная последовательность

$$0 \to W' \to \widetilde{W} \to k \to 0$$

такого же вида, как изначальная. По индукции находим одномерный подмодуль X такой, что $\widetilde{W} = W' \oplus X$. С другой стороны, $V/W' = W/W' \oplus \widetilde{W}/W'$. Поэтому $V = W \oplus X$.

Теперь мы можем считать, что L-модуль W неприводим. Будем также считать, что представление L на V точно. Пусть $c = c_\varphi$ — элемент Казимира для φ. Поскольку c коммутирует с $\varphi(L)$, c является эндоморфизмом L-модуля V. В частности, $c(W) \subseteq W$, и $\ker(c)$ является L-подмодулем в V. Напомним, что действие V/W тривиально: $\varphi(L)(V) \subseteq W$. Поэтому и действие c на V/W тривиально, и c имеет нулевой след. С другой стороны, по лемме Шура 2.4.1.4 c действует как скаляр на неприводимом L-модуле W, и этот скаляр отличен от нуля (см. определение 2.4.2.3). Это означает, что $\ker(c)$ является одномерным L-подмодулем в V, пересечение которого с W тривиально. Мы нашли искомое дополнение к W.

Перейдем к рассмотрению общего случая: пусть W — нетривиальный подмодуль в V. Рассмотрим L-модуль $\mathrm{Hom}(V, W)$ линейных отображений из V в W. Обозначим через $\overline{V}$ подпространство в $\mathrm{Hom}(V, W)$, состоящее из тех отображений, ограничение которых на W является умножением на скаляр. Заметим, что $\overline{V}$ является L-подмодулем: если $f|_W = a \cdot 1_W$, $x \in L$, $w \in W$, то $(x \cdot f)(w) = x \cdot f(w) - f(x \cdot w) = a(x \cdot w) - a(x \cdot w) = 0$; откуда $(x \cdot f)|_W = 0$. Обозначим через $\overline{W}$ подпространство в $\overline{V}$, состоящее из тех отображений, ограничение которых на W нулевое. Предыдущая выкладка показывает, что $\overline{W}$ является L-подмодулем, и $L(\overline{V}) \subseteq \overline{W}$. При этом $\dim(\overline{V}/\overline{W}) = 1$, поскольку $f \in \overline{V}$ определяется скаляром $f|_W$ с точностью до элемента $\overline{W}$. Поэтому имеется точная последовательность

$$0 \to \overline{W} \to \overline{V} \to k \to 0.$$

Для этой ситуации выше мы показали, что в $\overline{V}$ имеет одномерный подмодуль, дополнительный к $\overline{W}$. Пусть он порождается отображением $f \colon V \to W$. После умножения на скаляр можно считать, что $f|_W = 1_W$. Заметим, что $L(f) = 0$ тогда и только тогда, когда $0 = (x \cdot f)(v) = x \cdot f(v) - f(x \cdot v)$, то есть, f является гомоморфизмом L-модулей. Поэтому $\ker(f)$ — подмодуль в V. При этом $f(V) \subseteq W$ и $f|_W = 1_W$; значит, $V = W \oplus \ker(f)$. □

Сейчас мы используем теорему Вейля, чтобы показать, что абстрактное разложение Жордана (в полупростой линейной алгебре Ли) согласовано с обычным. Более того, мы докажем, что разложение Жордана сохраняется в любом представлении.

Теорема 2.4.3.4. *Пусть $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ — полупростая линейная алгебра Ли. Тогда L содержит полупростые и нильпотентные части всех своих элементов при разложении в $\mathfrak{gl}(V)$. В частности, абстрактное разложение Жордана в L совпадает с обычным.*

Доказательство. Пусть $x \in L$, и $x = x_s + x_n$ — разложение Жордана в $\mathfrak{gl}(V)$. Мы должны доказать, что $x_s, x_n \in L$. Заметим, что $\mathrm{ad}_x(L) \subseteq L$. Поэтому (теорема 2.2.5.1) и $\mathrm{ad}_{x_s}(L) \subseteq L$, и $\mathrm{ad}_{x_n}(L) \subseteq L$. Это означает, что x_s, x_n лежат в нормализаторе L внутри $\mathfrak{gl}(V)$. Обозначим этот нормализатор через N. Если бы мы показали, что $N = L$, доказательство было бы закончено. Однако, это неверно: например, скаляры лежат в N, но не в L. Сейчас мы построим подалгебру в N, содержащую x_s и x_n, и покажем, что она совпадает с L. Для каждого L-подмодуля W в V положим

$$L_W = \{y \in \mathfrak{gl}(V) \mid y(W) \subseteq W \text{ и } \mathrm{Tr}(y|_W) = 0\}.$$

Очевидно, что $L \subseteq L_W$ для любого W. Пусть L' — пересечение подалгебры N со всеми подпространствами L_W. Очевидно, что L' — подалгебра в N, в которой L содержится как идеал. Кроме того, если $x \in L$, то x_s, x_n лежат в L_W, а потому и в L'.

Покажем, что $L' = L$. Алгебра L' является L-модулем, и по теореме Вейля 2.4.3.3 найдется L-подмодуль M такой, что $L' = L \oplus M$. Но $L' \subseteq N$, поэтому $[L, L'] \subseteq L$; значит, действие L на M тривиально. Пусть W — произвольный неприводимый L-подмодуль в V. Если $y \in M$, то $[L, y] = 0$; по лемме Шура 2.4.1.4 элемент y действует на W как умножение на скаляр. С другой стороны, $\mathrm{Tr}(y|_W) = 0$, поскольку $y \in L_W$. Поэтому $y(W) = 0$. По теореме Вейля L-модуль V является прямой суммой неприводимых L-подмодулей, поэтому $y = 0$, $M = 0$ и $L = L'$. □

Следствие 2.4.3.5. *Пусть L — полупростая алгебра Ли, $\varphi \colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ — ее представление. Если $x = s + n$ — абстрактное разложение Жордана элемента $x \in L$, то $\varphi(x) = \varphi(s) + \varphi(n)$ — обычное разложение Жордана элемента $\varphi(x)$.*

Доказательство. Алгебра L порождается собственными векторами отображения ad_s; поэтому $\varphi(L)$ порождается собственными векторами отображения $\mathrm{ad}_{\varphi(s)}$ на $\varphi(L)$. Значит, элемент $\mathrm{ad}_{\varphi(s)}$ полупрост на $\varphi(L)$. Аналогично, $\mathrm{ad}_{\varphi(n)}$ нильпотентен на $\varphi(L)$ и коммутирует с $\mathrm{ad}_{\varphi(s)}$. Поэтому $\varphi(x) = \varphi(s) + \varphi(n)$ — абстрактное разложение Жордана элемента $\varphi(x)$ в полупростой алгебре $\varphi(L)$. По теореме 2.4.3.4 оно совпадает с обычным. □

2.4.4. Представления $\mathfrak{sl}(2, k)$. Теперь мы готовы классифицировать все [конечномерные] представления алгебры $\mathfrak{sl}(2, k)$. С одной стороны, этот раздел служит первой иллюстрацией общего случая — классификации представлений полупростых алгебр Ли. С другой стороны, знание представлений $\mathfrak{sl}(2, k)$ необходимо для развития этой общей теории и классификации полупростых алгебр Ли.

