Теория моделей*

Александр Лузгарев

29 декабря 2013 г.

Содержание

*Конспект лекций спецкурса осени 2013 г.; предварительная версия.

0.1 Логика первого порядка

0.1.1 Языки и структуры

Алгебра изучает множества, на которых заданы *алгебраические структуры*. Все [разумные] алгебраические структуры могут быть описаны путем задания некоторых функций (нескольких переменных) и отношений (произвольной арности) на этих множествах, а также выделения некоторых элементов. Например, группой можно считать множество с одной бинарной операцией и одним выделенным элементом — нейтральным, которые удовлетворяют неким аксиомам.

Языком называется набор из трех множеств $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ вместе с заданием положительных натуральных чисел n_f для каждого элемента $f \in \mathcal{F}$ и n_r для каждого элемента $r \in \mathcal{R}$.

Элементы $\mathcal{F}$ являются символами функций; функция $f \in \mathcal{F}$ будет иметь n_f аргументов. Элементы $\mathcal{R}$ являются символами отношений; отношение $r \in \mathcal{R}$ будет иметь арность n_r. Наконец, элементы $\mathcal{C}$ являются символами констант. Для языка $L = (\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ конкретная реализация элементов $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ как функций, отношений, констант на некотором множестве называется L-структурой.

Пусть $L = (\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ — язык. **Структурой в языке** L, или L-**структурой** называется множество M с дополнительным заданием

- отображения $f^M \colon M^{n_f} \to M$ для каждого символа $f \in \mathcal{F}$;
- отношения $r^M \subseteq M^{n_r}$ для каждого символа $r \in \mathcal{R}$;
- константы $c^M \in M$ для каждого символа $c \in \mathcal{C}$.

Отображения f^M, отношения r^M, константы c^M называются **интерпретациями** символов f, r, c в структуре M.

Таким образом, язык групп может быть описан как набор из одного символа функции $\cdot$ от двух аргументов (то есть, $n_. = 2$) и одной константы e. Мы будем записывать это неформальным образом: $L = (\cdot, e)$. Обратите внимание, что в определении языка каждое из множеств $\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C}$ может быть пустым.

Конечно, не любая структура в языке групп является группой: например, множество натуральных чисел является структурой в языке групп, если мы интерпретируем символ $\cdot$ как сложение, а символ e как натуральное число 0. Для того, чтобы выделить класс групп, необходимо потребовать выполнения известных аксиом, а пока что у нас даже нет способа записывать эти аксиомы.

0.1.2 Формулы

Пусть $L = (\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ — язык. Наша ближайшая цель — научиться записывать формулы в языке L. Формулой будет конечная строка, составленная с помощью следующих символов:

- символы $\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C}$ языка L;

- символы переменных $v_1, v_2, \ldots$;
- символ равенства «$=$»;
- символы логических операций «$\neg$», «$\wedge$» и «$\vee$»;
- символы кванторов «$\forall$» и «$\exists$»;
- вспомогательные символы «(», «)» и «,».

Для того, чтобы определить, какие строки, составленные из этих символов, являются формулами, нам понадобятся вспомогательные понятия *терма* и *атомарной формулы*. Приведем индуктивное определение терма:

$$\begin{array}{rcll}
\underline{\text{терм}} & \to & c, & c \in \mathcal{C} \\
& | & v_i & \\
& | & f(\underbrace{\underline{\text{терм}}, \ldots, \underline{\text{терм}}}_{n_f}), & f \in \mathcal{F}
\end{array}$$

Иными словами, строка является термом, если она состоит из символа константы из $\mathcal{C}$ или символа переменной или из символа некоторой функции $f \in \mathcal{F}$, за которым идет открывающая скобка, затем через запятую идет n_f термов и закрывающая скобка.

Пусть t — терм, в который входят некоторые переменные, причем все они содержатся в наборе $\overline{v} = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$. Для любой L-структуры M мы можем определить отображение $t^M \colon M^m \to M$, которое просто подставляет набор элементов $\overline{a} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_m})$ вместо переменных $v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}$ в терм t. Более строго, определим значение отображение t^M на наборе $\overline{a} \in M^m$ следующим образом:

- если t имеет вид c для константы $c \in \mathcal{C}$, положим $t^M(\overline{a}) = c^M$;
- если t имеет вид v_{i_k}, положим $t^M(\overline{a}) = a_{i_k}$;
- если t имеет вид $f(t_1, \ldots, t_{n_f})$ для функции $f \in \mathcal{F}$ и термов $t_1, \ldots, t_{n_f}$, положим $t^M(\overline{a}) = f^M(t_1^M(\overline{a}), \ldots, t_{n_f}^M(\overline{a}))$.

Теперь мы можем определить атомарную формулу:

$$\begin{array}{rcll}
\underline{\text{атомарная формула}} & \to & \underline{\text{терм}} = \underline{\text{терм}} & \\
& | & r(\underbrace{\underline{\text{терм}}, \ldots, \underline{\text{терм}}}_{n_r}), & r \in \mathcal{R}
\end{array}$$

Наконец, вот определение формулы:

$$\begin{array}{rcl}
\underline{\text{формула}} & \to & \underline{\text{атомарная формула}} \\
& | & \neg\underline{\text{формула}} \\
& | & (\underline{\text{формула}} \wedge \underline{\text{формула}}) \\
& | & (\underline{\text{формула}} \vee \underline{\text{формула}}) \\
& | & \forall v_i\ \underline{\text{формула}} \\
& | & \exists v_i\ \underline{\text{формула}}
\end{array}$$

Переменная v_i называется **связанной** в формуле φ, если она входит в φ под знаком квантора $\forall v_i$ или $\exists v_i$. Мы будем считать, что каждая переменная входит в формулу φ либо свободным образом, либо связанным. В частности, переименовав связанные переменные, можно исключить ситуации, в которых некоторые вхождения v_i связаны, а некоторые свободны: например, вместо формулы $v_2 = v_1 \wedge \exists v_1 c = v_1$ всегда можно рассмотреть эквивалентную ей формулу $v_2 = v_1 \wedge \exists v_3 c = v_3$.

Если φ — некоторая формула, все свободные переменные которой содержатся в наборе $v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}$, M — L-структура, а $\overline{a} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) \in M^m$, то мы можем подставить набор $\overline{a}$ в формулу φ и получить булево значение «истина» или «ложь»: формула φ после такой подстановки либо истинна либо ложна.

Более формально:

- если φ — атомарная формула вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — термы, то мы говорим, что $\varphi(\overline{a})$ истинна, если и только если $t_1^M(\overline{a})$ равно $t_2^M(\overline{a})$;

- если φ — атомарная формула вида $r(t_1, \ldots, t_{n_r})$, где $t_1, \ldots, t_{n_r}$ — термы, а $r \in \mathcal{R}$, то мы говорим, что $\varphi(\overline{a})$ истинна, если и только если набор $(t_1^M(\overline{a}), \ldots, t_{n_r}^M(\overline{a})) \in M^{n_r}$ содержится в множестве $r^M \subseteq M^{n_r}$;

- если φ — формула вида $\neg\psi$, где ψ — формула, то мы говорим, что $\varphi(\overline{a})$ истинна, если и только если $\psi(\overline{a})$ ложна;

- если φ — формула вида $\psi_1 \wedge \psi_2$, где ψ_1, ψ_2 — формулы, то мы говорим, что $\varphi(\overline{a})$ истинна, если и только если обе формулы $\psi_1(\overline{a})$ и $\psi_2(\overline{a})$ истинны;

- если φ — формула вида $\psi_1 \vee \psi_2$, где ψ_1, ψ_2 — формулы, то мы говорим, что $\varphi(\overline{a})$ ложна, если и только если обе формулы $\psi_1(\overline{a})$ и $\psi_2(\overline{a})$ ложны;

- если φ — формула вида $\forall v_{i_j}\ \psi$, где ψ — формула, то мы говорим, что $\varphi(\overline{a}, a_{i_j})$ истинна, если и только если формула $\psi(\overline{a}, b)$ истинна для каждого $b \in M$.

- если φ — формула вида $\exists v_{i_j}\ \psi$, где ψ — формула, то мы говорим, что $\varphi(\overline{a}, a_{i_j})$ истинна, если и только если существует $b \in M$ такое, что формула $\psi(\overline{a}, b)$ истинна.

Формула, не содержащая свободных переменных, называется **предложением**. Если $\varphi(\overline{a})$ истинна в M, мы будем писать $M \vDash \varphi(\overline{a})$; если φ — предложение, то можно обойтись без подстановки набора $\overline{a}$ и имеет смысл запись $M \vDash \varphi$.

Для записи формул мы будем также пользоваться полезными сокращениями:

- $\varphi \Rightarrow \psi$ вместо $\neg\varphi \vee \psi$;

- $\varphi \Leftrightarrow \psi$ вместо $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$;

- $\bigwedge_{i=1}^n \psi_i$ вместо $\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$;

- $\bigvee_{i=1}^n \psi_i$ вместо $\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n$.

Кроме того, удобно использовать символы $v, w, x, y, z, \ldots$ в качестве символов переменных вместе с $v_1, v_2, \ldots$.

0.1.3 Модели и теории

Пусть L — язык. Две L-структуры M и N называются **элементарно эквивалентными** (обозначение: $M \equiv N$), если для любого предложения φ в языке L выполнено $M \vDash \varphi$ тогда и только тогда, когда $N \vDash \varphi$.

Набор предложений языка L называется L-**теорией**. L-структура M называется **моделью** теории T (обозначение: $M \vDash T$), если $M \vDash \varphi$ для каждого предложения $\varphi \in T$.

Теория называется **выполнимой (satisfiable)**, если у нее есть модель. Легко привести пример теории, у которой нет модели: $\{\forall x\ x = 0, \exists x\ x \neq 0\}$.

Класс L-структур K называется **элементарным классом**, если найдется L-теория T такая, что $K = \{M \mid M \models T\}$.

Пусть M — некоторая L-структура. Рассмотрим множество предложений языка L, истинных в M: $\mathrm{Th}(M) = \{\varphi \mid M \models \varphi\}$. Это теория, называемая **полной теорией** структуры M. Элементарный класс моделей теории $\mathrm{Th}(M)$ в этом случае состоит в точности из L-структур, элементарно эквивалентных M.

Наконец, определим третье значение символа $\models$: если T — L-теория, а φ — L-предложение, будем говорить, что T **логически влечет** φ, если φ выполняется во всех моделях теории T, то есть, из $M \models T$ следует $M \models \varphi$.

1 Основы теории моделей

1.1 Теорема компактности

1.1.1 Теорема Геделя о полноте

Пусть M — L-структура, φ — предложение в языке L. Если мы хотим показать, что $T \models \varphi$, нам придется проверить выполнимость φ во всех моделях теории T. Обычно в математике мы все же так не поступаем, а приводим некоторое доказательство того, что из аксиом теории T следует предложение φ. Сейчас мы обрисуем, как отражаются доказательства в математической логике, не вдаваясь в детали.

Итак, **доказательством** предложения φ в теории T мы будем называть последовательность L-формул $\overline{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ такую, что

- $\psi_n = \varphi$;
- каждая формула ψ_i либо лежит в T, либо следует из [некоторых из] предыдущих формул $\psi_1, \ldots, \psi_{i-1}$ с помощью несложных логических процедур (*правил вывода*).

Мы не будем приводить полный список правил вывода, а приведем лишь один пример: «если φ и ψ, то $\varphi \wedge \psi$». Если существует доказательство предложения φ в теории T, мы будем говорить, что φ **выводимо** в T и обозначать это так: $T \vdash \varphi$. Мы требуем от правил вывода выполнения некоторых естественных свойств:

- soundness: если $T \vdash \varphi$, то $T \models \varphi$;
- если T — конечное множество предложений, то существует алгоритм, который по последовательности L-формул $\overline{\psi}$ и по предложению φ определяет, является ли $\overline{\psi}$ доказательством предложения φ в теории T.

Теорема 1.1.1.1 (Теорема Геделя о полноте). *Пусть T — L-теория, φ — L-предложение. $T \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $T \vdash \varphi$.*

Теория T называется **противоречивой** (**несовместной**, **inconsistent**), если $T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$ для некоторого предложения φ. В противном случае T называется **непротиворечивой** (**совместной**, **consistent**).

