Задачи по мини-курсу «Алгебры Ли»

Весна 2016

Алгебра Ли L называется **редуктивной**, если ее радикал совпадает с центром: $\mathrm{Rad}(L) = Z(L)$.

Синие задачи

1. Пусть k — поле характеристики не 2, V — векторное пространство над k размерности $2l$. Рассмотрим симметрическую билинейную форму $f\colon V \times V \to k$ с матрицей
$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Рассмотрим множество L всех эндоморфизмов x пространства V, удовлетворяющих условию $f(x(v), w) = -f(v, x(w))$. Докажите, что L является алгеброй Ли, найдите ее базис и вычислите размерность.

2. Пусть k — поле характеристики не 2, V — векторное пространство над k размерности 6. Рассмотрим симметрическую билинейную форму $f\colon V \times V \to k$ с матрицей
$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Рассмотрим множество L всех эндоморфизмов x пространства V, удовлетворяющих условию $f(x(v), w) = -f(v, x(w))$. Докажите, что L является алгеброй Ли, изоморфной $\mathfrak{sl}(4, k)$.

3. Пусть поле k алгебраически замкнуто, L — алгебра Ли над k, $x \in L$. Пусть $M \leqslant L$ — подпространство, натянутое на все собственные векторы оператора ad_x. Докажите, что M — подалгебра в L.

4. Рассмотрим подалгебры $\mathfrak{d}(n, k)$ (диагональных матриц), $\mathfrak{t}(n, k)$ (верхнетреугольных матриц), $\mathfrak{n}(n, k)$ (строго верхнетреугольных матриц) в $\mathfrak{gl}(n, k)$. Докажите, что алгебры Ли $\mathfrak{t}(n, k)$ и $\mathfrak{d}(n, k)$ самонормализуемы, а нормализатор $\mathfrak{n}(n, k)$ равен $\mathfrak{t}(n, k)$.

5. Пусть $L = \mathfrak{sl}(n, k)$, $g \in GL(n, k)$. Рассмотрим отображение алгебры L в себя, заданное формулой $x \mapsto -gx^T g^{-1}$. Докажите, что это автоморфизм алгебры L, и что если $n = 2$, а g — единичная матрица, то он является внутренним.

6. Докажите, что алгебра L разрешима тогда и только тогда, когда существует цепочка подалгебр $L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \dots \supseteq L_m = 0$, в которой $L_{i+1} \trianglelefteq L_i$, и все фактор-алгебры L_i/L_{i+1} абелевы.

7. Пусть $\mathrm{char}(k) = 2$. Докажите, что алгебра $\mathfrak{sl}(2, k)$ нильпотентна.

8. Пусть алгебра L нильпотентна, $K < L$ — ее собственная подалгебра. Докажите, что $N_L(K)$ строго включает K.

9. Пусть k — поле характеристики $p > 0$. Рассмотрим матрицы

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p-1 \end{pmatrix}$$

   в $\mathfrak{gl}(p, k)$. Докажите, что x, y порождают разрешимую подалгебру в $\mathfrak{gl}(p, k)$, но не имеют общего собственного вектора.

10. Пусть $\mathrm{char}(k) = 3$. Докажите, что алгебра Ли над k полупроста, если ее форма Киллинга невырожденна. Рассмотрите фактор алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3, k)$ по модулю ее центра и посчитайте ее форму Киллинга.

11. Докажите, что если алгебра L разрешима, то каждое ее неприводимое представление одномерно.

12. Рассмотрим алгебру $M = \mathfrak{sl}(3, k)$ и подалгебру $L \leqslant M$, состоящую из матриц, у которых последняя строка и последний столбец нулевые. Подалгебра L изоморфна $\mathfrak{sl}(2, k)$ и действует на M посредством присоединенного представления. Таким образом, M является L-модулем. Разложите этот модуль в прямую сумму неприводимых.

13. Докажите, что множество всех диагональных матриц в $\mathfrak{sl}(n, k)$ является максимальной торической подалгеброй. Найдите корни и корневые подпространства относительно этой подалгебры.

14. Пусть эндоморфизмы $x, y \in \mathrm{End}(V)$ коммутируют. Докажите, что $(x+y)_s = x_s + y_s$ и $(x + y)_n = x_n + y_n$. Приведите пример, показывающий, что это может быть не так, если x, y не коммутируют.

Зеленые задачи

15. Пусть $V(m)$ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{sl}(2, k)$ со старшим весом m. Разложите тензорное произведение модулей $V(3) \otimes V(7)$ в прямую сумму неприводимых подмодулей.

16. Пусть L — алгебра Ли, а K — идеал в L. Предположим, что L/K нильпотентна, и что при всех $x \in L$ отображение $(\mathrm{ad}_x)|_K$ нильпотентно. Докажите, что алгебра L нильпотентна.

17. Пусть L — редуктивная алгебра Ли. Докажите, что $L = Z(L) \oplus [L, L]$, где алгебра $[L, L]$ полупроста.

18. Пусть L — простая алгебра Ли, а $\beta(x, y)$ и $\gamma(x, y)$ — две симметрические ассоциативные невырожденные билинейные формы на L. Докажите, что они пропорциональны.

19. Пусть L — алгебра Ли. Она действует посредством ad на алгебре $(L \otimes L)^*$, которую можно отождествить с пространством всех билинейных форм на L. Докажите, что форма β ассоциативна тогда и только тогда, когда $L \cdot \beta = 0$.

20. Пусть $\operatorname{char} k = p > 0$, $L = \mathfrak{sl}(2, k)$. Пусть X, Y — базис двумерного векторного пространства столбцов k^2, на котором L действует умножением слева. Рассмотрим алгебру многочленов $R = k[X, Y]$, на которую действие L продолжено таким образом, что $z \cdot (fg) = (z \cdot f)g + f(z \cdot g)$ для всех $z \in L$ и всех $f, g \in R$.

    (a) Покажите, что подпространство однородных многочленов степени m инвариантно при действии алгебры L.

    (b) Докажите, что полученное представление размерности $m + 1$ неприводимо при $m < p$ и приводимо при $m = p$.

21. Пусть алгебра L полупроста, H — ее максимальная торическая подалгебра, $h \in H$. Покажите, что подалгебра $C_L(h)$ редуктивна, и что в H содержатся элементы h, для которых $C_L(h) = H$. Опишите все такие $h \in \mathfrak{sl}(n, k)$.

22. Пусть $\mathfrak{h}$ — **алгебра Гейзенберга**, то есть, нильпотентная трехмерная алгебра Ли с базисом x, y, z таким, что z централен, и $[x, y] = z$.

    (a) Покажите, что действие z на любом конечномерном модуле нильпотентно, а на любом неприводимом конечномерном модуле — нулевое.

    (b) Постройте неприводимое бесконечномерное представление $\mathfrak{h}$, в котором z действует как умножение на ненулевой скаляр.

23. Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{b}$ — подалгебра в $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ — идеал в $\mathfrak{b}$, и $\mathfrak{g}$ — централизатор $\mathfrak{c}$ в $\mathfrak{a}$. Докажите, что $\mathfrak{b} + \mathfrak{g}$ — подалгебра в $\mathfrak{a}$, в которой $\mathfrak{g}$ является идеалом.

24. Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — коммутативный идеал в $\mathfrak{g}$. Докажите, что следующие условия равносильны:

    (a) $\mathfrak{a}$ — максимальный коммутативный идеал в $\mathfrak{g}$;

    (b) $\mathfrak{a}$ — максимальная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$;

    (c) $\mathfrak{a}$ совпадает со своим централизатором в $\mathfrak{g}$.