В этом разделе $L = \mathfrak{sl}(2, k)$; мы выбираем в L стандартный базис $\{e, f, h\}$, где

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Структурные константы алгебры L в этом базисе выглядят так: $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$. Стандартное обозначение e здесь накладывается на традиционное обозначение единичной матрицы, но нам придется смириться с этим.

Пусть V — произвольный L-модуль. По следствию 2.4.3.5 полупростой элемент h действует на V диагонально в некотором базисе. Поэтому V раскладывается в прямую сумму собственных подпространств оператора h. Обозначим $V_\lambda = \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda v\}$ для всех $\lambda \in k$. Если $V_\lambda \neq 0$, скаляр λ называется **весом** элемента h в пространстве V, V_λ — **весовым подпространством**, а любой вектор из V_λ — **весовым вектором**.

Лемма 2.4.4.1. *Если* $v \in V_\lambda$, *то* $e \cdot v \in V_{\lambda+2}$ *и* $f \cdot v \in V_{\lambda-2}$. *Таким образом, e увеличивает вес вектора на 2, а f — уменьшает на 2.*

Доказательство. $h(ev) = [h, e]v + e(hv) = 2ev + e(\lambda v) = (\lambda + 2)ev$. Для f доказательство аналогично. □

Пусть теперь L-модуль V неприводим. Из конечномерности V следует, что существует такой $\lambda \in k$, что $V_\lambda \neq 0$ и $V_{\lambda+2} = 0$. Любой ненулевой вектор v_0 веса λ называется **вектором старшего веса**; при этом $ev_0 = 0$. Зафиксируем такой $v_0 \in V_\lambda$.

Лемма 2.4.4.2. *Положим* $v_{-1} = 0$, $v_i = \frac{1}{i!} f^i v_0$ *при* $i \geqslant 0$. *Тогда*

1. $ev_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$;
2. $fv_i = (i + 1)v_{i+1}$;
3. $hv_i = (\lambda - 2i)v_i$.

Доказательство. Второе равенство верно по определению. Третье немедленно вытекает из леммы 2.4.4.1. Докажем первое равенство по индукции. Случай $i = 0$ очевиден. Пусть теперь $i > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
iev_i &= efv_{i-1} \\
&= [e, f]v_{i-1} + fev_{i-1} \\
&= hv_{i-1} + fev_{i-1} \\
&= (\lambda - 2(i - 1))v_{i-1} + (\lambda - i + 2)fv_{i-2} \\
&= (\lambda - 2i + 2)v_{i-1} + (i - 1)(\lambda - i + 2)v_{i-2} \\
&= i(\lambda - i + 1)v_{i-1}.
\end{aligned}$$

□

Лемма 2.4.4.2 говорит, среди прочего, что различные ненулевые векторы v_i являются собственными векторами h с различными собственными числами. Поэтому они линейно независимы. Из конечномерности V следует, что найдется наименьшее натуральное число $m \geqslant 0$, для которого $v_m \neq 0$ и $v_{m+1} = 0$. Тогда $v_{m+i} = 0$ при всех $i > 0$. Из леммы 2.4.4.2 следует, что подпространство в V, натянутое на $v_0, \ldots, v_m$, является L-подмодулем в V. Из неприводимости теперь следует, что это подпространство совпадает с V. Матрицы образов e, f, h в базисе $v_0, \ldots, v_m$ выглядят так:

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 0 & m & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & m-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & m & 0 \end{pmatrix},$$

$$h \mapsto \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m-2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-4 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -m+4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -m+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

Заметим, что формула $ev_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$ при подстановке $i = m + 1$ превращается в $0 = (\lambda - m)v_m$. Из этого следует, что $\lambda = m$: старший вес нашего представления равен натуральному числу. При этом каждый вес имеет кратность 1 (то есть, размерность соответствующего весового подпространства равна единице). По представлению старший вес восстанавливается однозначно, поскольку $\lambda = m = \dim V - 1$.

Мы доказали, что любое неприводимое представление $L = \mathfrak{sl}(2, k)$ должно иметь указанный вид. Покажем, что для каждого $m \geqslant 1$ такое представление действительно существует. Рассмотрим кольцо $k[x, y]$ многочленов над k от двух переменных x, y. Пусть L действует на $k[x, y]$ следующими дифференцированиями: $e \cdot p(x, y) = y \cdot \frac{\partial p}{\partial x}(x, y)$, $f \cdot p(x, y) = x \cdot \frac{\partial p}{\partial y}(x, y)$, $h \cdot p(x, y) = [e, f]p(x, y) = e \cdot f \cdot p(x, y) - f \cdot e \cdot p(x, y)$. Нетрудно видеть, что $k[x, y]$ превращается в (бесконечномерный) L-модуль. При этом подпространство $k[x, y]_m$ однородных многочленов степени m с базисом $x^m, x^{m-1}y, \ldots, xy^{m-1}, y^m$ инвариантно относительно действия L и неприводимо со старшим весом m.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.4.4.3. *Пусть V — неприводимый $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуль. Тогда V является прямой суммой весовых подпространств V_μ, $\mu = m, m-2, \ldots, -(m-2), -m$, где $m = \dim V - 1$ и $\dim V_\mu = 1$ для всех μ. При этом старший вес равен m, и в V есть единственный (с точностью до скаляра) старший вектор. Существует ровно одно (с точностью до изоморфизма) неприводимое представление $\mathfrak{sl}(2, k)$ каждой возможной размерности $m + 1$ для $m = 0, 1, \ldots$.*

Следствие 2.4.4.4. *Пусть V — конечномерный $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуль. Тогда все собственные значения h на V целые, и кратность собственного значения n равна кратности значения $-n$. Количество слагаемых в разложении V в прямую сумму неприводимых равно $\dim V_0 + \dim V_1$.*

Доказательство. По теореме Вейля 2.4.3.3 любое [конечномерное] представление $\mathfrak{sl}(2,k)$ является прямой суммой неприводимых. При этом каждое неприводимое представление содержит одномерное слагаемое веса 0, если и только если m четно, и одномерное слагаемое веса 1, если и только если m нечетно. □

2.5 Разложение Картана

2.5.1. Торические подалгебры. Мы продолжаем изучать структуру полупростых алгебр. Пусть L — полупростая алгебра. Если L состоит только из ad-нильпотентных элементов, то она нильпотентна по теореме Энгеля 2.2.2.5. В противном случае найдется элемент $x \in L$, для которого $x_s \neq 0$. Подалгебра, состоящая из полупростых элементов, называется **торической**.