Следствие 1.1.1.2. *Теория T совместна тогда и только тогда, когда T выполнима (то есть, у T есть модель).*

Доказательство. Пусть T не имеет модели. Тогда, тривиальным образом, в любой модели теории T выполнено $(\varphi \wedge \neg\varphi)$. Это означает, что $T \models (\varphi \wedge \neg\varphi)$ и, в силу теоремы о полноте, $T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$, то есть, T противоречива. $\square$

1.1.2 Теорема компактности

Теорема 1.1.2.1 (Теорема компактности). *У теории* T *есть модель тогда и только тогда, когда у всякого конечного подмножества* T *есть модель.*

Доказательство. Очевидно, что любая модель T является моделью всякого конечного подмножества T. Обратно, если у T нет модели, то по теореме о полноте T противоречива. Пусть $\overline{\psi}$ — доказательство противоречия в T. В силу конечности $\overline{\psi}$ оно использует лишь конечное число предложений из T. Поэтому найдется конечное $T' \subseteq T$ такое, что $\overline{\psi}$ — доказательство противоречия в T'. Но тогда конечное подмножество T' теории T не имеет модели. $\square$

Эта теорема выглядит как простое следствие теоремы Геделя о полноте (и того факта, что доказательство имеет конечную природу), но является чрезвычайно важной в теории моделей. Мы не будем доказывать теорему Геделя, потому что нам не хочется разбираться в деталях определения правил вывода, а позже дадим альтернативное (и поучительное) доказательство теоремы компактности. На самом деле, мы докажем следующее усиление этой теоремы.

Теорема 1.1.2.2. *Пусть* T — L*-теория, и у каждого конечного подмножества теории* T *есть модель. Пусть* α — *бесконечный кардинал,* $\alpha \geqslant |L|$. *Тогда у теории* T *есть модель мощности не более* α.

1.1.3 Следствия из теоремы компактности

Посмотрим на некоторые применения теоремы компактности.

Предложение 1.1.3.1. *Пусть* $L = \{\cdot, +, <, 0, 1\}$, $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ — *полная теория натуральных чисел. Тогда существует* L*-структура* M *такая, что* $M \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$ *и найдется* $a \in M$ *такое, что* a *больше любого натурального числа.*

Доказательство. Добавим к L константу и рассмотрим язык $L^* = L \cup \{c\}$. Положим $T = \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \cup \{\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} < c \mid n = 1, 2, \ldots\}$. Проверим, что у любого конечного подмножества T есть модель. Действительно, мы можем сделать $\mathbb{N}$ моделью этого конечного подмножества, проинтерпретировав c как достаточно большое натуральное число. Значит, по теореме компактности у T есть модель. Если $a \in M$ — интерпретация константы c в этой модели, то a больше любого натурального числа. $\square$

Лемма 1.1.3.2. *Если* $T \models \varphi$, *то* $\Delta \models \varphi$ *для некоторого конечного подмножества* $\Delta \subseteq T$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\Delta \subseteq T$ — конечное подмножество и $\Delta \not\models \varphi$. Тогда у теории $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ есть модель. Значит, у любого конечного подмножества $T \cup \{\neg\varphi\}$ есть модель, и по теореме компактности $T \not\models \varphi$. $\square$

1.1.4 Топологическая интерпретация

Рассмотрим множество всех L-структур какой-нибудь ограниченной мощности (например, не выше $|L| + \aleph_0$) и профакторизуем его по отношению элементарной эквивалентности $\equiv$. Обозначим полученное фактор-множество через S. Для каждого L-предложения P рассмотрим множество $[P] = \{[M] \in S \mid M \models P\}$ (проверьте, что это корректно определенное подмножество в S). Зададим на S топологию, в которой множества вида $[P]$ образуют базу. Теорема компактности утверждает, что топологическое пространство S является компактным.

1.1.5 Ультрафильтры и ультрапроизведения

Наша ближайшая цель — доказательство теоремы компактности. Нам дана теория T и мы знаем, что у каждого ее конечного подмножества имеется модель. Мы «явно» построим модель теории T из моделей ее конечных подмножеств при помощи ультрапроизведения. Для этого нам нужно вспомнить понятия фильтра и ультрафильтра.

Определение 1.1.5.1. Пусть I — некоторое множество. Непустое семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества I называется **фильтром** на I, если

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

2. из $A \in \mathcal{F}$ и $A \subset A' \subset I$ следует, что $A' \in \mathcal{F}$.

3. из $A, B \in \mathcal{F}$ следует, что $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Неформальная интерпретация: мы вводим меру на множестве I, называя множества из фильтра $\mathcal{F}$ *множествами меры* 1, а дополнения к ним — *множествами меры* 0.

Определение 1.1.5.2. Фильтр $\mathcal{F}$ на множестве I называется **ультрафильтром**, если для любого $A \subset I$ либо $A \in \mathcal{F}$, либо $I \setminus A \in \mathcal{F}$.

Таким образом, в мере, соответствующей ультрафильтру, всякое подмножество I является измеримым.

Пример 1.1.5.3. Пусть A_0 — непустое подмножество I. Рассмотрим все подмножества I, содержащие A_0: $\mathcal{F}(A_0) = \{A \subset I \mid A_0 \subset A\}$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{F}(A_0)$ является фильтром; это ультрафильтр тогда и только тогда, когда A_0 состоит из одного элемента.

Пример 1.1.5.4. Пусть множество I бесконечно и $\mathcal{F}_F = \{A \subset I \mid I \setminus A \text{ конечно}\}$. Тогда $\mathcal{F}_F$ является фильтром на I; он называется **фильтром Фреше**.

Теорема 1.1.5.5. *Любой фильтр на* I *содержится в некотором ультрафильтре.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что ультрафильтры — это в точности максимальные (по включению) фильтры; утверждение теоремы теперь легко следует из леммы Цорна. □

Пусть теперь $\{M_i\}_{i\in I}$ — набор структур в языке L, проиндексированный множеством I, на котором задан некоторый фильтр $\mathcal{F}$. Рассмотрим произведение всех этих структур $M = \prod_{i\in I} M_i$. Мы будем воспринимать это произведение как множество функций $\varphi\colon I \to \bigcup_{i\in I} M_i$ таких, что $\varphi(i) \in M_i$ для всех $i \in I$. Введем на M отношение эквивалентности: отождествим функции, совпадающие «почти всюду», то есть, на «множестве меры 1» в соответствии с нашим фильтром $\mathcal{F}$. Итак, будем говорить для $\varphi, \psi \in M$, что $\varphi \sim \psi$, если $\{i \in I \mid \varphi(i) = \psi(i)\} \in \mathcal{F}$. Несложно проверить (с помощью определения фильтра), что $\sim$ является отношением эквивалентности. Фактор-множество по этому отношению обозначим через $M/\mathcal{F}$. Для элемента $\varphi \in M$ мы будем обозначать через $[\varphi]$ его класс в $M/\mathcal{F}$.

Сейчас мы естественным образом превратим $M/\mathcal{F}$ в L-структуру, пользуясь тем, что каждое множество M_i является L-структурой. Нам нужно задать интерпретации символов констант, отношений и функций. Мы проделаем это только для символов отношений, оставив интерпретации констант и функций читателю в качестве упражнения. Итак, пусть r — символ отношения в L арности n_r. Пусть $[\varphi_1], \dots, [\varphi_{n_r}]$ — набор элементов $M/\mathcal{F}$. Положим $([\varphi_1], \dots, [\varphi_{n_r}]) \in r^{M/\mathcal{F}}$ тогда и только тогда, когда $\{i \in I \mid (\varphi_1(i), \dots, \varphi_{n_r}(i)) \in r^{M_i}\} \in \mathcal{F}$; иными словами, когда i-е компоненты набора φ находятся в отношении r для почти всех $i \in I$.

Упражнение 1.1.5.6. *Проверьте, что такое определение корректно, то есть, не зависит от выбора представителей* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_r}$.

Таким образом, мы определили L-структуру $\prod_{i \in I} M_i / U$ — **фильтрованное произведение L-структур** M_i **вдоль** $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}$ — ультрафильтр, такое произведение называется **ультрапроизведением**.

Теорема 1.1.5.7 (Теорема Лоса). *Пусть* M_i, $i \in I$ *— набор* L*-структур,* $\mathcal{F}$ *— ультрафильтр на* I, $M = \prod_{i \in I} M_i / \mathcal{F}$ *— ультрапроизведение вдоль* $\mathcal{F}$. *Для любой* L*-формулы* $P(x_1, \ldots, x_n)$ *со свободными переменными* $x_1, \ldots, x_n$ *и для любых* $[\varphi_1], \ldots, [\varphi_n] \in M$ *выполнено*

$$M \vDash P([\varphi_1], \ldots, [\varphi_n]) \text{ тогда и только тогда, когда } \{i \in I \mid M_i \vDash P(\varphi_1(i), \ldots, \varphi_n(i))\} \in \mathcal{F}.$$

Доказательство. Индукция по формулам: для атомарных формул теорема верна в силу нашего определения L-структуры на M. Остается рассмотреть формулы вида $P_1 \wedge P_2$, $\exists x P_1$ и $\neg P_1$. Для $P = P_1 \wedge P_2$ утверждение верно в силу определения фильтра.

Пусть теперь $P = \exists x P_1$. Если $M \vDash \exists x P_1([\varphi_1], \ldots, [\varphi_n], x)$, то, по определению, в структуре M найдется элемент $[\varphi]$ такой, что $M \vDash P_1([\varphi_1], \ldots, [\varphi_n], [\varphi])$. По предположению индукции из этого следует, что $M_i \vDash P_1(\varphi_1(i), \ldots, \varphi_n(i), \varphi_{n+1}(i))$ для почти всех $i \in I$. Поэтому $M_i \vDash \exists x P_1(\varphi_1(i), \ldots, \varphi_n(i), x)$ для почти всех $i \in I$.

Обратно, если $M_i \vDash \exists x P_1(\varphi_1(i), \ldots, \varphi_n(i), x)$, то существует функция φ такая, что $M_i \vDash \exists x P_1(\varphi_1(i), \ldots, \varphi_n(i), \varphi(x))$ выполнено для [по крайней мере] этих значений i, что и требовалось.

Наконец, пусть P имеет вид $\neg P_1$; утверждение теоремы в этом случае следует из определяющего свойства ультрафильтра. □

1.1.6 Доказательство теоремы компактности

Доказательство теоремы 1.1.2.2. По предположению, у каждого конечного подмножества теории T есть модель. Доказательство будем состоять из последовательных приближений: сначала мы покажем, что у T есть *какая-то* модель, затем покажем, что есть модель мощности не больше α.

- Без ограничения общности можно считать, что теория T вместе с любым конечным набором предложений $P_1, \ldots, P_n$ содержит и предложение $P_1 \wedge \cdots \wedge P_n$. По предположению у каждого предложения $P \in T$ имеется модель M_P. Определим ультрафильтр на T следующим образом: для каждого $P \in T$ рассмотрим множество $X_P = \{Q \in T \mid Q \vDash P\}$. Очевидно, что $X_{P_1 \wedge P_2} = X_{P_1} \cap X_{P_2}$. Натянем на множество $\{X_P\}_{P \in T}$ фильтр. Точнее, рассмотрим, множество $\mathcal{F}_0 = \{Y \subseteq T \mid X_P \subseteq Y \text{ для некоторого } P \in T\}$. Очевидно, что $\mathcal{F}_0$ является фильтром, и по теореме 1.1.5.5 содержится в некотором ультрафильтре $\mathcal{F}$. По теореме Лоса 1.1.5.7 ультрапроизведение $\prod_{P \in T} M_P / \mathcal{F}$ является моделью для любого предложения $P \in T$, поэтому оно является моделью T.

- Теперь можно считать, что у T есть модель M мощности больше α. Пусть M_0 — некоторое подмножество M мощности α. Сейчас мы расширим множество M_0 так, чтобы оно стало моделью теории T. Выберем некоторый элемент $a_0 \in M_0$. Для каждой L-формулы $P(v_1, \ldots, v_n)$ определим его **функцию Скулема** $g_P \colon M^{n-1} \to M$ следующим образом:

$$g_P(a_1, \ldots, a_{n-1}) = \begin{cases} a \in A \text{ такой, что } M \vDash P(a_1, \ldots, a_{n-1}, a), & \text{если такой существует,} \\ a_0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим замыкание M' относительно всех функций g_P. Заметим, что для любого символа функции f языка L арности $n-1$ интерпретация функция f^M, ограниченная на M', совпадает с функцией Скулема g_P для предложения P вида $f(v_1,\dots,v_{n-1}) = v_n$. Поэтому множество M' само является L-структурой. Индукцией по формулам несложно доказать, что для любой L-формулы $Q(v_1,\dots,v_n)$ и для любых $b_1,\dots,b_n \in M'$ выполнено

$$M \models Q(b_1,\dots,b_n) \text{ тогда и только тогда, когда } M' \models Q(b_1,\dots,b_n).$$

Поэтому M' является моделью теории T. С другой стороны, из того, что $\alpha \geqslant |L|$, следует, что мощность M' равна α.

