$\boxed{11.09.2012}$

М.В. Бондарко

Мотивы

чистые
+смешанные
I обзор

треангулированные
II „Почти нормальная"

I Чтобы вы что-то поняли о мотивах

II Чтобы мотивы стали вам интересны

III Чтобы стала интересна вся алгебра

Почему я не буду давать все определения? Я их не знаю

триангулированные категории (см. Гельфанд — Манин)

$\boxed{\S}$ Гипотезы Вейля

Системы уравнений над конечным полем $\mathbb{F}_q$, $q = p^k$

⇝ количество решений

потом — алгебраические многообразия

(проективные, в частности)

Что такое „кривая"? k неизвестных, $k-1$ уравнение

$V \subset \mathrm{aff}^n$

$V \subset \mathbb{P}^n$

$\mathbb{A}^1$ $\cancel{x} = 1$ ——— q точек

$\mathbb{G}_m$ $xy = 1$ ——o—— $q-1$ точка

$xy(y-1) = 1$ —o—o— $q-2$ точки

— это снова аффинные многообразия

компактификация

$\mathbb{P}^1$ ——— $q+1$ точка

— более жесткое!

поэтому будем рассматривать гладкие проективные многообразия

Оценка на число точек

первый нетривиальный случай — эллиптические кривые

$x^2 = P(y)$ — многочлен третьей степени без кратных корней,

$p \neq 2, 3$?

$\# X(\mathbb{F}_q)$ — для простоты считаем $q = p$

$\# X(\mathbb{F}_{q^k})$ — функция от k

Что мы знаем про эту функцию?

Теорема

X — гладкое проективное, размерности d, связное абсолютно неприводимое?

$$\# X(\mathbb{F}_{q^k}) = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \sum_{j=1}^{h_i} a_{ij}^k$$

0. Эта сумма конечна
1. $i=0, 2d \rightsquigarrow$ только $a_{i1} \neq 0$, при этом $a_{01}=1$, $a_{2d,1} = q^d$
2. (при подходящем выборе нумерации) $h_i = h_{2d-i}$ и
$$a_{2d-i,j} \left(\overset{?}{=} q^{d-i} a_{ij}\right) = \frac{q^d}{a_{ij}} \quad a_{i,(h_i+1-j)}$$
3. a_{ij} — алгебраические числа, $|a_{ij}| = q^{i/2}$

модуль алг. числа — тонкая вещь:

Есть $[\mathbb{Q}(a_{ij}) : \mathbb{Q}]$ способов вложить a_{ij} в $\mathbb{C}$.

— имеются в виду <u>все</u> модули $|a_{ij}|$

<u>Пример</u> $\mathbb{P}^d$

мотив — универсальная хорошая теория когомологий

на простом языке — куски многообразий

$$\mathbb{P}^d = \frac{\mathbb{A}^{d+1} \setminus \{0\}}{\mathbb{G}_m}$$

$$\frac{q^{d+1}-1}{q-1} = q^d + q^{d-1} + \dots + q + 1$$

точек

$$\mathbb{P}^d = \mathbb{A}^d \cup \mathbb{A}^{d-1} \cup \dots \cup \mathbb{A}^1 \cup pt$$

В этом случае $h_i = 0$, если i нечетно

$h_i = 1$, если i четно

$a_{i1} = q^{i/2}$, если i четно.

Что происходит для кривых?

$d=1 \rightsquigarrow i=0,1,2$. При $i=0$ и 2 все понятно:

$h_0 = h_2 = 1$. $h_1 = 2g$

род кривой

Если бы это было над $\mathbb{C}$:

- это компактное ориентируемое многообразие без края.

$\to g$ — число ручек

алгебра	топология
гладкое многообразие	$\rightsquigarrow$ многообразие без края
проективное (собственное)	$\rightsquigarrow$ компактное

Над конечным полем ручек нет, а g есть.

для $\mathbb{P}^1$ $g=0$

для эллипт. кривой $g=1 \rightsquigarrow h_1=2$

Вообще, можно рассматривать $P_i=\prod_{j=1}^{h_i}(x-a_{ij})$,

тогда условие 2. теоремы переличится на человеческом языке как связь P_i и P_{2d-i}

так вот, $P_1(x)=x^2+cx+q$, дискриминант ≤ 0
(его корни — a_{ij})

Формула Лефшеца (fixed point formula)

X задается уравнениями над $\mathbb{F}_q$

$x\in X(\mathbb{F})$, т.е. $\{M_i(x)=0 \Longleftrightarrow (M_i(x))^{q^k}=0$ (равносильно)

($\mathbb{F}$ — алгебр. замыкание; M_i — многочлены)

Что происходит с M_i?

Было, скажем, $X+cy=0$, $c\in\mathbb{F}_q$

Стало: $X^{q^k}+\underbrace{c^{q^k}}_{=c}y^{q^k}=0$

Возведение в степень q — это Фробениус: $Fr_q=Fr$

То есть, $x\in X(\mathbb{F}) \Longleftrightarrow (Fr_q)^k(x)\in X(\mathbb{F})$

$\circlearrowright Fr^k$ — морфизм

$x\in X(\mathbb{F}_{q^k}) \Longleftrightarrow (Fr)^k(x)=x$

Как посчитать число неподвижных точек? В классическом случае:

X — комп. многообразие, $T \circlearrowright X$

$$\text{"}\#X^T\text{"}=\sum_{i=0}^{\dim X}(-1)^i\,\mathrm{Tr}(H^i(T))$$

"условное" количество точек:

H^i — контравариантный функтор:

$H^i:\mathcal{M}an^{op}\longrightarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}^{fin}$ (к/м в.п.)