Лемма 2.5.1.1. *Любая торическая подалгебра в* L *абелева.*

Доказательство. Пусть T — торическая подалгебра в L. Покажем, что $\mathrm{ad}_x(T) = 0$ для всех $x \in T$. Поскольку ad_x диагонализуем, достаточно показать, что у $\mathrm{ad}_x|_T$ нет ненулевых собственных чисел. Пусть $[x,y] = \lambda y$ для ненулевого $y \in T$. Тогда $\mathrm{ad}_y(x) = -ay$ будет собственным вектором для ad_y с собственным значением 0. С другой стороны, если мы запишем x в базисе, в котором ad_y диагонально, то после применения ad_y к x должна остаться линейная комбинация только тех собственных векторов, которые соответствуют ненулевым собственным значениям y. Получили противоречие. □

Пусть H — некоторая максимальная (относительно включения) торическая подалгебра в L. По лемме 2.5.1.1 она абелева. Поэтому $\mathrm{ad}(H)$ — коммутирующее множество полупростых эндоморфизмов алгебры L. Их можно одновременно диагонализовать. Это означает, что L является прямой суммой подпространств вида

$$L_\alpha = \{x \in L \mid [h,x] = \alpha(h)x \text{ для всех } h \in H\},$$

где $\alpha \in H^*$. В частности, $L_0 = C_L(H) \supseteq H$. [Конечное] множество всех ненулевых элементов $\alpha \in H^*$, для которых $L_\alpha \neq 0$, обозначается Φ; его элементы называются **корнями** алгебры L относительно H. Мы получили **разложение Картана**

$$L = C_L(H) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha.$$

На самом деле, вскоре окажется (предложение 2.5.2.2), что $C_L(H) = H$. Более того, множество корней Φ (с некоторой структурой на нем) полностью описывает алгебру L.

Лемма 2.5.1.2. *Если* $\alpha, \beta \in H^*$*, то* $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$. *Если* $x \in L_\alpha$ *для* $\alpha \neq 0$*, то оператор* ad_x *нильпотентен. Если* $\alpha, \beta \in H^*$ *и* $\alpha + \beta \neq 0$*, то* $L_\alpha \perp L_\beta$ *относительно формы Киллинга на* L.

Доказательство. Если $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$, то для всех $h \in H$ выполнено $\mathrm{ad}_h([x,y]) = [[h,x],y] + [x,[h,y]] = \alpha(h)[x,y] + \beta(h)[x,y] = (\alpha+\beta)(h)[x,y]$. Второе утверждение вытекает из первого и конечности Φ. Наконец, пусть $(\alpha+\beta)(h) \neq 0$ для некоторого $h \in H$, а φ обозначает форму Киллинга на L. Если $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$, то $\varphi([h,x],y) = -\varphi([x,h],y) = -\varphi(x,[h,y])$. Поэтому $\alpha(h)\varphi(x,y) = -\beta(h)\varphi(x,y)$, откуда $(\alpha+\beta)(h)\varphi(x,y) = 0$. Значит, $\varphi(x,y) = 0$. □

Следствие 2.5.1.3. *Ограничение формы Киллинга на* $L_0 = C_L(H)$ *невырожденно.*

Доказательство. По теореме 2.3.3.3 форма φ невырожденна. По лемме 2.5.1.2 алгебра L_0 ортогональна к L_α для всех $\alpha \in \Phi$. Если элемент $z \in L_0$ ортогонален к L_0, то (поскольку он ортогонален ко всем L_α) он ортогонален ко всей алгебре L, откуда $z = 0$. □

2.5.2. Централизатор максимальной торической подалгебры.

Лемма 2.5.2.1. *Пусть* L *— нильпотентная алгебра Ли,* K *— ненулевой идеал в* L*. Тогда* $K \cap Z(L) \neq 0$*.*

Доказательство. Алгебра L действует на K посредством присоединенного представления. По теореме Энгеля 2.2.2.3 найдется ненулевой $x \in K$ такой, что $[L, x] = 0$, то есть, $x \in K \cap Z(L)$. □

Предложение 2.5.2.2. *Пусть* H *— максимальная торическая подалгебра в* L*. Тогда* $H = C_L(H)$*.*

Доказательство.

1. *Подалгебра* $C_L(H)$ *содержит полупростые и нильпотентные части своих элементов.* Действительно, по определению $x \in C_L(H)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{ad}_x(H) = 0$. По теореме 2.2.5.1 операторы $(\mathrm{ad}_x)_s$ и $(\mathrm{ad}_x)_n$ также обладают этим свойством. Согласно разделу 2.3.6 $(\mathrm{ad}_x)_s = \mathrm{ad}_{x_s}$ и $(\mathrm{ad}_x)_n = \mathrm{ad}_{x_n}$.

2. *Все полупростые элементы из* $C_L(H)$ *лежат в* H. Если x полупрост и коммутирует с H, то $H + \langle x \rangle$ является торической подалгеброй в L, и из максимальности H следует, что $x \in H$.

3. *Ограничение формы Киллинга* φ *на* H *невырожденно.* Пусть $\varphi(h, H) = 0$ для $h \in H$. Пусть $x \in C_L(H)$ нильпотентен; тогда для любого $y \in H$ эндоморфизм ad_y коммутирует с нильпотентным эндоморфизмом ad_x, и потому $\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y$ нильпотентен, откуда $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y) = 0$, то есть, $\varphi(x, H) = 0$. Из этого следует, что $h \perp C_L(H)$. Действительно, h ортогонален полупростой части любого элемента $C_L(H)$ по уже доказанному, и мы только что показали, что h ортогонален и его нильпотентной части. Но по следствию 2.5.1.3 ограничение φ на $C_L(H)$ невырожденно; поэтому $h = 0$.

4. *Алгебра* $C_L(H)$ *нильпотентна.* Если $x \in C_L(H)$ полупрост, то $x \in H$, и поэтому оператор $(\mathrm{ad}_x)|_C$ нулевой. Если $x \in C_L(H)$ нильпотентен, то $(\mathrm{ad}_x)|_C$ тоже нильпотентен. Наконец, для произвольного $x \in C_L(H)$ запишем $x = x_s + x_n$; мы знаем, что x_s, x_n лежат в $C_L(H)$, и потому ad_x равен сумме коммутирующих нильпотентных операторов. Поэтому ad_x нильпотентен. Осталось применить теорему Энгеля 2.2.2.5.

5. $H \cap [C_L(H), C_L(H)] = 0$. В самом деле, из ассоциативности формы Киллинга следует, что $\varphi(H, [C_L(H), C_L(H)]) = \varphi([H, C_L(H)], C_L(H)) = 0$. Но ограничение φ на H невырожденно.

6. *Алгебра* $C_L(H)$ *абелева.* Предположим, что $[C_L(H), C_L(H)] \neq 0$. Мы знаем, что $C_L(H)$ нильпотентна. Поэтому $[C_L(H), C_L(H)] \cap Z(C) \neq 0$. Пусть $z \neq 0$ лежит в этом пересечении. Если z полупрост, то $z \in H$, что противоречит тому, что $H \cap [C_L(H), C_L(H)] = 0$. Поэтому у z есть ненулевая нильпотентная часть z_n, которая лежит в C, а потому и в $Z(C)$ (по теореме 2.2.5.1). Но тогда нильпотентный элемент ad_{z_n} коммутирует с ad_y для всех $y \in C$; поэтому $\mathrm{ad}_{z_n}\mathrm{ad}_y$ нильпотентен, откуда $\varphi(z_n, C) = 0$, что противоречит невырожденности φ на C (следствие 2.5.1.3).

7. $C_L(H) = H$. Если это не так, то в $C_L(H)$ есть ненулевой нильпотентный элемент x. При этом $\varphi(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y) = 0$ для всех $y \in C_L(H)$, что противоречит следствию 2.5.1.3.