□

1.1.7 Теорема Левенгейма–Скулема

Можно еще усилить теорему компактности и доказать, что у теории T имеется модель мощности *ровно* α. Однако, в этом случае приходится накладывать дополнительные ограничения на T.

Теорема 1.1.7.1 (Теорема Левенгейма–Скулема). *Пусть* T — L*-теория, у которой есть бесконечная модель* M*,* α — *бесконечный ординал,* $\alpha \geqslant |L|$*. Тогда у* T *есть модель мощности ровно* α*.*

Доказательство. Добавим к языку L константы c_β для всех $\beta < \alpha$, а к теории T — предложения $\neq (c_\beta = c_\gamma)$ для всех $\beta, \gamma < \alpha$ таких, что $\beta \neq \gamma$. Полученную теорию обозначим через T'. В силу бесконечности M у любого конечного подмножества T' есть модель: можно рассмотреть саму модель M и проинтерпретировать конечное число констант c_β, входящие в предложения из этого конечного подмножества, как различные элементы M, а остальные константы c_β произвольным образом. По теореме компактности у T' есть модель M' мощности не больше α. С другой стороны, добавленные предложения гарантируют, что M' имеет мощность $\geqslant \alpha$. Осталось заметить, что M' является моделью и для исходной теории T. □

Упражнение 1.1.7.2. *Приведите пример теории, у которой есть только конечные модели.*

1.2 Полные теории

1.2.1 Полнота и категоричность

Определение 1.2.1.1. L-теория T называется **полной**, если для любого L-предложения φ выполнено либо $T \models \varphi$, либо $T \models \neg\varphi$.

Нетрудно проверить, что для любой L-структуры M полная теория $\mathrm{Th}(M)$ является полной. Описать теорию $\mathrm{Th}(M)$ обычно достаточно сложно; в таком случае полезно найти простую L-теорию T такую, что $M \models T$ и T полна. В этом случае $M \models \varphi$ равносильно $T \models \varphi$.

Определение 1.2.1.2. Пусть α — бесконечный кардинал, T — теория, у которой есть модель мощности α. Теория T называется α**-категоричной**, если любые две модели T мощности α изоморфны.

Пример 1.2.1.3. Рассмотрим пустой язык L и пустую теорию T. Модели этой теории — просто множества. Две модели T изоморфны тогда и только тогда, когда они равномощны. Поэтому T является α-категоричной для любого кардинала α.

Пример 1.2.1.4. Пусть язык L состоит из одного символа r бинарного отношения, а T — теория отношений эквивалентности с ровно двумя классами эквивалентности, каждый из которых бесконечен. Тогда теория T является $\aleph_0$-категоричной. Действительно, если счетное множество разбито на два бесконечных подмножества, то каждое из них счетно. С другой стороны, T не α-категорична ни для какого кардинала $\alpha > \aleph_0$. Пример двух неизоморфных моделей: в одной оба класса эквивалентности имеют мощность α, а в другой один класс счетен, а другой имеет мощность α.

1.2.2 Бесконечно делимые абелевы группы без кручения

Пример 1.2.2.1. Пусть $L = \{+, 0\}$ — язык абелевых групп, а T — теория нетривиальных делимых абелевых групп без кручения. Иными словами, T задается аксиомами абелевых групп вместе с предложениями $\exists x(x \neq 0)$, $\forall x \exists y(\underbrace{y + \cdots + y}_{n} = x)$ и $\forall x(\underbrace{x + \cdots + x}_{} \neq 0)$ для всех натуральных $n > 0$.

Предложение 1.2.2.2. *Теория T является α-категоричной для всех $\alpha > \aleph_0$, но не $\aleph_0$-категоричной.*

Доказательство. Заметим, что нетривиальные делимые абелевы группы без кручения — это в точности нетривиальные векторные пространства над $\mathbb{Q}$. Для этого возьмем элемент $a \in A$ в такой группе, рациональное число $q = m/n$ и определим элемент $qa \in A$ по следующему рецепту. Для начала воспользуемся делимостью и найдем $b \in A$ такой, что $nb = a$. Заметим, что если $b' \in A$ — другой элемент с тем же свойством, то $n(b - b') = 0$, откуда в силу отсутствия кручения следует, что $b = b'$. Поэтому такой элемент b определен однозначно; обозначим его через a/n и положим $qa = m \cdot (a/n)$. Нетрудно проверить, что эта операция корректно определена и задает на A каноническую структуру векторного пространства над $\mathbb{Q}$.

Осталось заметить, что два векторных пространства над $\mathbb{Q}$ изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают, и что мощность векторного пространства над $\mathbb{Q}$ размерности α равна $\alpha + \aleph_0$. Поэтому размерность пространства мощности $\alpha > \aleph_0$ определена однозначно; в то же время, неизоморфные векторные пространства размерностей $1, 2, \ldots, \aleph_0$ счетны. □

1.2.3 Алгебраически замкнутые поля

Пусть $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ — язык теории колец. Рассмотрим следующие L-теории: ACF — теория алгебраически замкнутых полей, ACF_p — теория алгебраически замкнутых полей характеристики p, где p — простое число или 0. Мы будем задавать ACF известными аксиомами поля вместе с аксиомами $\forall a_1 \ldots \forall a_n \exists x(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0)$ для всех натуральных $n > 0$. После этого для простого числа p теория ACF_p задается аксиомами ACF вместе с аксиомой $\forall x(\underbrace{x + \cdots + x}_{p} = 0)$. Теория ACF_0 задается аксиомами ACF вместе с аксиомами $\neg\forall x(\underbrace{x + \cdots + x}_{p} = 0)$ для всех простых p.

Теория алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики также является полной; доказательство этого факта похоже на доказательство предложения 1.2.2.2 с заменой размерности на степень трансцендентности.

Предложение 1.2.3.1. *Теория ACF_p является α-категоричной для всех несчетных кардиналов α.*

Доказательство. Хорошо известно, что в каждом расширении полей можно выбрать базис трансцендентности, мощность которого определена однозначно; кроме того, два *алгебраически замкнутых* поля изоморфны тогда и только тогда, когда у них совпадают характеристики и степени трансцендентности (над простым подполем). Нетрудно видеть, что если эта степень трансцендентности равна α, то поле имеет мощность $\alpha + \aleph_0$. Поэтому степень трансцендентности алгебраически замкнутого поля мощности $\alpha > \aleph_0$ определена однозначно; в то же время, неизоморфные поля степени трансцендентности $1, 2, \ldots, \aleph_0$ счетны. □

1.2.4 Тест Вота

Теорема 1.2.4.1 (Тест Вота). *Пусть T — выполнимая теория без конечных моделей, которая является α -категоричной для некоторого бесконечного кардинала $\alpha \geqslant |L|$. Тогда T полна.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого предложения φ выполнено $T \nvDash \varphi$ и $T \nvDash \neg\varphi$. Это означает, что у теорий $T_0 = T \cup \{\varphi\}$ и $T_1 = T \cup \{\neg\varphi\}$ есть модели. Поскольку у T нет конечных моделей, у T_0 и T_1 есть бесконечные модели. По теореме 1.1.7.1 можно найти структуры M_0 и M_1 мощности α такие, что $M_0 \vDash T_0$ и $M_1 \vDash T_1$. По построению теорий T_0 и T_1 модели M_0 и M_1 не являются элементарно эквивалентными, и потому неизоморфны. Это противоречит α-категоричности T. □

Замечание 1.2.4.2. Предположение об отсутствии конечных моделей T необходимо: пусть T — теория в языке $\{+, 0\}$ групп, в которых каждый элемент имеет порядок 2. Можно показать, что T является α-категоричной для всех $\alpha \geqslant \aleph_0$. Однако, T не полна: предложение $\exists x \exists y \exists z\ (x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x)$ ложно в двухэлементной группе и истинно в остальных моделях T.

Из теста Вота 1.2.4.1 и теорем 1.2.2.2 и 1.2.3.1 следует, что теория ACF_p полна.

Следствие 1.2.4.3. *Пусть φ — предложение в языке колец. Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *φ истинно в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.*
2. *φ истинно в каждом алгебраически замкнутом поле характеристики 0.*
3. *φ истинно в некотором алгебраически замкнутом поле характеристики 0.*
4. *Существует сколь угодно большие простые числа p такие, что φ истинно в некотором алгебраически замкнутом поле характеристики p.*
5. *Существует m такое, что для всех $p > m$ φ истинно во всех алгебраически замкнутых полях характеристики p.*

Доказательство. Пункты (1)–(3) равносильны в силу полноты ACF_p. Очевидно, что из (5) следует (4).

(2) $\Rightarrow$ (5): пусть $\mathrm{ACF}_0 \vDash \varphi$. По теореме Геделя о полноте 1.1.1.1 это означает, что $\mathrm{ACF}_0 \vdash \varphi$. Вывод предложения φ из аксиом ACF_0 использует лишь конечное число аксиом вида $\neg(\underbrace{x + \cdots + x}_{p} = 0)$, поэтому он верен и в теории ACF_p для всех p, начиная с некоторого m.

(4) $\Rightarrow$ (2): от противного. Если $ACF_0 \not\models \varphi$, то в силу полноты $ACF_0 \models \neg\varphi$. Применив рассуждение из предыдущего абзаца, получаем, что $ACF_p \models \neg\varphi$ для всех достаточно больших p, что противоречит предположению (4). $\square$

Упражнение 1.2.4.4. *Избавьтесь от ссылки на теорему Геделя о полноте 1.1.1.1 в этом доказательстве, воспользовавшись вместо нее теоремой компактности 1.1.2.2.*

1.2.5 Приложение: теорема Акса–Гротендика

Теорема 1.2.5.1 (Теорема Акса–Гротендика). *Всякое инъективное полиномиальное отображение из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$ сюръективно.*

Основным соображением в доказательстве является тот факт, что для конечного поля k всякое инъективное отображение $k^n \to k^n$ сюръективно.

Лемма 1.2.5.2. *Всякое инъективное полиномиальное отображение* $f\colon (\overline{\mathbb{F}_p})^n \to (\overline{\mathbb{F}_p})^n$ *сюръективно.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\overline{a} \in (\overline{\mathbb{F}_p})^d$ — набор коэффициентов f, и $\overline{b} \in (\overline{\mathbb{F}_p})^n$ — вектор, не лежащий в образе f. Пусть k — подполе $\overline{\mathbb{F}_p}$, порожденное координатами $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Тогда $f|_{k^n}$ — инъективное, но не сюръективное полиномиальное отображение из k^n в себя Но поле k конечно — противоречие. $\square$

Доказательство теоремы Акса–Гротендика 1.2.5.1. Предположим, что найдется инъективное, но не сюръективное отображение $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ такое, что f_i — многочлены от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Пусть степени всех многочленов f_i меньше натурального числа d. Напишем предложение в языке L, выражающее тот факт, что для набора отображений $(f_1, \ldots, f_n)$ степеней меньше d инъективность влечет сюръективность. Это можно сделать, поскольку отображения f_i задаются конечным числом коэффициентов. Например, подойдет предложение вида «для любого набора коэффициентов f_i из того, что

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} (f_i(x_1, \ldots, x_n) = f_i(x_1, \ldots, x_n)) \Rightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} (x_i = y_i) \right),$$

следует, что $\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x_1 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{i=1}^{n} (f_i(x_1, \ldots, x_n) = y_i))$». По лемме 1.2.5.2 такое предложение выполнено в $\overline{\mathbb{F}_p}$ для всех p. В силу полноты ACF_p оно логически следует из ACF_p, и по следствию 1.2.4.3 оно логически следует и из ACF_0. Получаем противоречие. $\square$

1.3 Исключение кванторов

1.3.1 Определимые множества

Определение 1.3.1.1. Пусть M — структура в языке L, $A \subseteq M$, n — натуральное число. Подмножество $X \subseteq M^n$ называется **определимым над** A, или A-**определимым**, если существует формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ и элементы $a_1, \ldots, a_m \in A$ такие, что $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in M^n \mid M \models \varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)\}$. Если подмножество $X \subseteq M^n$ определимо над M, оно называется **определимым**.

В следующих примерах L_r — язык $(+, -, \cdot, 0, 1)$ теории колец.

Пример 1.3.1.2. Пусть $M = R$ — коммутативное кольцо, $p(x) \in R[x]$ — некоторый многочлен. Тогда множество его корней $X = \{x \in R \mid p(x) = 0\}$ определимо. Более того, X определимо над любым подмножеством R, содержащим коэффициенты многочлена p.

Пример 1.3.1.3. Пусть $M = \mathbb{R}$. Отношение порядка на $\mathbb{R}$ определимо (и даже $\emptyset$-определимо) в следующем смысле: множество $X = \{(x, y) \mid x < y\}$ определимо формулой $\exists z(z \neq 0 \wedge y = x + z^2)$.

