Задачи к спецкурсу «Алгебраическая теория квадратичных форм»

1. Для векторного пространства V определим квадратичное пространство $H(V) = V \oplus V^*$ с формой $q(x, f) = f(x)$ для всех $x \in V$, $f \in V^*$.

   (a) Докажите, что это **гиперболическое пространство**, то есть $H(V)$ является прямой суммой гиперболических плоскостей.

   (b) Пусть U — вполне изотропное подпространство квадратичного пространства (V, q). Докажите, что существует морфизм квадратичных пространств $\varphi\colon H(U) \to (V, q)$, ограничение которого на U тождественно. В частности, (V, q) содержит ортогональное слагаемое, изометричное $H(U)$.

2. Пусть $Q = \left(\frac{a\ b}{F}\right)$ — алгебра кватернионов с базисом $1, i, j, k$, как в определении 3.2.19. Введем на ней **сопряжение** — отображение $\overline{cdot}\colon Q \to Q$, $q = a + bi + cj + dk \mapsto \overline{q} = a - bi - cj - dk$ — и **норму** $N\colon Q \to F$, $N(q) = q\overline{q}$. Докажите, что Q расщепима (*нейтральна* в терминологии определения 3.2.7) тогда и только тогда, когда в ней есть базис (e, f, g, h), в котором норма задается формулой $(xe+yf+zg+wh) \mapsto xy-zw$.

3. При каких простых p алгебра кватернионов $\left(\frac{-1\ p}{\mathbb{Q}}\right)$ расщепима (*нейтральна* в терминологии определения 3.2.7)?

4. Пусть F — поле. Известно, что $F^*/(F^*)^2$ конечно и $-1 \in (F^*)^2$. Докажите, что $W(F)$ конечно. Является ли условие $-1 \in (F^*)^2$ необходимым?

5. **(Nekovář, Oesterlé)** Пусть (V, q) — квадратичное пространство, $u \in O(q) = \{f \in GL(V) \mid q(x) = q(f(x))$ для всех $x \in V\}$. Докажите, что $\det(u) = (-1)^{\mathrm{rk}(1-u)}$.

6. Пусть $q = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ и $q' = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle$ — две изоморфные квадратичные формы. Докажите, что существует последовательность форм $q = q_1, \ldots, q_r = q'$ такая, что $q_i \simeq q_{i+1}$, $q_i = \langle a_1^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}\rangle$ и, для каждого i, $a_k^{(i)}$ отличается от $a_k^{(i+1)}$ не более, чем для двух значений k.

7. Докажите, что анизотропная четырехмерная форма является формой Пфистера тогда и только тогда, когда она представляет 1.

8. **(Witt)** Пусть q — форма над F, $a \in F^*$. Докажите, что $G(q) + aG(q) \subseteq G(q \perp aq)$ (см. определение 1.4.5.).

9. Пусть q, q' — две квадратичные формы нечетной размерности. Предположим, что q, q' подобны и их дискриминанты равны (см. определение 2.4.9). Докажите, что q и q' изоморфны. Что будет в случае четной размерности?

10. (a) Пусть $q \in I^2F$ — форма размерности $2n$. Докажите (индукцией по n), что $C(q) \simeq M_2(E(q))$, где $E(q)$ — тензорное произведение $n-1$ штук алгебр кватернионов. В частности, алгебра $C(q)$ не может быть алгеброй с делением.

    (b) Пусть E — тензорное произведение $n-1$ штук кватернионных алгебр. Докажите, что найдется форма $q \in I^2F$ размерности $2n$ такая, что $C(q) \simeq M_2(E)$.

11. **(Bass—Tate)** Пусть E/F — квадратичное расширение полей, $n \geqslant 2$. Докажите, что $K_n^M(E)$ порождается символами вида $\{x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n\}$, где $x_i \in F^*$, $y_n \in E^*$.

12. Для всякой формы q над F положим $D^2(q) = \{ab \mid a, b \in D(q)\}$ (см. определение 1.4.5.).

    (a) Докажите, что $a \in D^2(q)$ тогда и только тогда, когда форма $q \perp -aq$ изотропна.

    (b) Докажите, что $D^2(aq) = D^2(q)$ для всех $a \in F^*$.

    (c) Докажите, что $G(q) \subseteq D^2(q)$ и $G(q)D^2(q) \subseteq D^2(q)$.

    (d) Докажите, что если $q \leqslant q'$, то $D^2(q) \subseteq D^2(q')$.

    (e) Пусть q анизотропна. Докажите, что q подобна форме Пфистера тогда и только тогда, когда для всякого расширения K/F выполнено $G(q_K) = D^2(q_K)$.

13. Напомним, что форма q называется **round-формой**, если $G(q) = D(q)$ (см. определение 1.4.5.). Пусть q — round-форма.

    (a) Докажите, что $q^2 \simeq (\dim q)q$.

    (b) Докажите, что если q изотропна, то она гиперболична.

    (c) Докажите, что если φ — форма Пфистера, то $q \otimes \varphi$ — round-форма.

    (d) Пусть $q = \langle 1 \rangle \perp \psi$. Докажите, что если $\langle a, b \rangle \leqslant q$, то $ab \in D(\psi)$.