□

Следствие 2.5.2.3. *Ограничение формы* φ *на* H *невырожденно.*

2.5.3. Свойства корневых подпространств. Следствие 2.5.2.3 позволяет нам отождествить H с H^*: элементу $\varphi \in H^*$ соответствует единственный элемент $t_\varphi \in H$ такой, что $\varphi(h) = \varphi(t_\varphi, h)$ для всех $h \in H$. Множеству Φ при этом соответствует множество $\{t_\alpha \mid \alpha \in \Phi\} \subset H$.

В лемме 2.5.1.2 мы видели, что $\varphi(L_\alpha, L_\beta) = 0$, если $\alpha, \beta \in H^*$, $\alpha + \beta \neq 0$. В частности, $\varphi(H, L_\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in \Phi$.

Теорема 2.5.3.1. *Пусть* L, H, Φ *— как выше.*

1. *Множество* Φ *порождает* H^*.

2. *Если* $\alpha \in \Phi$, *то* $-\alpha \in \Phi$.

3. *Пусть* $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$. *Тогда* $[x, y] = \varphi(x, y)t_\alpha$.

4. *Если* $\alpha \in \Phi$, *то пространство* $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ *одномерно с образующим* t_α.

5. $\alpha(t_\alpha) = \varphi(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$ *для всех* $\alpha \in \Phi$.

6. *Если* $\alpha \in \Phi$, $x_\alpha \in L_\alpha$, $x_\alpha \neq 0$, *то существует* $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ *такой, что элементы* x_α, y_α, $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ *порождают трехмерную простую подалгебру в* L. *Эта подалгебра изоморфна* $\mathfrak{sl}(2, k)$ *посредством отображения* $x_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $h_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. $h_\alpha = 2t_\alpha/\varphi(t_\alpha, t_\alpha)$, $h_\alpha = -h_{-\alpha}$.

Доказательство.

1. Если Φ не порождает H^*, то найдется $h \in H$ такой, что $\alpha(h) = 0$ для всех $\alpha \in \Phi$. Это означало бы, что $[h, L_\alpha] = 0$ при всех $\alpha \in \Phi$. Кроме того, $[h, H] = 0$. Поэтому $[h, L] = 0$, то есть, h лежит в центре L, что невозможно: центр полупростой алгебры тривиален.

2. Пусть $\alpha \in \Phi$ и $-\alpha \in \Phi$. Тогда по лемме 2.5.1.2 подпространство L_α ортогонально всем подпространствам L_β, $\beta \in H^*$, относительно формы Киллинга. Поэтому L_α оротогонально L, что противоречит невырожденности формы Киллинга.

3. Пусть $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$. Возьмем любой элемент $h \in H$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(h, [x, y]) &= \varphi([h, x], y) \\ &= \alpha(h)\varphi(x, y) \\ &= ph(t_\alpha, h)\varphi(x, y) \\ &= \varphi(\varphi(x, y)t_\alpha, h) \\ &= \varphi(h, \varphi(x, y)t_\alpha). \end{aligned}$$

   Значит, H ортогональна к $[x, y] - \varphi(x, y)t_\alpha$. Из невырожденности ограничения φ на H (следствие 2.5.2.3) следует, что $[x, y] = \varphi(x, y)t_\alpha$.

4. Только что мы показали, что t_α порождает подалгебру $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$, если она ненулевая. Пусть $x \in L_\alpha$ — ненулевой элемент. Если $\varphi(x, L_{-\alpha}) = 0$, то $\varphi(x, L) = 0$, что противоречит невырожденности формы φ. Значит, существует ненулевой $y \in L_{-\alpha}$ такой, что $\varphi(x, y) \neq 0$. Но $[x, y] = \varphi(x, y)t_\alpha$, и поэтому $[x, y] \neq 0$.

5. Если $\alpha(t_\alpha) = 0$, то $[t_\alpha, x] = 0 = [t_\alpha, y]$ при всех $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$. Снова можно выбрать x, y так, что $\varphi(x, y) \neq 0$. После умножения x на скаляр можно считать, что $\varphi(x, y) = 1$. Тогда $[x, y] = \varphi(x, y)t_\alpha = t_\alpha$. Рассмотрим подпространство R в L, натянутое на x, y, t_α. Из равенств $[t_\alpha, x] = [t_\alpha, y] = 0$, $[x, y] = t_\alpha$ следует, что оно является трехмерной разрешимой алгеброй. Кроме того, $R \cong \mathrm{ad}_L(R)$ По следствию 2.2.4.4 для всех $z \in [R, R]$ отображение ad_z нильпотентно на L. Но тогда отображение ad_{t_α} одновременно полупросто и нильпотентно, то есть, $\mathrm{ad}_{t_\alpha} = 0$, откуда $t_\alpha = 0$ — противоречие.

6. Пусть $x_\alpha \in L_\alpha$ — некоторый ненулевой элемент. Тогда найдется $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ такой, что $\varphi(x_\alpha, y_\alpha) = 2/\varphi(t_\alpha, t_\alpha)$. Пусть $h_\alpha = 2t_\alpha/\varphi(t_\alpha, t_\alpha)$. Тогда несложно проверить, что $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$, $[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha$ и $[h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha$. Поэтому x_α, y_α, t_α порождают трехмерную подалгебру в L, изоморфную $\mathfrak{sl}(2, k)$.

7. Из определения $\varphi(t_\alpha, h) = \alpha(h)$ (для $h \in H$) следует, что $t_{-\alpha} = -t_{-\alpha}$. Поэтому $h_\alpha = -h_{-\alpha}$.

□

Пусть $\alpha \in \Phi$ — некоторый корень. Обозначим через R_α подалгебру в L, построенную в доказательстве теоремы 2.5.3.1. Мы знаем, что $R_\alpha \cong \mathfrak{sl}(2, k)$. Рассмотрим подпространство $M \subseteq L$, порожденное подалгеброй H вместе со всеми корневыми подпространствами вида $L_{c\alpha}$, где $c \in k^*$. По лемме 2.5.1.2 это R_α-подмодуль в L. Веса элемента h_α на M целочисленны в силу следствия 2.4.4.4. Они могут быть равны 0 и $2c = c\alpha(h_\alpha)$ для таких c, что $L_{c\alpha} \neq 0$. Как следствие, все такие c кратны $1/2$. Кроме этого, R_α действует тривиально на $\ker(\alpha)$, а $\ker(\alpha)$ — подпространство коразмерности 1 в H, дополнительное к $\langle h_\alpha \rangle$. С другой стороны, сама R_α является неприводимым R_α-подмодулем в M. Вес 0 для h_α появляется только в подпространствах $\ker(\alpha)$ и R_α. С другой стороны, если где-то в M встречается четный вес, то в том же неприводимом слагаемом должен быть и нулевой вес. Но в слагаемых $\ker(\alpha)$ и R_α встречаются только веса 0 и ± 2. Из этого следует, что 2α не является корнем (иначе встречался бы вес 4. Поэтому и $\alpha/2$ не является корнем, и 1 не является весом для h_α в M. Из этого следует, что на M вообще нет нечетных весов, и поэтому $M = H + R_\alpha$. Значит, $\dim(L_\alpha) = 1$, и R_α однозначно определяется как подалгебра в L, порожденная L_α и $L_{-\alpha}$. Из этого следует, что среди всех кратных корня α корнями являются лишь $\pm\alpha$.