Пример 1.3.1.4. Пусть теперь $M = \mathbb{Z}$. Отношение порядка на $\mathbb{Z}$ тоже определимо: обозначим через $\varphi(x, y)$ формулу

$$\exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \exists z_4 (z_1 \neq 0 \wedge y = x + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2).$$

По теореме Лагранжа $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x < y\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid M \vDash \varphi(x, y)\}$.

Пример 1.3.1.5. Пусть F — поле, $M = F[x]$. Тогда подмножество $F \subset F[x]$ определимо формулой $x = 0 \vee \exists y(xy = 1)$.

Пример 1.3.1.6. Пусть $M = \mathbb{C}(t)$ — поле рациональных функций от одной комплексной переменной t. Тогда $\mathbb{C}$ определимо в $\mathbb{C}(t)$ формулой $\exists x \exists y(y^2 = v \wedge x^3 + 1 = v)$. Действительно, если $z \in \mathbb{C}$, то найдутся $x, y \in \mathbb{C} \subset \mathbb{C}(t)$ такие, что $y^2 = x^3 + 1 = z$. Обратно, предположим, что $f, g, h \in \mathbb{C}(t)$ таковы, что $h = g^2 = f^3 + 1$. Тогда отображение $t \mapsto (f(t), g(t))$ является рациональным отображением из открытого по Зарискому подмножества $\mathbb{C}$ в эллиптическую кривую $E = \{(x, y) in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^3 + 1\}$. Хорошо известно, что любое такое отображение постоянно, то есть, $h \in \mathbb{C}$.

Пример 1.3.1.7. Пусть $M = \mathbb{Q}$. Обозначим через $\varphi(x, y, z)$ формулу

$$\exists a \exists b \exists c(xyz^2 + 2 = a^2 + xb^2 - yc^2),$$

а через $\psi(x)$ — формулу

$$\forall y \forall z((\varphi(y, z, 0) \wedge (\forall w(\varphi(y, z, w) \Rightarrow \varphi(y, z, w + 1)))) \Rightarrow \varphi(y, z, x)).$$

Тогда $\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Q} \mid \mathbb{Q} \vDash \psi(x)\}$ (см. Julia Robinson, *Definability and decision problems in arithmetic*, J. Symbolic Logic **14** (1949), 98–114; доказательство этого факта опирается на теорему Хассе о представимости рационального числа квадратичной формой). Таким образом, $\mathbb{Z}$ определимо в $\mathbb{Q}$.

1.3.2 Определимость и вычислимость

Пример 1.3.2.1. Пусть $M = \mathbb{N}$ — структура в языке $L = (+, \cdot, 0, 1)$. Определимые подмножества этой структуры устроены весьма сложным образом. К примеру, существует L-формула $T(e, x, s)$ такая, что $\mathbb{N} \vDash T(e, x, s)$ тогда и только тогда, когда машина Тьюринга с программой номер e, получив на вход число x, завершает работу не более чем за s шагов (см., например, Stephen Cole Kleene, 1943, *Recursive predicates and quantifiers*, Transactions of the AMS, **53** n. 1, pp. 41–73). Поэтому машина Тьюринга с программой номер e завершает работу на входе x тогда и только тогда, когда $\mathbb{N} \vDash \exists s T(e, x, s)$. Это означает, что множество таких пар (e, x) определимо. В то же время, хорошо известно, что это множество не вычислимо.

Следствие 1.3.2.2. *Полная теория* $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ *натуральных чисел в языке* $L = (+, \cdot, 0, 1)$ *неразрешима, то есть, не существует алгоритма, который, получив на вход* L-*предложение* ψ, *завершал бы свою работу ответом «да» в случае* $\mathbb{N} \vDash \psi$ *и ответом «нет» в случае* $\mathbb{N} \vDash \neg\psi$.

Доказательство. Для натуральных чисел e, x обозначим через $\varphi_{e,x}$ предложение

$$\exists s T(\underbrace{1+\cdots+1}_{e}, \underbrace{1+\cdots+1}_{x}, x).$$

Если бы описанный алгоритм существовал, мы могли бы определить, заканчивает ли работу программа e на входе x, отдав этому алгоритму предложение $\varphi_{e,x}$ и выяснив, верно ли, что $\mathbb{N} \models \varphi_{e,x}$. $\square$

По соображениям мощности неопределимых подмножеств $\mathbb{N}^n$ гораздо больше, чем определимых: всего подмножеств в $\mathbb{N}^n$ примерно континуум, а предложений (и, следовательно, определимых подмножеств) лишь счетное число. В то же время, класс определимых подмножеств достаточно широк. Например, *рекурсивно перечислимые* подмножества $\mathbb{N}^n$ являются определимыми.

Пример 1.3.2.3. Напомним, что подмножество $A \subseteq \mathbb{N}^n$ называется **рекурсивно перечислимым**, если существует алгоритм, который завершает свою работу в точности на входах из множества A. Равносильное определение: существует алгоритм, который выводит в точности все элементы множества A (в некотором порядке). По теореме Матиясевича–Робинсон–Дэвиса–Патнем (решение десятой проблемы Гильберта) для любого рекурсивно перечислимого подмножества $A \subseteq \mathbb{N}^n$ существует многочлен $p(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ с целыми коэффициентами такой, что

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \models \exists y_1 \ldots \exists y_m p(\overline{x}, \overline{y}) = 0\}.$$

Таким образом, любое рекурсивно перечислимое подмножество определяется формулой достаточно специального вида.

1.3.3 Определимость: контрпример

Приведем пример неопределимого множества. Для этого нам понадобится следующее предложение.

Предложение 1.3.3.1. *Пусть M — L-структура. Если подмножество $X \subseteq M^n$ определимо над $A \subseteq M$, то каждый L-автоморфизм M, тождественный на A, переводит X в себя. Иными словами, если $\sigma\colon M \to M$ — L-автоморфизм и $\sigma|_A = \mathrm{id}_A$, то $\sigma(X) = X$.*

Доказательство. Пусть X задается L-формулой $\psi(\overline{v}, \overline{a})$ для некоторого набора $\overline{a}$ элементов A. Пусть $\sigma\colon M \to M$ — автоморфизм, для которого $\sigma(\overline{a}) = \overline{a}$, и пусть $\overline{b} \in M^n$. Очевидно, что если $j\colon M \to N$ — изоморфизм L-структур, то $M \models \varphi(\overline{a})$ тогда и только тогда, когда $N \models \varphi(j(\overline{a}))$. Поэтому $M \models \psi(\overline{b}, \overline{a})$ равносильно $M \models \psi(\sigma(\overline{b}), \sigma(\overline{a}))$, что равносильно $M \models \psi(\sigma(\overline{b}), \overline{a})$. Это означает, что $\overline{b} \in X$ тогда и только тогда, когда $\sigma(\overline{b}) \in X$. $\square$

Следствие 1.3.3.2. *Подмножество $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ не определимо (в языке теории колец).*

Доказательство. Если $\mathbb{R}$ определимо, то оно определимо над конечным подмножеством $A \subset \mathbb{C}$. Пусть $r, s \in \mathbb{C}$ алгебраически независимы над A, причем $r \in \mathbb{R}$ и $s \notin \mathbb{R}$. Тогда найдется автоморфизм σ поля $\mathbb{C}$ такой, что $\sigma|_A = \mathrm{id}|_A$ и $\sigma(r) = s$. При этом $\sigma(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$, что противоречит предложению 1.3.3.1. $\square$

Мы воспользовались тем, что у поля $\mathbb{C}$ достаточно много автоморфизмов. Заметим, что такой прием не всегда работает: например, покажем, что у поля $\mathbb{R}$ вообще нет нетривиальных автоморфизмов. Любой автоморфизм $\mathbb{R}$ должен оставлять на месте $\mathbb{Q}$. Согласно примеру 1.3.1.3, отношение порядка определимо, поэтому оно сохраняется при автоморфизмах. Но $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, поэтому автоморфизмы оставляют на месте каждое вещественное число.

1.3.4 Исключение кванторов

В примере 1.3.2.3 мы видели, что отсутствие кванторов в формуле существенно сужает класс определяемых ей подмножеств. Так, подмножества $\mathbb{N}^n$, определяемые формулами без переменных — это фактически лишь решения систем полиномиальных уравнений и неравенств. В то же время, если разрешить последовательность подряд идущих кванторов существования, получатся уже все рекурсивно перечислимые множества.

Разумеется, гораздо проще исследовать множества, определяемые формулами без кванторов. В некоторых теориях так выглядят все определяемые подмножества. Нашей ближайшей целью станет доказательство того, что в теории алгебраически замкнутых полей любое определимое подмножество может быть определено формулой без кванторов. Например, хорошо известно, что формула $\exists x(ax^2 + bx + c = 0)$ эквивалентна (в теории ACF) формуле $a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c = 0$. Таким же свойством исключения кванторов обладает и теория вещественно замкнутых полей (в языке $\{+, -, \cdot, <, 0, 1\}$): та же формула $\exists x(ax^2 + bx + c = 0)$ эквивалентна в этой теории формуле

$$(a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac \geqslant 0) \vee (a = 0 \wedge (b \neq 0 \vee c = 0)).$$

Определение 1.3.4.1. Теория T обладает **исключением кванторов**, если для любой формулы φ найдется формула ψ без кванторов такая, что $T \vDash \varphi \Leftrightarrow \psi$.

1.3.5 Вложения

Определение 1.3.5.1. Пусть M, N — L-структуры. Инъективное отображение $i\colon M \to N$ называется L-**вложением**, если

- $i(c^M) = c^N$ для любого символа константы c языка L;
- $i(f^M(m_1, \ldots, m_{n_f}) = f^N(i(m_1), \ldots, i(m_{n_f}))$ для любого символа функции f языка L и для любых $m_1, \ldots, m_{n_f} \in M$;
- для любого символа отношения r языка L и любых $m_1, \ldots, m_{n_r} \in M$ выполнено $(m_1, \ldots, m_n) \in r^M$ тогда и только тогда, когда $(i(m_1), \ldots, i(m_n)) \in r^N$.

При этом M называется **подструктурой** N, а N — **расширением** M. Обозначение: $M \subseteq N$.

Замечание 1.3.5.2. Несложно показать, что если $i\colon M \to N$ — вложение, то для любой L-формулы $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ *без кванторов* и для любых $a_1, \ldots, a_n \in M$ выполнено $M \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ тогда и только тогда, когда $N \vDash \varphi(i(a_1), \ldots, i(a_n))$.

Определение 1.3.5.3. Вложение $i\colon M \to N$ называется **элементарным**, если для любой L-формулы $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ и для любых $a_1, \ldots, a_n \in M$ выполнено $M \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ тогда и только тогда, когда $N \vDash \varphi(i(a_1), \ldots, i(a_n))$. При этом M называется **элементарной подструктурой** N, а N — **элементарным расширением** M. Обозначение: $M \preccurlyeq N$

Определение 1.3.5.4. L-теория T называется **модельно полной**, если для любых моделей M, N теории T из $M \subseteq N$ следует $M \preccurlyeq N$.

Иными словами, T является модельно полной, если все вложения ее моделей элементарны.

Предложение 1.3.5.5. *Если в* T *есть исключение кванторов, то* T *модельно полна.*

Доказательство. Предположим, что $M \subseteq N$ — модели T. Пусть $\varphi(\overline{v})$ — L-формула, $\overline{a} \in M$. Тогда найдется формула без кванторов $\psi(\overline{v})$ такая, что $M \vDash \forall \overline{v}\ (\varphi(\overline{v}) \Leftrightarrow \psi(\overline{v}))$. По замечанию 1.3.5.2 $M \vDash \psi(\overline{a})$ равносильно $N \vDash \psi(\overline{a})$. Поэтому и $M \vDash \varphi(\overline{a})$ равносильно $N \vDash \varphi(\overline{a})$. $\square$

1.3.6 Диаграммы

Определение 1.3.6.1. Пусть M — L-структура. Определим новый язык L_M, добавив в L символы констант m для всех элементов M. После этого M можно считать L_M-структурой, проинтерпретировав добавленные константы тождественным образом. Полученную L_M-структуру мы будем обозначать через M_M. **Атомарной диаграммой** структуры M называется множество формул вида $\varphi(m_1, \dots, m_n)$ в языке L таких, что φ является либо атомарной формулой (см. 0.1.2), либо отрицанием атомарной, и при этом $M_M \vDash \varphi(m_1, \dots, m_n)$. Обратите внимание, что в последнем выражении мы подставили в формулу φ в качестве переменной m_i константу m_i языка L_M и получили предложение (формулу без переменных) в языке L_M. Мы будем обозначать атомарную диаграмму структуры M через $\mathrm{Diag}(M)$. **Полной диаграммой** структуры M называется множество $\mathrm{CDiag}(M)$ формул вида $\varphi(m_1, \dots, m_n)$ в языке L таких, что $M_M \vDash \varphi(m_1, \dots, m_n)$.

