18.09.2012

Пояснения к гипотезам Вейля

М.В. Бондарко

1. __Небольшое__: операция в Чжоу

$$cl: Chow^i(X) \longrightarrow H^{2i}_{et,\mathbb{Q}_\ell}(X)$$

пересечение циклов $\longmapsto$ произведение

Как строить пересечение циклов?

Есть естественное отображение

$$Chow^i(X)\times Chow^j(Y) \longrightarrow Chow^{i+j}(X\times Y)$$

– без проблем, только проверить, что это согласовано с эквивалентностью

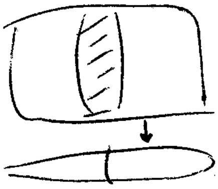
Теперь берем $Y=X$

$\rightsquigarrow$ есть диагональ $\Delta: X \longrightarrow X\times X$

В аксиоматике cl фигурируют свойства обратного образа Δ

Chow – контравариантный функтор – с проблемами (это непросто):

$$Chow^{ij}(\Delta): Chow^{i+j}(X\times X) \longrightarrow Chow^{i+j}(X)$$



(equidimensional) flat?

наивное определение: прообраз

почему прообраз имеет ту же коразмерность?

для проекции $X\times Y \longrightarrow Y$ это так.

для $X \xrightarrow{\Delta} X\times X$ с эквиразмерностью плохо (и с плоскостью)

2. __Большое__: пучки и когомологии

X – топ. пр-во

$$PreSh_{top}(X): O(X)^{op} \longrightarrow Sets,\ \longrightarrow Ab$$

объекты: открытые подмн-ва X

морфизмы $U\to U'$: $\#O(X)(U,U') = 1$, если $U\subset U'$; 0, иначе

т.е. для $S\in PreSh_{top}(X)$:

$S(U)$ – мн-во сечений на U

$S(U') \longrightarrow S(U)$

Пример: $U \longmapsto Top(U,\mathbb{R})$

Некоторые из предпучков называются пучками – те, для которых из набора сечений на маленьких подмножествах однозначно склеивается сечение на большом

$U=\bigcup U_i$

$$S(U) \longrightarrow S(U_i) \rightsquigarrow S(U) \longrightarrow \prod_i S(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} S(U_i\cap U_j)$$

инъекция, уравнитель тех двух стрелок

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ U_i \arrow[dr] & & U_j \arrow[dl] \\ & U_i\cap U_j & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} PreSh_{top}(X, Sets) & \qquad & PreSh_{top}(X, Ab) \\ \uparrow \downarrow \text{- пучкование} & & \uparrow \downarrow \\ Sh(X, Sets) & & Sh(X, Ab) \end{array}$$

абелева категория

Постоянный предпучок: возьмем $G \in Ab$ (например, $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$)

$S(U) = G$ — не пучок: бывает, что $U = \bigcup U_i$

$\rightsquigarrow S(U) \cong \prod S(U_i)$, если бы это был пучок

$\rightsquigarrow$ пучкование — <u>постоянный пучок</u>

Как определить когомологии?

1. Категория абелева, в ней достаточно много инъективных объектов

$$D^+(Sh(X)) \cong K^+(Inj\,Sh(X))$$

$$\rightsquigarrow H^i(S) = \underbrace{Ext^i}_{\text{в производной категории}}(\mathbb{Z}, S) = D(Sh(X))(\mathbb{Z}, S[i])$$

2. Когомологии Чеха

$$S(U) \longrightarrow \prod S(U_i) \overset{+}{\underset{-}{\rightrightarrows}} \prod S(U_i \cap U_j) \overset{+}{\underset{+}{\overset{-}{\rightrightarrows}}} \prod S(U_i \cap U_j \cap U_k) \rightrightarrows \dots$$

$\rightsquigarrow$ измельчаем покрытия и переходим к пределу

когомологии этого комплекса = когомологии Чеха

Гипотезы доказались бы, если бы была теория когомологий с формулой Лефшеца

$X(\mathbb{C})$. Какие ему соответствуют топологии?

- топологическая топология (задаваемая метрикой) $X(\mathbb{C})_{top}$
- топология Зариского $X(\mathbb{C})_{Zar}$

У неприводимого куска $\forall$ непустое открытое в топологии Зариского является плотным $\rightsquigarrow$ когомологии Чеха только в размерности 0 (у пост. пучка)

$\rightsquigarrow$ никакой формулы Лефшеца

Тогда спасает топологическая топология.