Теперь посмотрим, как подалгебра R_α действует на корневых подпространствах L_β, $\beta \neq \pm\alpha$. Пусть $K = \sum_{i \in \mathbb{Z}} L_{\beta + i\alpha}$. Мы уже знаем, что каждое корневое подпространство одномерно и $\beta + i\alpha \neq 0$ ни при каком i. Поэтому K является R_α-подмодулем в L с одномерными корневыми подпространствами для весов $\beta(h_\alpha) + 2i$ (где i пробегает целые числа, для которых $\beta + i\alpha \in \Phi$. Все значения $\beta(h_\alpha) + 2i$ являются различными. Ясно, что 0 и 1 одновременно не могут быть весами такого вида, и потому в силу следствия 2.4.4.4 модуль K неприводим. Старший вес K равен $\beta(h_\alpha) + 2q$, где q — наибольшее целое число, для которого $\beta + q\alpha$ является корнем. Аналогично, младший вес K равен $\beta(h_\alpha) - 2r$, где r — наибольшее целое число, для которого $\beta - r\alpha$ является корнем. По теореме 2.4.4.3 веса образуют арифметическую прогрессию с разностью 2; поэтому корни вида $\beta + i\alpha$ должны образовывать цепочку $\beta - r\alpha, \ldots, \beta, \beta + q\alpha$. Эта цепочка называется **α-серией, порожденной корнем** β. Старший и младший вес должны быть противоположны, поэтому $\beta(h_\alpha) + 2q = -(\beta(h_\alpha) - 2r)$, откуда $\beta(h_\alpha) = r - q$.

Наконец, заметим, что если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$, то (в силу описания действия x_α, лемма 2.4.4.2) $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$. Мы доказали следующее предложение.

Предложение 2.5.3.2. *Пусть* $\alpha \in \Phi$. *Тогда*

1. $\dim L_\alpha = 1$. *Как следствие,* $R_\alpha = L_\alpha + L_{-\alpha} + H_\alpha$, *где* $H_\alpha = [L_\alpha, L_{-\alpha}]$, *и для каждого ненулевого* $x_\alpha \in L_\alpha$ *существует единственный* $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ *такой, что* $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$*;*

2. *среди произведений* $c\alpha$, $c \in k$, *корнями являются только* $\pm\alpha$*;*

3. *если* $\beta \in \Phi$, *то* $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ *и* $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$ *(числа* $\beta(h_\alpha)$ *называются* ***числами Картана****);*

4. *если* $\beta, \alpha + \beta \in \Phi$, *то* $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$*;*

5. *если* $\beta \in \Phi$, $\beta \neq \pm\alpha$, *и* r, q *— наибольшие целые числа, для которых* $\beta - r\alpha$ *и* $\beta + q\alpha$ *являются корнями, то* $\beta + i\alpha \in \Phi$ *для всех* $-r \leqslant i \leqslant q$ *и* $\beta(h_\alpha) = r - q$*;*

6. *алгебра Ли* L *порождается корневыми подпространствами* L_α*.*

2.5.4. Рациональность. Так как ограничение формы Киллинга φ на H невырожденно, можно перенести ее на H^* следующим образом: для $\alpha, \beta \in H^*$ положим $(\alpha, \beta) = \varphi(t_\alpha, t_\beta)$. Мы знаем, что множество корней Φ порождает H^*; поэтому в H^* можно выбрать базис $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, состоящий из корней. Любой корень $\beta \in \Phi$ теперь можно единственным образом представить в виде $\beta = \sum_{i=1}^{l} c_i \alpha_i$, где $c_i \in k$. Мы утверждаем, что на самом деле $c_i \in \mathbb{Q}$. Действительно, для каждого $j = 1, \dots, l$ выполнено $(\beta, \alpha_j) = \sum_i c_i(\alpha_i, \alpha_j)$. Умножая обе части на $2/(\alpha_j, \alpha_j)$, получаем

$$\frac{2(\beta, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_{i=1}^{l} \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} c_i.$$

Посмотрим на это равенство как на систему из l уравнений с l неизвестными c_i. Его коэффициенты целые в силу предложения 2.5.3.2. Поскольку $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ — базис в H^*, матрица Грама $((\alpha_i, \alpha_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant l}$ невырожденной формы невырожденна. Поэтому и матрица нашей системы уравнений невырожденна. Значит, у нее есть единственное решение. Но все коэффициенты и правая часть нашей системы рациональны, поэтому (формулы Крамера) и ее решение рационально.

Рассмотрим теперь $\mathbb{Q}$-подпространство $E_\mathbb{Q}$ в H^*, натянутое на $\alpha_1, \dots, \alpha_l$. Мы только что показали, что Φ лежит в подпространстве; кроме того, $\dim_\mathbb{Q} E_\mathbb{Q} = \dim_k H^* = l$. Если $\lambda, \mu \in H^*$, то

$$(\lambda, \mu) = \varphi(t_\lambda, t_\mu) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \lambda)(\alpha, \mu).$$

В частности, если $\beta \in \Phi$, то $(\beta, \beta) = \sum (\alpha, \beta)^2$. Поэтому

$$\frac{1}{(\beta, \beta)} = \sum \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\beta, \beta)^2}.$$

Правая часть этого равенства рациональна, поскольку $2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta) \in \mathbb{Z}$. Поэтому $(\beta, \beta) \in \mathbb{Q}$, откуда и $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$. Это означает, что все скалярные произведения векторов в $E_\mathbb{Q}$ рациональны, и мы получаем невырожденную билинейную симметричную форму на $E_\mathbb{Q}$. Кроме того, величина $(\lambda, \lambda) = \sum (\alpha, \lambda)^2$ положительна (если $\lambda \neq 0$); то есть, полученная форма на $E_\mathbb{Q}$ положительно определена. Рассмотрим теперь вещественное векторное пространство $E_\mathbb{R}$, полученное из $E_\mathbb{Q}$ заменой базы с $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{R}$: $E = E_\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R}$. Форма продолжается на E и остается положительно определенной; то есть, E является эвклидовым пространством. В множестве Φ содержится базис этого пространства; его размерность равна l. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.5.4.1. *1. Множество Φ порождает E и не содержит 0.*

2. Если $\alpha \in \Phi$, то $-\alpha \in \Phi$, но никакое другое $c\alpha$ не является корнем.

3. Если $\alpha, \beta \in \Phi$, то $\beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in \Phi$.

4. Если $\alpha, \beta \in \Phi$, то $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

3 Системы корней

3.1 Определение

3.1.1. Отражения. Пусть E — эвклидово пространство с положительно определенным скалярным произведением $(-,-)$, и пусть $\alpha \in E$ — ненулевой вектор. Существует единственное линейное отображение $s_\alpha \colon E \to E$, обладающее следующими двумя свойствами:

- $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$;
- $s_\alpha(\beta) = \beta$, если $\beta \perp \alpha$.