Замечание 1.3.6.2. Иными словами, диаграмма структуры M — это множество предложений φ в языке L_M таких, что φ атомарно или является отрицанием атомарного, и $M_M \vDash \varphi$. Полная диаграмма структуры M — это множество предложений φ в языке L_M таких, что $M_M \vDash \varphi$.

Лемма 1.3.6.3. *Пусть* N *— структура в языке* L_M*, и* $N \vDash \mathrm{Diag}(M)$*. Тогда существует* L*-вложение структуры* M *в структуру* N*, рассматриваемую как* L*-структуру.*

Доказательство. Определим $i\colon M \to N$ следующим образом: отправим элемент $m \in M$ в m^N, интерпретацию символа константы m языка L_M в структуре N. Пусть m_1, m_2 — два различных элемента M. Тогда формула $\neg(m_1 = m_2)$ лежит в $\mathrm{Diag}(M)$. Значит, по предположению $N \vDash \neg(m_1 = m_2)$, то есть, $m_1^N \neq m_2^N$. Поэтому i инъективно.

Пусть f — символ функции языка L, и $m_1, \dots, m_{n_f+1} \in M$ таковы, что $f^M(m_1, \dots, m_{n_f}) = m_{n_f+1}$. Тогда формула $f(m_1, \dots, m_{n_f}) = m_{n_f+1}$ лежит в $\mathrm{Diag}(M)$, откуда

$$f^N(i(m_1), \dots, i(m_{n_f})) = i(m_{n_f+1}) = i(f^M(m_1, \dots, m_{n_f})).$$

Наконец, пусть r — символ отношения языка L, и элементы $m_1, \dots, m_{n_r} \in M$ таковы, что $(m_1, \dots, m_{n_r}) \in r^M$. Тогда формула $r(m_1, \dots, m_{n_r})$ лежит в $\mathrm{Diag}(M)$, откуда получаем, что $(i(m_1), \dots, i(m_{n_r})) \in r^N$. Если же $(m_1, \dots, m_{n_r}) \notin r^M$, достаточно рассмотреть формулу $\neg r(m_1, \dots, m_{n_r})$. $\square$

Понятие диаграммы структуры помогает строить ее вложения в другие структуры. Аналогичным образом, понятие *полной* диаграммы структуры помогает строить ее *элементарные* вложения. Следующая лемма доказывается совершенно так же, как лемма 1.3.6.3.

Лемма 1.3.6.4. *Пусть* N *— структура в языке* L_M*, и* $N \vDash \mathrm{CDiag}(M)$*. Тогда существует элементарное* L*-вложение структуры* M *в структуру* N*, рассматриваемую как* L*-структуру.*

1.3.7 Сведение к случаю одного квантора

Следующая лемма сводит проверку к случаю формулы с одним экзистенциальным квантором.

Лемма 1.3.7.1. *Пусть* T *—* L*-теория. Предположим, что для каждой* L*-формулы без кванторов* $\theta(\bar{v}, w)$ *существует формула без кванторов* $\eta(\bar{v})$ *такая, что*

$$T \vDash \forall \bar{v}(\exists w\, \theta(\bar{v}, w) \Leftrightarrow \eta(\bar{v})).$$

Тогда в T *есть исключение кванторов.*

Доказательство. Пусть $\varphi(\bar v)$ — L-формула. Нам нужно найти формулу без кванторов, эквивалентную φ. Действуем индукцией по длине φ. Если в φ нет кванторов, доказывать нечего.

Если $\varphi(\bar v)$ имеет вид $\neg\theta(\bar v)$, то по предположению индукции $\theta(\bar v)$ эквивалентна формуле $\eta(\bar v)$ без кванторов; поэтому $\varphi(\bar v)$ эквивалентна формуле $\neg\eta(\bar v)$.

Если $\varphi(\bar v)$ имеет вид $\theta_0(\bar v)\wedge\theta_1(\bar v)$, то по предположению индукции каждая формула $\theta_i(\bar v)$ эквивалентна формуле $\eta_i(\bar v)$ без кванторов; поэтому $\varphi(\bar v)$ эквивалентна формуле $\eta_0(\bar v)\wedge\eta_1(\bar v)$.

Наконец, пусть $\varphi(\bar v)$ имеет вид $\exists w\ \theta(\bar v, w)$. Мы знаем, что $\theta(\bar v, w)$ эквивалентна формуле $\eta(\bar v, w)$ без кванторов. Поэтому $\varphi(\bar v)$ эквивалентна формуле $\exists w\ \eta(\bar v, w)$. По нашему предположению найдется формула $\psi(\bar v)$ без кванторов такая, что $\exists w\ \eta(\bar v, w)$ эквивалентна $\psi(\bar v)$. Но тогда $\varphi(\bar v)$ эквивалентна формуле $\psi(\bar v)$. $\square$

1.3.8 Критерий исключения кванторов

Следующая теорема предоставляет способ удостовериться, что данная формула эквивалентна формуле без кванторов.

Теорема 1.3.8.1. *Пусть* L *содержит символ константы* c, T — L-*теория,* $\varphi(\bar v)$ — L-*формула. Следующие утверждения равносильны:*

1. *Существует* L-*формула без кванторов* $\psi(\bar v)$ *такая, что* $T \models \forall\bar v\ (\varphi(\bar v) \Leftrightarrow \psi(\bar v))$.
2. *Если* M, N — *модели теории* T, A — L-*структура такая, что* $A \subseteq M$ *и* $A \subseteq N$, *то для каждого набора* $\bar a \in A$ *выполнено* $M \models \varphi(\bar a)$ *тогда и только тогда, когда* $N \models \varphi(\bar a)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): пусть $M \models \varphi(\bar a)$. По предположению это равносильно тому, что $M \models \psi(\bar v)$. По замечанию 1.3.5.2 это равносильно $A \models \psi(\bar v)$, что равносильно $N \models \psi(\bar v)$. Снова по предположению это равносильно $N \models \varphi(\bar v)$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Пусть $\varphi(\bar v)$ — некоторая формула, зависящая от переменных $\bar v = (v_1, \dots, v_m)$. Если $T \models \forall\bar v\ \varphi(\bar v$, то $T \models \forall\bar v\ (\varphi(\bar v \Leftrightarrow c = c)$. Это означает, что $\varphi(\bar v)$ эквивалентна формуле без кванторов $c = c$. Если же $T \models \forall\bar v\ \neg\varphi(\bar v$, то $T \models \forall\bar v\ (\varphi(\bar v \Leftrightarrow c \neq c)$. Это означает, что $\varphi(\bar v)$ эквивалентна формуле без кванторов $c \neq c$.

Поэтому мы можем считать, что $\varphi(\bar v)$ не является ни тождественно истинной, ни тождественно ложной формулой.

Рассмотрим множество $\Gamma(\bar v)$ всех формул $\psi(\bar v)$ от тех же переменных, что и $\varphi(\bar v)$ таких, что $\psi(\bar v)$ свободна от кванторов и $T \models \forall\bar v\ (\varphi(\bar v) \Rightarrow \psi(\bar v)$. Добавим в наш язык новые символы констант $d_1, \dots, d_m$, соответствующие переменным $v_1, \dots, v_m$. В следующей лемме будет доказано, что $T \cup \Gamma(\bar d) \models \varphi(\bar d)$. Тогда, в силу компактности, найдутся формулы $\psi_1(\bar d), \dots, \psi_n(\bar d) \in \Gamma(\bar d$ такие, что

$$T \models \psi_i(\bar d) \Rightarrow \varphi(\bar d).$$

Поэтому

$$T \models \forall\bar v\ \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(\bar v) \Rightarrow \varphi(\bar v)\right)$$

, и, по определению $\Gamma(\bar v)$,

$$T \models \forall\bar v\ \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(\bar v) \Leftrightarrow \varphi(\bar v)\right).$$

Кроме того, $\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(\overline{v})$ не содержит кванторов. Таким образом, осталось проверить следующую лемму. $\square$

Лемма 1.3.8.2. *В обозначениях предыдущей теоремы,* $T \cup \Gamma(\overline{d}) \vDash \varphi(\overline{d})$.

Доказательство. Действуем от противного: пусть у теории $T \cup \Gamma(\overline{d}) \cup \{\neg\varphi(\overline{d})$ есть модель M. Обозначим через A подструктуру в M, порожденную $\overline{d}$.

Пусть $\Sigma = T \cup \mathrm{Diag}(A) \cup \varphi(\overline{d})$. Покажем, что у Σ есть модель. Если это не так, то в силу компактности найдутся формулы без кванторов $\psi_1(\overline{d}), \dots, \psi_n(\overline{d}) \in \mathrm{Diag}(A)$ такие, что

$$T \vDash \forall \overline{d} \ \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(\overline{v}) \Rightarrow \neg\varphi(\overline{v}) \right).$$

Но тогда

$$T \vDash \forall \overline{d} \ \left(\varphi(\overline{v}) \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \neg\psi_i(\overline{v}) \right),$$

и получаем, что $\bigvee_{i=1}^{n} \neg\psi_i(\overline{v}) \in \Gamma(\overline{v})$. По определению A тогда получаем $A \vDash \bigvee_{i=1}^{n} \neg\psi_i(\overline{d})$, и одна из $\psi_i(\overline{d})$ не выполняется в A, что противоречит тому, что $\psi_i(\overline{d}) \in \mathrm{Diag}(A)$. Таким образом, у Σ есть модель.

Пусть $N \vDash \Sigma$. Тогда $N \vDash \varphi(\overline{d})$. Заметим, что $\mathrm{Diag}(A)$ содержится в Σ, и по лемме 1.3.6.3 тогда $A \subseteq N$. Но $M \vDash \neg\varphi(\overline{d})$; из условия (2) предыдущей теоремы теперь следует, что и $N \vDash \neg\varphi(\overline{d})$, противоречие. $\square$

Замечание 1.3.8.3. Можно подправить теорему 1.3.8.1 и избавиться от требование наличия символа константы в L. В этом случае в L вообще нет предложений без кванторов, но для каждого предложения найдется формула $\psi(v_1)$ без кванторов такая, что $T \vDash \forall v_1 \ (\varphi \Leftrightarrow \psi(v_1))$.

Соединяя теорему 1.3.8.1 с леммой 1.3.7.1, получаем следующий нехитрый тест на исключение кванторов.

Следствие 1.3.8.4. *Пусть* T — L*-теория. Предположим, что для любой формулы* $\varphi(\overline{v}, w)$ *без кванторов, если* $M, N \vDash T$, A *— общая подструктура в* M *и* N, $\overline{a} \in A$ *и* $b \in M$ *таков, что* $M \vDash \varphi(\overline{a}, b)$, *то найдется* $c \in N$ *такой, что* $N \vDash \varphi(\overline{a}, c)$. *Тогда в* T *есть исключение кванторов.*

1.3.9 Алгебраически замкнутые поля

Мы будем рассматривать теорию алгебраически замкнутых полей ACF в языке теории колец $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$. Обратите внимание, что мы включаем операцию вычитания. Таким образом, подструктуры модели этой теории — это области целостности.

Теорема 1.3.9.1. *В теории* ACF *есть исключение кванторов.*

Доказательство. Воспользуемся следствием 1.3.8.4. Пусть K, L — алгебраически замкнутые поля, A — область целостности такая, что $A \subseteq K \cap L$. Нам нужно показать, что если $\varphi(\overline{v}, w)$ — формула без кванторов, $\overline{a} \in A$, $b \in K$ и $K \vdash \varphi(\overline{a}, b)$, то найдется $c \in L$ такой, что $L \vDash \varphi(\overline{a}, c)$.

Пусть F — алгебраическое замыкание поля частных кольца A. Можно считать, что $F \subseteq K \cap L$. Мы покажем нечто более сильное: для $\overline{a} \in F$, $b \in K$ таких, что $K \vDash \varphi(\overline{a}, b)$, найдется $c \in F$ такой, что $F \vDash \varphi(\overline{a}, c)$. Тогда по замечанию 1.3.5.2 и $L \vDash \varphi(\overline{a}, c)$.