$\rotatebox{90}{$\in$}$

$H^i(T):H^i(X)\longrightarrow H^i(X)$

проблема с кратностями

Если пересечение диагонали с графиком T трансверсально, то все работает.

Слабая формулировка: если правая часть $\neq 0$, то неподвижные точки есть.

Из этой формулы видно, что для $T=Fr^k$ возникают k-ые степени собственных чисел.

§ Свойства этальных когомологий. Теории когомологий Вейля

Идея в топологии: сопоставить пространству коцепной комплекс
абелевы группы; часто даже пространства над полем (у нас — $\mathbb{Q}$)

$$C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \longrightarrow \dots \quad \text{— комплекс: } d^2 = 0$$

(иногда бывают и отрицательные члены: $\to C^{-2} \to C^{-1} \to \dots$)

Когомологии: $H^i = \operatorname{Ker} d^i / \operatorname{Im} d^{i-1}$, $h^i = \dim H^i$

инвариант комплекса ⇝ инвариант многообразия

C^i часто бесконечномерны, а H^i ведут себя лучше.

Идея: посчитать X^T внутри $X \times X$ как пересечение:

$X^T = \Delta \cap \Gamma_T$ — снова хорошее многообразие

Какие свойства теории когомологий позволяют это посчитать?

(1) H^i — конечномерные пространства над полем K, $\operatorname{char} K = 0$.

$H^i \neq \{0\} \Rightarrow 0 \le i \le 2d$

$Sm.proj./\mathbb{F}$ — категория гладких проективных многообразий над алгебраически замкнутым полем (геом. связных?)

$$Sm.proj/\mathbb{F} \xrightarrow{\oplus H^i} \text{категория антикоммутативных ассоциативных алгебр над полем } K$$

Что такое A над K? $A \times A \longrightarrow A$ — умножение билинейно

$H^i \times H^j \longrightarrow H^{i+j}$

(2) $H^i \times H^{2d-i} \longrightarrow H^{2d}$ — двойственность Пуанкаре,

$h^{2d} = 1$, и это — невырожденная билинейная форма.

(3) Формула Кюннета:

U, V
$$H^s(U \times V) = \bigoplus_{i=0}^{s} H^i(U) \otimes H^{s-i}(V)$$

$$H^i(U \times V) \times H^{s-i}(U \times V)$$

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \\ U & & \end{array}$$

$H^{s-i}(U \times V) \longleftarrow H^{s-i}(V)$

$H^i(U \times V) \uparrow H^i(U)$

перемножить

④ $\exists$ функториальный гомоморфизм $Cl: Chow^s(X) \to H^{2s}(X)$ $\forall s,\ 0 \leq s \leq d$ с хорошими свойствами

Cl — cycle class

Что такое $Chow(X)$? Свободная абелева группа, порожденная ..., профакторизованная по ....

Образующие: $Z \subset X$: Z неприводимое замкнутое подмногообразие коразмерности s $(\dim X - \dim Z)$

Соотношения: рациональная эквивалентность

$Chow^0 \cong \mathbb{Z}$

$Chow^1 = ClDiv = Pic(X)$

Когомологические теории, удовлетворяющие этим свойствам, называются когомологическими теориями Вейля.

Как из этого выводится ф-ла Лефшеца?

Об этом в следующий раз.

$Chow^{s_1} \times Chow^{s_2} \longrightarrow Chow^{s_1+s_2}$ — билинейное

$\quad\ \Downarrow \qquad\ \Downarrow \qquad \rightsquigarrow Chow$ — коммутативное кольцо

Взяли Z_1, Z_2, произведение должно соответствовать их пересечению. Пересечение должно быть почти трансверсально

$Z_1 \cap Z_2$ состоит из нескольких компонент

если для каждой компоненты пересечение Z_1 и Z_2 в них трансверсально — совсем хорошо

если где-то пересекаются с касанием, но компоненты правильной размерности — еще ничего

если получилось так, что размерность выше — совсем плохо

$Z_1 \cap Z_2$ = формальная сумма компонент

касаний нет $\rightsquigarrow$ все с коэффициентами 1

~~есть~~ есть $\rightsquigarrow$ нужно смотреть на кратности пересечений

совсем плохой случай $\rightsquigarrow$ использовать рац. эквивалентность

⑤ $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Z \hookrightarrow X$, $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ $\qquad X \cap \mathbb{P}^{n-1} = Z$ — гиперплоское сечение X.

Z гладкое (хотя не обязательно)

$H^i(X) \longrightarrow H^i(Z)$ — изоморфизм при $i < \dim Z = d-1$

равенство при $i = \dim Z = d-1$

т.е. гиперплоское сечение помнит половину когомологий

(а если Z гладкое, то по двойственности Пуанкаре - все, кроме середины)

Уже можно посчитать количество точек на гладкой гиперповерхности в $\mathbb{P}^N$

(6) $Z \in \mathrm{Chow}^1 \rightsquigarrow E = \mathrm{Cl}(Z) \in H^2$

$\forall i$ H^i двойственно H^{2d-i} — знаем

Умножение H^i на E^{d-i} задает изоморфизм $H^i \longrightarrow H^{2d-i}$

l-простое, $l \neq p$ $\rightsquigarrow H_l^{i\,et}$ — l-адические этальные когомологии — в.п. над $\mathbb{Q}_l$

Smproj $\rightsquigarrow$ этальные когомологии для каждого l

$\rightsquigarrow$ получаются собств. числа операторов над $\mathbb{Q}_l$

$\rightsquigarrow$ l-адические

$$H_l^{et} \cong H_{\mathbb{Q}}^{sing} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_l$$

Нельзя ли пропустить все этальные когомологии через одну?

ответ — „а хрен его знает"