Действительно, единственность такого отображения следует из того, что гиперплоскость, ортогональная α, порождает вместе с α все пространство E. Для доказательства существования предъявим явную формулу:

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

Нетрудно проверить, что таким образом определенное s_α действительно удовлетворяет приведенным выше свойствам. Отображение s_α называется **отражением относительно** α (конечно, более правильно было бы называть его **отражением относительно гиперплоскости, ортогональной** α. Несложно проверить, что каждое отражение s_α является *изометрией*, то есть, сохраняет скалярное произведение: $(s_\alpha(\beta), s_\alpha(\gamma)) = (\beta,\gamma)$ для всех $\beta,\gamma \in E$.

3.1.2. Определение системы корней.

Определение 3.1.2.1. Подмножество $\Phi \subset E$ называется **системой корней в** E, если выполнены следующие свойства.

1. $\langle\Phi\rangle = E$, $|\Phi| < +\infty$, $0 \notin \Phi$;
2. если $\alpha, c\alpha \in \Phi$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$, то $c = \pm 1$;
3. $s_\alpha(\Phi) \subseteq \Phi$ для всех $\alpha \in \Phi$;
4. если $\alpha, \beta \in \Phi$, то $2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha) \in \mathbb{Z}$.

Размерность пространства E называется **рангом** системы корней Φ.

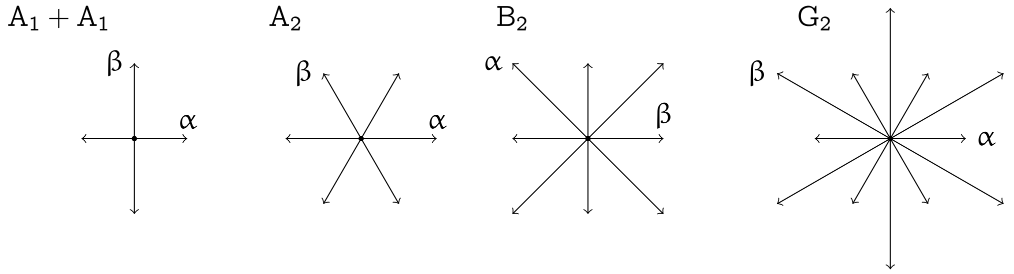
На самом деле, зачастую *системой корней* называют множество, удовлетворяющее лишь первому и третьему свойству; при наличии второго свойства говорят о **приведенной** системе корней, а при наличии четвертого — о **кристаллографической** системе корней. Но теорема 2.5.4.1 говорит нам, что корни полупростой алгебры Ли (над алгебраически замкнутом полем) образуют приведенную кристаллографическую систему корней, так что нас мало будут интересовать неприведенные и некристаллографические системы. Тем не менее, возможно классификация даже неприведенных и некристаллографических систем, и она не сильно отличается от классификации приведенных кристаллографических систем.

Пусть $W \leqslant \mathrm{GL}(E)$ — подгруппа в $\mathrm{GL}(E)$, порожденная всеми отражениями s_α, $\alpha \in \Phi$. Она называется **группой Вейля** системы корней Φ. Заметим, что группа W переставляет элементы конечного множества Φ; поэтому можно отождествить ее с подгруппой симметрической группы S_Φ. В частности, это означает, что группа Вейля системы корней конечна.

Любая [приведенная] система корней ранга 1 выглядит так:

$$\begin{gathered} A_1 \\ -\alpha \longleftarrow\!\!\bullet\!\!\longrightarrow \alpha \end{gathered}$$

Ниже приведены примеры систем корней ранга 2 (вскоре мы увидим, что это все системы ранга 2).



Обратите внимание, что длины корней α и β в системе A_1+A_1 могут быть произвольными.

3.1.3. Углы между корнями. Свойство кристаллографичности сильно ограничивает возможные углы между парами корней. Пусть $\alpha, \beta \in \Phi$, θ — угол между векторами α и β. По определению это означает, что $(\alpha, \beta) = ||\alpha|| \cdot ||\beta|| \cdot \cos(\theta)$, где $||\alpha||^2 = (\alpha, \alpha)$. Из условия кристаллографичности следует, что

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2\frac{||\beta||}{||\alpha||}\cos(\theta) \in \mathbb{Z}$$

Поменяв местами α и β, получаем, что и

$$2\frac{||\alpha||}{||\beta||}\cos(\theta) \in \mathbb{Z}$$

Перемножая два этих целых числа, получаем, что $4(\cos(\theta))^2 \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, очевидно, что $0 \leqslant 4(\cos(\theta))^2 \leqslant 4$. Это означает, что существует пять возможностей:

- $4(\cos(\theta))^2 = 0$, тогда $\cos(\theta) = 0$, и поэтому $\alpha \perp \beta$.

- $4(\cos(\theta))^2 = 1$, тогда $\cos(\theta) = \pm 1/2$, и поэтому $\theta = \pi/3$ или $\theta = 2\pi/3$. В этом случае $||\beta|| = ||\alpha||$.

- $4(\cos(\theta))^2 = 2$, тогда $\cos(\theta) = \pm\sqrt{2}/2$, и поэтому $\theta = \pi/4$ или $\theta = 3\pi/4$. В этом случае

$$\frac{||\beta||}{||\alpha||} = \sqrt{2} \text{ или } \frac{||\beta||}{||\alpha||} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- $4(\cos(\theta))^2 = 3$, тогда $\cos(\theta) = \pm\sqrt{3}/2$, и поэтому $\theta = \pi/6$ или $\theta = 5\pi/6$. В этом случае

$$\frac{||\beta||}{||\alpha||} = \sqrt{3} \text{ или } \frac{||\beta||}{||\alpha||} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- $4(\cos(\theta))^2 = 4$, тогда $\cos(\theta) = \pm 1$, и поэтому $\theta = 0$ или $\theta = \pi$. В этом случае $\beta = \pm\alpha$.

Все эти возможности, как нетрудно видеть, реализуются уже в ранге 2.

3.1.4. Простые корни.

Определение 3.1.4.1. Подмножество $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subseteq \Phi$ называется **базисом** системы корней Φ, если корень $\alpha \in \Phi$ представляется единственным образом в виде линейной комбинации $\alpha = m_1\alpha_1 + \dots + m_l\alpha_l$ элементов Π таким образом, что все коэффициенты $m_1, \dots, m_l$ — целые числа, и все они одного знака, то есть, либо все $m_i \geqslant 0$, либо все $m_i \leqslant 0$. Элементы Π называются *простыми корнями*, и Π иногда называется **системой простых корней**.

Не вполне очевидно, что в системе корней вообще есть хотя бы один базис. Оказывается, задание базиса равносильно заданию *порядка* на системе корней. Действительно, пусть в системе корней Φ выбран базис Π. Каждый корень $\alpha \in \Phi$ является целочисленной линейной комбинацией простых корней. Если все коэффициенты в ней неотрицательны, назовем корень α **положительным**, а если все они неположительны, назовем α **отрицательным**. Обозначим через Φ^+ множество положительных корней системы Φ, а через Φ^- — множество отрицательных корней. Очевидно, что

- $\Phi = \Phi^+ \coprod \Phi^-$,
- $\alpha \in \Phi^+$ тогда и только тогда, когда $-\alpha \in \Phi^-$,
- если $\alpha, \beta \in \Phi^+$, то $\alpha + \beta \in \Phi^+$.