Запишем формулу φ в дизъюнктивной нормальной форме, то есть,

$$\varphi(\overline{v}, w) \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} \theta_{i,j}(\overline{v}, w).$$

Здесь каждая из формул $\theta_{i,j}(\overline{v}, w)$ атомарная или отрицание атомарной. Из того, что $K \models \varphi(\overline{a}, b)$ следует, что $K \models \bigwedge_{j=1}^{m} \theta_{i,j}(\overline{a}, b)$ для некоторого i. Поэтому можно считать, что φ является конъюнкцией атомарных или отрицаний атомарных. Заметим, что в нашем языке любая атомарная формула имеет вид $p(\overline{v}) = 0$ для некоторого многочлена p с целыми коэффициентами. При подстановке фиксированного $\overline{a} \in F$ в такой многочлен мы получаем многочлен от одной переменной с коэффициентами в F. Поэтому найдутся многочлены $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m \in F[X]$ такие, что формула $\varphi(\overline{a}, v)$ эквивалентна формуле

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i(v) = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} q_i(v) \neq 0.$$

Если хотя бы один из многочленов p_i нетривиален, то элемент b алгебраичен над F, и тогда $b \in F$. В этом случае можно взять $c = b$ и цель достигнута. Значит, можно считать, что формула $\varphi(\overline{a}, v)$ эквивалентна формуле

$$\bigwedge_{i=1}^{m} q_i(v) \neq 0.$$

Но для каждого i уравнение $q_i(x) = 0$ имеет лишь конечное число решений, а поле F бесконечно. Поэтому найдется $c \in F$ такой, что $F \models \varphi(\overline{a}, c)$. □

Замечание 1.3.9.2. Пусть K, L — алгебраически замкнутые поля и $K \subseteq L$. Тогда $K \preccurlyeq L$ в силу замечания 1.3.5.5.

1.3.10 Приложение: теорема Шевалле

Пусть k — поле, $p_1, \dots, p_r \in k[x_1, \dots, x_n]$. Напомним, что множества вида $V(p_1, \dots, p_r) = \{\overline{x} \in k^n \mid p_1(\overline{x}) = \dots = p_r(\overline{x}) = 0\}$ называются замкнутыми множествами в *топологии Зариского* на k^n.

Лемма 1.3.10.1. *Пусть k — поле. Подмножества k^n, определимые атомарными формулами — это в точности подмножества вида $V(p)$ для некоторого $p \in k[x_1, \dots, x_n]$. Подмножество k^n определимо формулой без кванторов тогда и только тогда, когда оно является булевой комбинацией замкнутых множеств топологии Зариского.*

Доказательство. Пусть $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ — атомарная формула в языке колец, определяющая множество X, то есть, $X = \{\overline{x} \mid \varphi(\overline{x}, \overline{a})$ для некоторого $\overline{a} \in k$. Нетрудно понять, что найдется многочлен $q(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{Z}[\overline{x}, \overline{y})$ такой, что формула $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ эквивалентна формуле $q(\overline{x}, \overline{y}) = 0$. Тогда $X = V(q(\overline{x}, \overline{a}))$, причем многочлен $q(\overline{x}, \overline{a})$ лежит в $k[\overline{x}]$. Обратно, для любого многочлена $p \in k[\overline{x}]$ можно найти многочлен $q \in \mathbb{Z}[\overline{x}, \overline{y}]$ и набор $\overline{a} \in k$ такой, что $p(\overline{x}) = q(\overline{x}, \overline{a})$; например, в качестве $\overline{a}$ можно взять коэффициенты p.

Если X замкнуто в топологии Зариского, то $X = V(p_1, \dots, p_r) = V(p_1) \cap \dots \cap V(p_r)$ для некоторых $p_1, \dots, p_r \in k[\overline{x}]$ (по теореме Гильберта о базисе). Множества, определимые формулами без кванторов — это в точности конечные булевы комбинации атомарно определяемых множеств, то есть, в точности булевы комбинации замкнутых в топологии Зариского. □

Определение 1.3.10.2. Конечные булевы комбинации множеств, замкнутых по Зарискому, называются **конструктивными множествами**.

Следствие 1.3.10.3. *Пусть $k = \overline{k}$ — алгебраически замкнутое поле.*

1. *Подмножество $X \subseteq k^n$ конструктивно тогда и только тогда, когда оно определимо.*
2. (теорема Шевалле). *Образ конструктивного множества при полиномиальном отображении конструктивен.*

Доказательство. 1. По лемме 1.3.10.1 конструктивные множества — это в точности множества, определимые формулами без кванторов. В силу исключения кванторов 1.3.9.1 любое множество является таким.

2. Пусть $X \subset k^n$ конструктивно: $X = \{\overline{x} \mid \varphi(\overline{x}, \overline{a})\}$ для некоторой формулы φ и $\overline{a} \in k$. Пусть $p\colon k^n \to k^m$ — полиномиальное отображение. Тогда образ X равен определимому множеству $\{y \in k^m \mid \exists x\ (\varphi(\overline{x}, \overline{a}) \wedge p(\overline{x}) = \overline{y})\}$, которое конструктивно.

□

1.3.11 Приложение: Nullstellensatz

Напомним, что для подмножества $X \subseteq k^n$ множество многочленов, обращающихся в нуль на X, является идеалом $I(X) = \{f \in k[\overline{x}] \mid f(\overline{x}) = 0$ для всех $\overline{x} \in X\}$ кольца $k[\overline{x}]$. Теорема Гильберта о нулях утверждает, что отображения I и V устанавливают биекцию между замкнутыми множествами топологии Зариского и радикальными идеалами в $k[\overline{x}]$. Для ее доказательства нам понадобится некоторый факт из коммутативной алгебры.

Лемма 1.3.11.1 (Примарное разложение). *Пусть $I \subseteq k[\overline{x}]$ — радикальный идеал. Найдутся простые идеалы $P_1, \ldots, P_m$, содержащие I, такие, что $I = P_1 \cap \cdots \cap P_m$, $I \neq \bigcap_{j \in J} P_j$ для всех $J \subsetneq \{1, \ldots, m\}$, и если $Q_1, \ldots, Q_n$ — еще один набор простых идеалов с теми же свойствами, то $n = m$ и $\{Q_1, \ldots, Q_n\} = \{P_1, \ldots, P_m\}$.*

Теорема 1.3.11.2 (Nullstellensatz). *Пусть $k = \overline{k}$ — алгебраически замкнутое поле. Если I, J — радикальные идеалы в $k[\overline{x}]$ такие, что $I \subsetneq J$, то $V(J) \subsetneq V(I)$.*

Доказательство. Очевидно, что $V(J) \subseteq V(I)$. Пусть $p \in J \setminus I$. По лемме 1.3.11.1 найдется простой идеал $P \supseteq I$ такой, что $p \notin P$. Покажем, что найдется $x \in V(P) \subseteq V(I)$ такой, что $p(x) \neq 0$. В этом случае $x \notin V(J)$, и $V(I) \neq V(J)$.

Заметим, что $k[\overline{x}]/P$ — область целостности, поэтому можно рассмотреть алгебраическое замыкание ее поля частных: $F = \overline{\mathrm{Frac}(k[\overline{x}]/P)}$. Пусть многочлены $q_1, \ldots, q_m \in k[\overline{x}]$ порождают идеал I. Обозначим через a_i образ элемента x_i в F. Поскольку $q_i \in P$ и $p \notin P$, получаем

$$F \models \bigwedge_{i=1}^{m} q_i(\overline{a}) = 0 \wedge p(\overline{a}) \neq 0.$$

Поэтому

$$F \models \exists \overline{v} \bigwedge_{i=1}^{m} q_i(\overline{v}) = 0 \wedge p(\overline{v}) \neq 0.$$

Поле k содержится в F, поэтому $k \preccurlyeq F$ (замечание 1.3.9.2). Значит,

$$k \models \exists \overline{v} \bigwedge_{i=1}^{m} q_i(\overline{v}) = 0 \wedge p(\overline{v}) \neq 0.$$

Поэтому найдется $\overline{b} \in k^n$ такой, что $q_1(\overline{b}) = \cdots = q_m(\overline{b}) = 0$ и $p(\overline{b}) \neq 0$, то есть, $\overline{b} \in V(P) \setminus V(J)$. □

1.3.12 Определимость структур

Сейчас мы хотим научиться сводить структуры в одном языке к структурам в другом языке. Пусть L_0, L_1 — языки, и A — L_0-структура. Мы хотим определить новую L_1-структуру при помощи A. Подлежащим множеством этой структуры будет фактор-множество некоторого определимого подмножества A^n по определимому отношению эквивалентности на нем. А именно, пусть $Q(\overline{x})$ — L_0-формула с n свободными переменными, $E(\overline{x}, \overline{y})$ — L_0-формула с $2n$ свободными переменными такая, что $E(A) = \{(\overline{x}, \overline{y}) \in A^n \times A^n \mid Q(\overline{x}) \wedge Q(\overline{y}) \wedge E(\overline{x}, \overline{y})\}$ является отношением эквивалентности на множестве $Q(A) = \{\overline{x} \in A^n \mid Q(\overline{x})\}$. Кроме этого, мы должны интерпретировать (определимым образом) константы, отношения и функции языка L_1 на полученном множестве. Сделаем это только для отошений (функции и константы можно считать частными случаями отношений): пусть $r \in L_1$ — символ отношения из языка L_1 арности n_r. Для задания его интерпретации необходима L_0-формула $R(\underbrace{\overline{x}, \ldots, \overline{x}}_{n_r})$ с $n \cdot n_r$ свободными переменными, задающая отношение на $Q(A)$, которое сохраняется отношением эквивалентности $E(A)$. В этом случае возникает отношение арности n_r на фактор-множестве $Q(A)/E(A)$

Итак, будем говорить, что L_1-структура M **определима** (или **интерпретируема**) в L_0-структуре A, если заданы L_0-формулы Q, E (с описанными выше свойствами), и L_0-формулы, задающие интерпретации всех символов языка L_1 так, что M изоморфна L_1-структуре $Q(A)/E(A)$.

Пример 1.3.12.1. Пусть F — поле, рассматриваемое как структура в языке колец $(+, \cdot, 0, 1)$, а $GL_n(F)$ — группа невырожденных матриц над F размера $n \times n$, рассматриваемая как структура в языке групп $(\cdot, e)$. Естественно интерпретировать $GL_n(F)$ на множестве $D = \{X = (x_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in F^{n^2} \mid \det(X) \neq 0\}$ с тривиальным отношением эквивалентности. Константа e интерпретируется как элемент D, у которого $x_{ii} = 1$ и $x_{ij} = 0$ при $i \neq j$; операция умножения матриц интерпретируется в языке колец посредством известных полиномиальных формул.

1.3.13 Приложение: теорема Мальцева

Напомним, что (абстрактная) группа G называется **линейной ранга** n, если она изоморфна подгруппе группы $GL_n(F)$ для некоторого поля F.

Теорема 1.3.13.1 (Теорема Мальцева). *Группа G линейна ранга n, если каждая конечно порожденная подгруппа G линейна ранга n.*

Доказательство. Пусть G — локально линейная группа ранга n, то есть, каждая конечно порожденная подгруппа G вкладывается в $GL_n(F)$ для некоторого поля F. Рассмотрим теорию T, состоящую из аксиом поля в языке $(+, \cdot, 0, 1)$. Обозначим через $D((x_{ij}))$ формулу с n^2 переменными, определяющую множество $\{(x_{ij}) \in F^{n^2} \mid \det(x_{ij}) \neq 0\}$. Пусть $\mathrm{Diag}(G)$ — диаграмма группы G (в языке теории групп). Напомним, что $\mathrm{Diag}(G)$ — это множество формул в языке, в котором для каждого элемента g группы G имеется символ константы c^g. Сейчас мы построим некоторое множество формул $\mathrm{Diag}^F(G)$ в языке теории колец с добавленными константами. А именно, для каждого элемента $g \in G$ добавим n^2 символов констант c^g_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Включим в $\mathrm{Diag}^F(G)$ формулы $D((c^g_{ij}))$. Кроме того, переведем каждую формулу из $\mathrm{Diag}(G)$ на язык теории полей: для этого достаточно научиться переводить формулу вида $c^g \cdot c^h = c^{gh}$, что делается формулой $\sum_k c^g_{ij} c^h_{kj} = c^{gh}_{ij}$.

Рассмотрим теперь множество предложений $\Sigma = T \cup \mathrm{Diag}^F(G)$. В силу предположения о локальной линейности G каждое конечное подмножество Σ имеет модель. По теореме компактности 1.1.2.1 у Σ есть модель. Интерпретации символов констант c^g_{ij} в этой модели задают искомое вложение G. □

1.4 Типы

1.4.1 Определения

Определение 1.4.1.1. Пусть L — некоторый язык, A — L-структура, X — некоторое подмножество A. Напомним, что через L_X мы обозначаем язык, полученный из L присоединением констант вида c_x для всех $x \in X$. Для элемента $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in A^n$ рассмотрим множество всех формул $\varphi(\bar{v})$ в языке L_X с n свободными переменными таких, что $A \vDash \varphi(\bar{b})$. Это множество называется **полным типом** $\bar{b}$ **над** X (по отношению к A) и обозначается через $\mathrm{tp}_A(\bar{b}/X) = \mathrm{tp}(\bar{b}/X)$. Элементы X называются **параметрами** этого полного типа. В случае $X = \emptyset$ мы пишем $\mathrm{tp}_A(\bar{b}) = \mathrm{tp}_A(\bar{b}/\emptyset)$.

Замечание 1.4.1.2. Неформально говоря, полный тип элемента над X — это все, что мы можем сказать про этот элемент, пользуясь формулами с параметрами из X. Заметим, что если B — элементарное расширение A, то $\mathrm{tp}_B(\bar{b}/X) = \mathrm{tp}_A(\bar{b}/X)$.

Определение 1.4.1.3. Пусть $P(\bar{x})$ — некоторое множество формул L с параметрами из X. Будем говорить, что $P(\bar{x})$ — **полный тип над** X (по отношению к A), если $P(\bar{x})$ — полный тип некоторого элемента $\bar{b}$ над X по отношению к некоторому элементарному расширению A.

Замечание 1.4.1.4. Неформально говоря, полный тип над X — это все, что мы можем сказать, пользуясь формулами с параметрами из X, про некоторый элемент $\bar{b}$, который в принципе может быть элементом A; он может лежать уже в A, а может — в некотором элементарном расширении A.

Определение 1.4.1.5. **Типом** над X (по отношению к A) называется произвольное подмножество некоторого полного типа над X. Тип, зависящий от n свободных переменных, называется n-типом. Будем говорить, что тип $P(\bar{x})$ над X **реализуется** элементом $\bar{b}$ из A, если $P \subseteq \mathrm{tp}_A(\bar{b}/X)$. Если P не реализуется никаким элементом в A, мы говорим, что A **опускает** тип P.

Замечание 1.4.1.6. Если $A \subseteq B$, то $\mathrm{tp}_A(a)$ и $\mathrm{tp}_B(a)$ могут быть различными. Однако, из определений сразу следует, что $A \preccurlyeq B$ влечет $\mathrm{tp}_A(a) = \mathrm{tp}_B(a)$.

Следующую теорему можно воспринимать как альтернативное определение типа и полного типа. Будем говорить, что множество Φ формул в языке L с параметрами в A **конечно реализуемо в** A, если для любого конечного подмножества Ψ в Φ выполнено $A \vdash \exists \bar{x} \bigwedge \Psi$.

Теорема 1.4.1.7. *Пусть L — язык, A — L-структура, X — некоторое подмножество A, и $\Phi(v_1, \ldots, v_n)$ — множество формул языка L с параметрами из X. Тогда*

1. *$\Phi(\bar{v})$ является типом над X по отношению к A тогда и только тогда, когда Φ конечно реализуемо в A.*

2. *$\Phi(\bar{v})$ является полным типом над X по отношению к A тогда и только тогда, когда Φ — максимальное (по включению) конечно реализуемое множество L-формул с параметрами в X.*

Доказательство. 1. Пусть Φ — полный тип над X по отношению к A. Тогда для некотророго элементарного расширения $A \preccurlyeq B$ найдется набор $\bar{b} \in B$ такой, что $B \models \bigwedge \Phi(\bar{b})$. Если Ψ — конечное подмножество Φ, то $B \models \bigwedge \Psi(\bar{b})$ и поэтому $B \models \exists \bar{v} \bigwedge \Psi(\bar{v})$. Поскольку $A \preccurlyeq B$, из этого следует, что $A \models \exists \bar{v} \bigwedge \Psi(\bar{v})$.

Обратно, если Φ конечно реализуемо в A, рассмотрим полную диаграмму $\mathrm{CDiag}(A)$ и добавим в наш язык новые константы $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_n)$. Рассмотрим теорию $T = \mathrm{CDiag}(A) \cup \Phi(\bar{c})$. У каждого ее конечного подмножества есть модель: дествительно, если $U \subseteq T$ конечно, рассмотрим множество Ψ формул $\psi(\bar{v}) \in \Phi$ таких, что $\psi(\bar{c}) \in U$. По предположению $A \models \exists \bar{x} \bigwedge \Psi$, поэтому для некоторого набор $\bar{a}$ в A выполнено $A \models \bigwedge(\bar{a})$. Интерпретируя константы $\bar{c}$ как соответствующие элементы набора $\bar{a}$, видим, что A является моделью U.

По теореме компактности 1.1.2.1 теперь у T есть модель C. При этом $C \models \mathrm{CDiag}(A)$, и по лемме 1.3.6.4 имеется элементарное вложение $e\colon A \to C$ (здесь C рассматривается как L-структура). Пусть $\bar{b}$ — интерпретация констант $\bar{c}$ в C. Тогда из $C \models T$ следует $C \models \bigwedge \Phi(\bar{b})$. Это означает, что $\Phi(\bar{v})$ является подмножеством полного типа элемента $\bar{b}$ в элементарном расширении A, что и требовалось.

2. Если Φ — полный тип над X, то для каждой формулы $\varphi(\bar{v})$ в языке L с параметрами из X множество Φ содержит либо φ, либо $\neg\varphi$. Поэтому Φ максимально среди всех типов над X по отношению к A. Обратно, пусть Φ максимально среди типов над X. При этом для некоторого элементарного расширения $A \preccurlyeq B$ найдется набор $\bar{b}$ такой, что $B \models \bigwedge \Phi(\bar{b})$, то есть, Φ содержится в полном типе элемента $\bar{b}$ над X. В силу максимальности теперь Φ совпадает с этим полным типом.

□

1.4.2 Нестандартный анализ

Сопоставим каждой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ символ функции $\bar{f}$ и рассмотрим язык $L_1\mathrm{Real}$, из этих символов. Заметим, что константы являются частным случаем функции, поэтому можно считать, что в нашем языке есть и символы для всех вещественных чисел. Кроме того, каждому подмножеству $\mathbb{R}^n$ можно сопоставить его характеристическую функцию, поэтому можно считать, что в нашем языке есть символы для всех отношений на $\mathbb{R}$. В частности, имеются символы для отношения порядка на $\mathbb{R}$, для стандартных арифметических операций.

Обозначим через $\mathbb{R}_{\mathrm{analysis}}$ множество $\mathbb{R}$ с тривиальной интерпретацией каждого символа $\bar{f}$: $\bar{f}^{\mathbb{R}_{\mathrm{analysis}}} = f$. Рассмотрим полную теорию $\mathrm{Th}(\mathbb{R}_{\mathrm{analysis}})$ этой $L_1\mathrm{Real}$-структуры. Модель $\mathbb{R}_{\mathrm{analysis}}$ мы будем называть **стандартной моделью** вещественных чисел, а остальные модели теории $\mathrm{Th}(\mathbb{R}_{\mathrm{analysis}})$ (они есть хотя бы по теореме компактности 1.1.7.1) — **нестандартными**. Заметим, что любая нестандартная модель вещественных чисел содержит $\mathbb{R}_{\mathrm{analysis}}$ в качестве подструктуры.

Предложение 1.4.2.1. *В любой нестандартной модели вещественных чисел найдется элемент α такой, что $0 < \alpha < 1/n$ для всех натуральных n.*

Доказательство. Пусть ${}^*\mathbb{R}$ — модель теории $\mathrm{Th}(\mathbb{R}_{\mathrm{analysis}})$. Если она отлична от $\mathbb{R}_{\mathrm{analysis}}$, то в ней найдется элемент γ, не являющийся вещественным числом. Пусть $[\gamma]^- = \{q \in$

$\mathbb{Q} \mid q < \gamma\}$, $[\gamma]^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > \gamma\}$. Если $[\gamma]^-$ пусто, то можно взять $\alpha = -\gamma^{-1}$. Если $[\gamma]^+$ пусто, то можно взять $\alpha = \gamma^{-1}$. Если же оба множества $[\gamma]^-$, $[\gamma]^+$ непусты, то они образуют дедекиндово сечение, задающее единственное вещественное число r. При этом либо $r > \gamma$, либо $r < \gamma$. В первом случае положим $\alpha = r - \gamma$, а во втором $\alpha = \gamma - r$. □

Далее мы фиксируем некоторую нестандартную модель вещественных чисел ${}^*\mathbb{R}$.

Определение 1.4.2.2. Элемент $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$, для которого $0 < \alpha < 1/n$ при всех натуральных n, называется **положительным бесконечно малым**. Элемент называется **бесконечно малым**, если он имеет вид α или $-\alpha$ для положительного бесконечно малого α. Элемент $\gamma \in {}^*\mathbb{R}$ называется **бесконечным**, если $[\gamma]^-$ или $[\gamma]^+$ пусто. В противном случае γ называется **ограниченным**.

Замечание 1.4.2.3. Заметим, что условия $0 < \alpha < 1/n$ образуют тип в теории $L_1\mathrm{Real}$, поскольку любой конечный поднабор этих условий реализуется некоторым вещественным числом (см. теорему 1.4.1.7). Предложение 1.4.2.1 утверждает, что любая нестандартная модель вещественных чисел реализует этот тип.

Несложно проверить, что подмножество $B \subseteq {}^*\mathbb{R}$ всех ограниченных элементов образует кольцо, а его подмножество $\mu \subseteq B$ бесконечно малых элементов — идеал в этом кольце. Для $\alpha \in \mu$, $r \in \mathbb{R}$ положим $\mathrm{st}\colon r + \alpha \mapsto r$; это правило задает корректно определенный сюрьективный гомоморфизм колец $B \to \mathbb{R}$, называемый **взятием стандартной части**; для $x \in B$ вещественное число $\mathrm{st}(x)$ называется **стандартной частью** x.

Заметим, что для любой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ наш язык содержит символ $\overline{f}$, который в нашей нестандартной модели ${}^*\mathbb{R}$ имеет некоторую интерпретацию; мы будем обозначать ее через ${}^*f$.

Упражнение 1.4.2.4.

1. *Докажите, что $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда ${}^*f(x + \alpha) - {}^*f(x)$ является бесконечно малым для любого $x \in (a, b)$ и для любого бесконечно малого α.*

2. *Докажите, что g является производной f на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда $g(x) = \mathrm{st}(({}^*f(x + \alpha) - {}^*f(x))/\alpha)$ для любого вещественного $x \in (a, b)$ и для любого бесконечно малого α.*

1.4.3 Элементарные цепочки моделей

Пусть L — язык, κ — некоторый ординал, и пусть задана последовательность L-структур

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_\alpha \subseteq \dots \qquad (\alpha < \kappa),$$

занумерованная ординалом κ, так что $A_\alpha \subseteq A_{\alpha+1}$ — вложение для каждого ординала $\alpha < \kappa$, и для всякого предельного ординала $\delta \leqslant \kappa$ структура A_δ определена следующим [естественным] образом:

- как множество $A_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} A_\alpha$;
- для каждого символа отношения r в L выполнено $r^{A_\delta} = \bigcup_{\alpha<\delta} r^{A_\alpha}$;
- для каждого символа функции f в L функция $f^{A_\delta}\colon A_\delta^m \to A_\delta$ переводит $\overline{a}$ в b если и только если $\overline{a}$ лежит в A_α для некоторого α и $f^{A_\alpha}(\overline{a}) = b$;
- для каждого символа константы C в L выполнено $c^{A_\delta} = c^{A_0}$.

Предложение 1.4.3.1. *Если для каждого ординала* $\alpha < \kappa$ *выполнено* $A_\alpha \preccurlyeq A_{\alpha+1}$, *то* $A_\alpha \preccurlyeq A_\delta$ *для всех* $\alpha < \delta \leqslant \kappa$.

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать это утверждение для всех предельных ординалов $\delta \leqslant \kappa$. По индукции можно предполагать, что $A_\alpha \preccurlyeq A_\beta$ для всех $\alpha < \beta < \delta$.

Нам нужно доказать, что для любой L-формулы $\varphi(\overline{x})$ и для любого $\overline{a}$ в A_α выполнено $A_\alpha \vDash \varphi(\overline{a})$ тогда и только тогда, когда $A_\delta \vDash \varphi(\overline{a})$. Конечно, мы воспользуемся индукцией по сложности формулы φ.

Для атомарной формулы φ утверждение следует из того, что $A_\alpha \subseteq A_\delta$ является вложением. Пусть $\varphi(\overline{x})$ имеет вид $\exists y\ \psi(\overline{x}, y)$. Если $A_\alpha \vDash \varphi(\overline{a})$, то для некоторого $b \in A_\alpha \subseteq A_\delta$ выполнено $\psi(\overline{a}, b)$, и поэтому в A_δ выполнено $\exists y\ \psi(\overline{a}, y)$, то есть, $A_\delta \vDash \varphi(\overline{a})$. Обратно, если $A_\delta \vDash \exists y\ \psi(\overline{a}, y)$, то $A_\delta \vDash \psi(\overline{a}, b)$ для некоторого $b \in A\delta$, и $b \in A_\beta$ для некоторого ординала β такого, что $\alpha < \beta < \delta$. По предположению индукции тогда $A_\beta \vDash \psi(\overline{a}, b)$. Это означает, что $A_\beta \vDash \exists y\ \psi(\overline{a}, y)$, откуда следует $A_\alpha \vDash \exists y\ \psi(\overline{a}, y)$ в силу элементарности вложения $A_\alpha \preccurlyeq A_\beta$. □

Определение 1.4.3.2. Цепочка моделей, удовлетворяющая условиям предложения 1.4.3.1, называется **элементарной**.