Назовем *порядком* на системе корней Φ выбор подмножеств $\Phi^+, \Phi^- \subset \Phi$, для которых выполняются указанные три свойства. Теперь пусть на Φ задан некоторый порядок; мы хотим построить по нему базис в Φ. Назовем корень $\alpha \in \Phi^+$ **разложимым**, если $\alpha = \beta + \gamma$ для некоторых $\beta, \gamma \in \Phi^+$, и **неразложимым** в противном случае.

Предложение 3.1.4.2. *Пусть на системе корней Φ задан порядок. Неразложимые корни относительно этого порядка образуют базис системы Φ.*

Нетрудно проверить, что мы построили взаимно обратные биекции между базисами в Φ и порядками на Φ. Теперь несложно показать, что в любой системе корней Φ существует базис: достаточно найти какой-нибудь порядок на Φ.

Определение 3.1.4.3. Пусть E — эвклидово пространство. Подмножества $E^+, E^- \subseteq E$ образуют **порядок** на пространстве E, если выполняются следующие условия:

- $E = E^+ \coprod E^- \coprod \{0\}$,
- $\alpha \in E^+$ тогда и только тогда, когда $-\alpha \in E^-$,
- если $\alpha, \beta \in E^+$, то $\alpha + \beta \in E^+$,
- если $\alpha \in E^+$, $c \in \mathbb{R}_{>0}$, то $c\alpha \in E^+$.

Нетрудно видеть, что если Φ — система корней в эвклидовом пространстве E, а (E^+, E^-)— порядок на пространстве E, то $(\Phi \cap E^+, \Phi \cap E^-)$ — порядок на системе корней Φ.

Как построить порядок на E? Вот один из способов: выберем ненулевой вектор $\gamma \in E$ и обозначим через H_γ гиперплоскость, ортогональную к γ. Теперь пусть $\nu \in E$; отправим вектор ν в E^+, если скалярное произведение ν с γ положительно, и в E^-, если скалярное произведение ν с γ отрицательно. Геометрически это можно сформулировать так: назовем положительными те векторы, которые лежат по одну сторону от H_γ с вектором γ, и отрицательными те векторы, которые лежат с γ по разные стороны от H_γ. Так мы разобрались со всеми векторами, кроме тех, которые ортогональны γ, то есть, кроме тех, которые лежат в H^γ. Продолжим процедуру по индукции: выберем в H^γ какой-нибудь вектор γ' и рассмотрим гиперплоскость в H^γ, ортогональную γ'. Так мы дойдем до случая одномерного пространства, на котором задать порядок несложно. В качестве упражнения читателю предлагается проверить, что описанная процедура задает порядок на E.

Если нас интересует только порядок на системе корней $\Phi \subseteq E$, то почти всегда достаточно одного шага этого алгоритма. Действительно, если $\Phi \cap H_\gamma = \varnothing$, то мы уже на первом шаге решили для каждого корня, является ли он положительным или отрицательным. То есть, если выбрать вектор γ так, чтобы он был не ортогонален ни одному из конечного числа корней Φ, то мы получим порядок на Φ.

3.1.5. Диаграммы Дынкина. Выберем в системе корней Φ в эвклидовом пространстве E какой-нибудь базис $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$. Заметим сначала, что все попарные углы между корнями из Π неострые. Действительно, в разделе 3.1.3 мы перечислили все возможные углы между векторами в системе корней. Далее, если $\angle(\alpha_i, \alpha_j) = \pi/3$, то и $s_{\alpha_i}(\alpha_j) = \alpha_j - \alpha_i$ является корнем. Но корень $\alpha_j - \alpha_i$ должен однозначно раскладываться в линейную комбинацию корней из Π так, что все коэффициенты в этом разложении имеют один знак — получаем противоречие. Аналогично доказывается, что невозможны углы $\pi/4$ и $\pi/6$. Значит, для любых двух различных корней $\alpha_i, \alpha_j \in \Pi$ угол $\angle(\alpha_i, \alpha_j)$ равен $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$ или $5\pi/6$.

Нарисуем следующий граф: его вершины — элементы Π, а ребра проводятся по следующему правилу:

- если $\alpha_i \perp \alpha_j$, то между вершинами α_i и α_j не проводится ребро;
- если $\angle(\alpha_i, \alpha_j) = 2\pi/3$, то между вершинами α_i и α_j проводится одинарное ребро;
- если $\angle(\alpha_i, \alpha_j) = 3\pi/4$, то между вершинами α_i и α_j проводится двойное ребро, на котором ставится стрелочка, указывающая от большего (по длине) ребра к меньшему;
- если $\angle(\alpha_i, \alpha_j) = 5\pi/6$, то между вершинами α_i и α_j проводится тройное ребро, на котором ставится стрелочка, указывающая от большего (по длине) ребра к меньшему.

Полученный граф называется **диаграммой Дынкина** (а также **графом Дынкина**, **схемой Дынкина**) системы корней Φ. Можно показать, что диаграмма Дынкина на самом деле (с точностью до изоморфизма графов) не зависит от выбора базиса в системе корней.

Указанные четыре возможности реализуются в системах корней ранга два:

3.2 Классификация

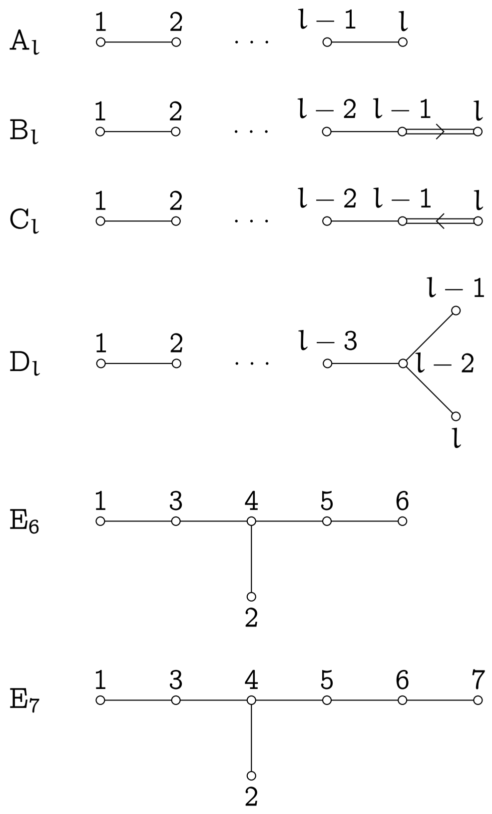
3.2.1. Неприводимые системы корней. Пусть $\Phi_1 \subseteq E_1$, $\Phi_2 \subseteq E_2$ — две системы корней. Рассмотрим эвклидово пространство $E = E_1 \oplus E_2$ (заметим, что каждый вектор из $E_1 \leqslant E$ ортогонален каждому вектору из $E_2 \leqslant E$) и подмножество $\Phi = \Phi_1 \coprod \Phi_2$ в нем. Точнее, любой вектор из E имеет вид (α_1, α_2), где $\alpha_i \in E_i$; тогда

$$\Phi = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \Phi_1\} \cup \{(0, \beta) \mid \beta \in \Phi_2\} \subseteq E_1 \oplus E_2$$