Лемма 1.4.3.3. *Пусть* $P = \{p^\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ — *множество* n*-типов,* A — *некоторая* L*-структура, а кардинал* κ *таков, что* $\kappa \geqslant \max\{|A|, |L|\}$. *Тогда найдется элементарное расширение* B *структуры* A *такое, что* $|B| = \kappa$ *и все типы из* P *реализуются в* B.

Доказательство. По предложению 1.4.3.1 достаточно доказать лемму для одноэлементного множества $P = \{p\}$. Рассмотрим расширение L' языка L_A константами $c_1, \ldots, c_n$ и теорию $T' = \mathrm{CDiag}(A) \cup \{\varphi(c_1, \ldots, c_n) \mid \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in p\}$. Из теоремы 1.4.1.7 сразу следует, что любое конечное подмножество T' имеет модель. По теореме компактности 1.1.2.2 у теории T' есть модель B мощности не более $|A| + \aleph_0$. При этом $B \vDash \mathrm{CDiag}(A)$, поэтому B, рассмотренная как L-структура, является элементарным расширением A. □

Упражнение 1.4.3.4. *Избавьтесь в доказательстве леммы 1.4.3.3 от ссылки на предложение 1.4.3.1, рассмотрев сразу все типы из* P.

1.4.4 Типы и автоморфизмы

Рассмотрим структуру рациональных чисел $\mathbb{Q}$ в языке L, состоящем из одного отношения порядка $<$. Обозначим через $p(\nu)$ множество формул $\{\varphi(\nu) \in L_{\mathbb{N}} \mid \varphi(1/2)\}$ — полный тип элемента $1/2$ над подмножеством натуральных чисел. Легко видеть, что $1/2$ — не единственная реализация типа p. Действительно, для любого рационального числа $0 < r < 1$ существует автоморфизм структуры $\mathbb{Q}$, который оставляет на месте все натуральные числа и переводит $1/2$ в r. Поэтому $\mathbb{Q} \vDash \varphi(1/2)$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{Q} \vDash \varphi(r)$. Значит, r реализует тип p.

Более того, элементы $\mathbb{Q}$, реализующие p — это в точности рациональные числа s, для которых $0 < s < 1$. Действительно: если $s \leqslant 0$ или $s \geqslant 1$, то формула $(0 < \nu) \wedge (\nu < 1)$ лежит в $p(\nu)$, но не выполняется для s. Поэтому s не может реализовывать тип p.

Мы использовали автоморфизмы структуры для построения элементов с одинаковым полным типом. Оказывается, что если разрешить переход к элементарному расширению, то верно и обратное: элементы с одинаковым полным типом должны переводиться друг в друга некоторым автоморфизмом некоторого расширения.

Предложение 1.4.4.1. *Пусть* M — L-*структура,* $X \subseteq M$. *Пусть* $\overline{a}, \overline{b} \in M^n$ *таковы, что* $\mathrm{tp}^M(\overline{a}/X) = \mathrm{tp}^M(\overline{a}/X)$. *Тогда найдется элементарное расширение* N *структуры* M *и автоморфизм* $\sigma\colon N \to N$ *такой, что* $\sigma(x) = x$ *для всех* $x \in X$ *и* $\sigma(\overline{a}) = \overline{b}$.

Для доказательства предложения 1.4.4.1 мы будем индуктивно строить нужное элементарное расширение; нам понадобится понятие частичного элементарного отображения.

Определение 1.4.4.2. Пусть M, N — L-структуры, $B \subseteq M$. Отображение $f\colon B \to N$ называется **частичным элементарным**, если для всех L-формул φ и для всех наборов $\overline{b}$ элементов B выполнено $M \models \varphi(\overline{b})$ тогда и только тогда, когда $N \models \varphi(f(\overline{b}))$

Следующая лемма предоставляет нам индукционный переход.

Лемма 1.4.4.3. *Пусть* M, N — L-*структуры,* $B \subseteq M$, $f\colon B \to N$ — *частично элементарное отображение, и* $b \in M$. *Существует элементарное расширение* N_1 *структуры* N *и частично элементарное отображение* $f_1\colon B \cup \{b\} \to N_1$, *расширяющее* f.

Доказательство. Пусть

$$\Gamma = \mathrm{CDiag}(N) \cup \{\varphi(\nu, f(a_1), \ldots, f(a_n) \mid M \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n \in B\}.$$

Сейчас мы найдем структуру N_1 и элемент $c \in N_1$, удовлетворяющие всем формулам в Γ (после подстановки $\nu \mapsto c$). При этом N будет элементарным расширением N, и легко видеть, что f продолжается до частично элементарного отображения, которое b переводит в c.

Таким образом, достаточно доказать, что теория Γ имеет модель; а по теореме компактности 1.1.2.1 достаточно показать, что каждое конечное подмножество Γ имеет модель. Мы покажем, что N — модель для каждого конечного подмножества Γ. После взятия конъюнкций достаточно показать, что если $M \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n)$, то $N \models \exists \nu\ \varphi(\nu, f(a_1), \ldots, f(a_n))$. Но это следует из того, что $M \models \exists \nu\ \varphi(\nu, a_1, \ldots, a_n)$ и f частично элементарно. □

Теперь можно применить трансфинитную индукцию.

Следствие 1.4.4.4. *Пусть* M, N — L-*структуры,* $B \subseteq M$, $f\colon B \to N$ — *частично элементарное отображение. Тогда существует элементарное расширение* N' *теории* N *и элементарное вложение* $M \to N'$.

Доказательство. Пусть $\kappa = |M|$, $\{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ — некоторым способом занумерованные элементы M. Пусть $N_0 = N$, $B_0 = B$ и $g_0 = f$. Положим $B_\alpha = B \cup \{a_\beta \mid \beta < \alpha$. Мы построим элементарную цепочку $(N_\alpha \mid \alpha < \kappa)$ и частично элементарное отображение $g_\alpha\colon B_\alpha \to N_\alpha$ такое, что $g_\beta < g_\alpha$ для $\beta < \alpha$.

Если $\alpha = \beta+1$ и $g_\beta\colon B_\beta \to N_\beta$ — частично элементарное отображение, то, по лемме 1.4.4.3 найдется $N_\beta \preccurlyeq N_\alpha$ и $g_\alpha\colon B_\alpha \to N_\alpha$, продолжающее g_β.

Если же α — предельный ординал, положим $N_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta$ и $g_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} g_\beta$. Из предложения 1.4.3.1 следует, что N_α является элементарным расширением N_β для всех $\beta < \alpha$, а g_α — частично элементарное отображение.

Положим теперь $N' = \bigcup_{\alpha<\kappa} N_\alpha$ и $g = \bigcup_{\alpha<\kappa} g_\alpha$. Снова применяя предложение 1.4.3.1 получаем, что $N \preccurlyeq N'$, и g — частично элементарное отображение. При этом g определено на всем M, поэтому g является элементарным вложением M в N'. □

Доказательство предложения 1.4.4.1. Рассмотрим отображение $f\colon A \cup \{a\} \to A \cup \{b\}$ такое, что $f(a) = b$ и $f(x) = x$ для $x \in A$. Из равенства $\mathrm{tp}^M(a/A) = \mathrm{tp}^M(b/A)$ следует, что

f — частично элементарное отображение. По следствию 1.4.4.4 существует элементарное расширение N_0 структуры M и элементарное вложение $f_0\colon M \to N_0$, продолжающее f.

Сейчас мы построим цепочку элементарных расширений

$$M = M_0 \preccurlyeq N_0 \preccurlyeq M_1 \preccurlyeq N_1 \preccurlyeq M_2 \preccurlyeq N_2 \preccurlyeq \dots$$

и элементарные вложения $f_i\colon M_i \to N_i$ такие, что $f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq \dots$, и N_i содержится в образе f_{i+1}. После этого мы положим

$$N = \bigcup_{i<\omega} N_i = \bigcup_{i<\omega} M_i, \quad \sigma = \bigcup_{i<\omega} f_i.$$

Из предложения 1.4.3.1 следует, что N — элементарное расширение M, а $\sigma\colon N \to N$ — элементарное вложение такое, что $\sigma(a) = b$ и $\sigma(x) = x$ для $x \in A$. По построению отображение σ сюръективно, поэтому оно является нужным нам автоморфизмом N.

Построим теперь M_i и N_i по индукции. Для $f_i\colon M_i \to N_i$ мы можем рассмотреть f_i^{-1} как частично элементарное отображение из $f_i(M_i)$ в $M_i \preccurlyeq N_i$. По следствию 1.4.4.4 можно найти элементарное расширение M_{i+1} структуры N_i и продолжить f_i^{-1} до элементарного вложения $g_i\colon N_i \to M_{i+1}$. После этого, совершенно аналогичным образом, можно рассмотреть g_i^{-1} как частично элементарное отображение из $g_i(N_i)$ в $N_i \preccurlyeq M_{i+1}$, снова применить следствие 1.4.4.4 и найти элементарное расширение N_{i+1} структуры M_{i+1} вместе с элементарным вложением $f_{i+1}\colon M_{i+1} \to N_{i+1}$, продолжающим g_i^{-1}. Из включений $f_{i+1} \supseteq g_i^{-1}$ и $g_i \supseteq f_i^{-1}$ следует, что $f_{i+1} \supseteq f_i$. При этом g_i определено на N_i, и поэтому N_i содержится в образе f_{i+1}. □

1.4.5 Пространство Стоуна

Определение 1.4.5.1. Пусть M — L-структура, $X \subseteq M$. Обозначим через $S_n^M(X)$ множество всех полных n-типов над X относительно структуры M. Для L_X-формулы φ со свободными переменными $v_1, \dots, v_n$ положим $[\varphi] = \{p \in S^M(X) \mid \varphi \in p$. Множества вида $[\varphi]$ образуют базу некоторой топологии на множестве $S_n^M(X)$, которая называется **топологией Стоуна**.

Замечание 1.4.5.2. Заметим, что каждый тип $p \in S_n^M(X)$ является полным, поэтому ровно одна из формул φ, $\neg\varphi$ содержится в p. Поэтому множество $[\varphi] = S_n^M(X) \setminus [\neg\varphi]$ является и замкнутым.

Лемма 1.4.5.3. *Пространство $S_n^M(X)$ является компактным и вполне несвязным (то есть, для любых $p, q \in S_n^M(X)$ с $p \neq q$ найдется открытое замкнутое подмножество Y такое, что $p \in Y$ и $q \notin Y$.*

Доказательство. Для доказательства компактности достаточно показать, что из каждого покрытия $S_n^M(X)$ базисными открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Предположим противное: пусть $C = \{[\varphi_i(\overline{v})\}_{i\in I}$ — покрытие $S_n^M(X)$, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Положим $\Gamma = \{\neg\varphi_i(\overline{v})\}_{i\in I}$. Покажем, что $\mathrm{Th}_X(M) \cup \Gamma$ имеет модель. Действительно, пусть I_0 — конечное подмножество I. По предположению у C нет конечного подпокрытия, поэтому найдется тип p, не лежащий в объединении $\bigcup_{i\in I_0}[\varphi_i]$. Пусть N — элементарное расширение M, в котором имеется реализация $\overline{a}$ типа p. Тогда в N выполнены все формулы из $\mathrm{Th}_X(M)$ и все формулы вида $\varphi_i(\overline{a})$ для $i \in I_0$. Поэтому любое конечное подмножество $\mathrm{Th}_X(M) \cup \Gamma$ имеет модель, и по теореме компактности 1.1.2.1 все оно имеет модель. Обозначим эту модель через N; в ней есть набор $\overline{a} \in N$, удовлетворяющий всем формулам из Γ. Это означает, что $\mathrm{tp}^N(\overline{a}/X) \in S_n^M(X) \setminus \bigcup_{i\in I}[\varphi_i(\overline{v})]$, противоречие.

Вполне несвязность: если $p \neq q$, найдется формула φ такая, что $\varphi \in p$ и $\neg\varphi \in q$. Тогда $[\varphi]$ — базисное множество, которое открыто и замкнуто одновременно (по замечанию 1.4.5.2), разделяющее p и q. $\square$