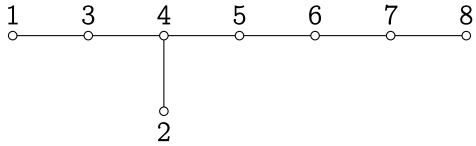
Нетрудно проверить, что Φ является системой корней в пространстве E. Она называется **прямой суммой** систем Φ_1 и Φ_2 и обозначается через $\Phi_1 + \Phi_2$. Система корней Φ называется **приводимой**, если ее можно представить в виде $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ для некоторых систем корней Φ_1, Φ_2. В противном случае Φ называется **неприводимой**. Конечно, произвольная система корней является суммой неприводимых, и изучение большинства вопросов про системы корней естественным образом сводится к случаю неприводимых систем. Нетрудно понять, что объединение любых двух базисов в Φ_1 и Φ_2 является базисом в $\Phi_1 + \Phi_2$; обратно, если выбран базис в $\Phi_1 + \Phi_2$, то его пересечения с Φ_1 и Φ_2 будут базисами в этих системах корней. Нетрудно понять, что диаграмма Дынкина системы Φ относительно выбранного базиса является объединением диаграмм Дынкина систем Φ_1 и Φ_2 относительно пересечений этого базиса с Φ_1 и Φ_2. Нетрудно понять, что диаграмма Дынкина неприводимой системы корней связна; таким образом, компоненты связности диаграммы Дынкина произвольной системы корней — это диаграммы Дынкина ее неприводимых компонент.

3.2.2. Классификация систем корней.

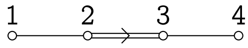
Теорема 3.2.2.1. *Любая неприводимая система корней изоморфна одной из следующих (мы приводим названия систем корней вместе с их диаграммами Дынкина; индекс в названии указывает на ранг = число вершин в диаграмме Дынкина).*



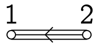
E_8



F_4



G_2



3.2.3. Конструкция неприводимых систем. Теорема 3.2.2.1 в частности, утверждает, что системы корней с перечисленными диаграммами Дынкина *существуют.* В этом разделе мы явно построим все неприводимые системы корней.

A_l Пусть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l+1}$ — ортонормированный базис эвклидова пространства V размерности $l+1$, и пусть $E \leqslant V$ — подпространство, состоящее из векторов, сумма координат которых в разложении по этому базису нулевая. Тогда $A_l = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant l+1\}$. Нетрудно видеть, что $|A_l| = l(l+1)$. В качестве системы простых корней в A_l можно взять подмножество $\Pi = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \varepsilon_l - \varepsilon_{l+1}\}$. Группа Вейля $W(A_l)$ изоморфна S_{l+1} и отождествляется с группой перестановок векторов ε_i. Таким образом, $|W(A_l)| = (l+1)!$.

B_l Везде далее пусть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l$ — ортонормированный базис эвклидова пространства E. Пусть $B_l = \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leqslant i \leqslant l\} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant l\}$. Тогда $|B_l| = 2l^2$. Простые корни: $\Pi = \{e_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \varepsilon_l\}$. Группа Вейля $W(B_l)$ является полупрямым произведением симметрической группы S_l (действующей перестановками на ε_i) и группы $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$ (действующей заменами знака: $\varepsilon_i \mapsto (\pm 1)_i \varepsilon_i$). Поэтому $|W(B_l)| = 2^l \cdot l!$.

C_l Пусть $C_l = \{\pm 2\varepsilon_i \mid 1 \leqslant i \leqslant l\} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant l\}$. Снова $|C_l| = 2l^2$. Простые корни: $\Pi = \{e_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, 2\varepsilon_l\}$. Кроме того, $W(C_l) \cong W(B_l)$.

D_l Пересечение систем корней B_l и C_l в E является системой корней типа D_l. Иными словами, $D_l = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant l\}$. Базис простых корней выглядит так: $\Pi = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l\}$. При этом $|D_l| = 2l(l-1)$; группа Вейля $W(D_l)$ является полупрямым произведением симметрической группы S_l (действующей перестановками на ε_i) и группы $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{l-1}$ (действующей заменами знаков $\varepsilon_i \mapsto (\pm 1)_i \varepsilon_i$ такими, что $\prod_i (\pm 1)_i = 1$). Поэтому $W(D_l) = 2^{l-1} \cdot l!$.

E_8 Теперь $l = 8$. Рассмотрим множество

$$E_8 = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 8\} \cup \{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i \mid \sum_{i=1}^{8} \nu(i) \text{ четна}\}.$$

Тогда $|E_8| = 240$. В качестве базиса можно взять $\{\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7), \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3, \alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4, \alpha_7 = \varepsilon_6 - \varepsilon_5, \alpha_8 = \varepsilon_7 - \varepsilon_6\}$. Группа Вейля $W(E_8)$ имеет порядок $2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$.

E_7 Система корней E_7 состоит из корней E_8, коэффициент при α_8 в разложении которых по базису Π, указанному выше, равен нулю. Векторы $\{\alpha_1, \dots, \alpha_7\}$ образуют ее базис. Группа Вейля $W(E_7)$ имеет порядок $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

E_6 Система корней E_6 состоит из корней E_7, коэффициент при α_7 в разложении которых по базису равен нулю. Векторы $\{\alpha_1, \dots, \alpha_6\}$ образуют ее базис. Группа Вейля $W(6)$ имеет порядок $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$.

F_4 Теперь $l = 4$. Рассмотрим множество $F_4 = \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 4\} \cup \{\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)\}$. Простые корни имеют вид $\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \alpha_3 = \varepsilon_4, \alpha_4 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$. Группа Вейля $W(F_4)$ имеет порядок $2^7 \cdot 3^2$.

G_2 Эта система была явно построена выше; осталось заметить, что $W(G_2)$ — диэдральная группа порядка 12.

3.2.4. Классификация полупростых алгебр Ли. Следующие две теоремы завершают классификацию [полу]простых алгебр Ли.

Теорема 3.2.4.1 (существования). *Пусть Φ — некоторая система корней. Тогда существует полупростая алгебра Ли с системой корней Φ.*

Теорема 3.2.4.2 (единственности). *Пусть L, L' — простые алгебры Ли (как и раньше, над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0) с максимальными торическими подалгебрами H, H' и системами корней Φ, Φ' соответственно. Предположим, что существует изоморфизм $\Phi \to \Phi'$, $\alpha \mapsto \alpha'$, который индуцирует изоморфизм $\pi\colon H \to H'$. Зафиксируем базис $\Delta \subseteq \Phi$ и заметим, что $\Delta' = \{\alpha' \mid \alpha \in \Delta$ является базисом в Φ'. Для каждого $\alpha \in \Delta$ выберем произвольные (ненулевые) $x_\alpha \in L_\alpha$, $x'_{\alpha'} \in L'_{\alpha'}$. Тогда существует единственный изоморфизм $\pi\colon L \to L'$, продолжающий $\pi\colon H \to H'$, для которого $\pi(x_\alpha) = x'_{\alpha'}$.*