В случае многообразий над конечным полем этого нет.

$$H^*(X) = H(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$$ $\rightsquigarrow$ нужно искать замену топологии Зариского

Когомологии Чеха работают потому, что все $U_i, U_i \cap U_j, \dots$, можно сделать стягиваемыми ($U = X$)

в комплексной топологии — легко

в топологии Зариского — никак.

т.е. главное в топологии — то, какие у нас есть маленькие открытые (все равно переходим к пределу)

Поэтому нужны топологии Гротендика

Идея: расширить понятия „открытого множества" и „покрытия"

Не обязательно $\bigcup U_i = U$, можно $\bigcup U_i \longrightarrow U$

т.е. достаточно, чтобы у каждого маленького в U был хотя бы 1 изоморфный ему прообраз.

Например, покрытие = сюръективное открытое отображение

$$U \longrightarrow X$$

$$S(X) \longrightarrow S(U) \rightrightarrows ?$$

Дальше вместо $\cap$ нужно брать расслоенное произведение

$$\cdots\ U \times_X U \rightrightarrows U \longrightarrow X$$

$U \times_X U \times_X U$, и так далее

Как переходить к пределу по покрытиям?

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[dr] & X \\ & U' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

стрелки должны коммутировать со стрелками в X

Для алгебраических многообразий это тоже работает, если правильно определить покрытия (этальные)

$$\begin{tikzcd} X(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] \arrow[dddr] & X(\mathbb{C})_{top} \\ & X(\mathbb{C})_{Zar} \\ & X(\mathbb{C})_{et.top} \\ & X(\mathbb{C})_{et.} \end{tikzcd}$$

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{G}_m(\mathbb{C})$$

$$\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad x \longmapsto x^e$$ – хорошее покрытие

если бы были разрешены аналитические функции: $\underset{\text{стягиваемо}}{\mathbb{C}} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^*$

– тут у каждой точки бесконечно много прообразов

В алгебре такого не бывает

хочется бесконечно-листное покрытие „приблизить" конечно-листными

Брать в качестве постоянного пучка $\mathbb{Z}$ не получится, $\mathbb{Q}$ – еще хуже,

а вот $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ – в самый раз (где l – простое, $l \neq p$)

Хочется, чтобы ф-ла Лефшеца давала натуральное число, а не натуральное число по модулю

$$\rightsquigarrow \varprojlim_n H^{et}(X, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$$

$$\begin{array}{c}\mathcal{U}\\ \downarrow\\ X\end{array}$$ этальные морфизмы

Маленький сайт: категория этальных морфизмов в X

большой сайт: категория всех (гладких) многообразий

После перехода к пределу (по $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\ell^{n-1}\mathbb{Z}$)

$\varprojlim H^{et}(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \mathbb{Z}_\ell$-модуль

его потом можно домножить на $\mathbb{Q}_\ell$: $- \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$,

чтобы получить над полем

$H^{*et}(X, \mathbb{Z}_\ell)$

произведение строго гензелевых схем тоже гензелево, — или что-то в этом роде

поэтому, условно говоря, „если $\mathcal{U}$ стягиваемо, то $\mathcal{U}\times_X\mathcal{U}$ тоже"

Если $\mathcal{U} \to X$ хорошее, а $\mathcal{U}\times_X\mathcal{U}$ не очень,

то спасают гиперпокрытия

$$\mathcal{U}\times_X\mathcal{U}\times_X\mathcal{U} \rightrightarrows\!\!\!\to \mathcal{U}\times_X\mathcal{U} \rightrightarrows \mathcal{U} \to X$$

→ симплициальный объект

гиперпокрытия позволяют „разрезать на кусочки" $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$

Если считать предел по некоторому обобщению когомологий Чеха для гиперпокрытий, то получатся те же когомологии, которые были бы для производной категории

(см. когомологический спуск)

Tate twist (подкрутка Тейта)

после постоянных пучков самые понятно — локально постоянные

$\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}(r)$ $\quad r>0 \quad$ ($r<0$ — нужно какое-то Hom взять и тоже получится)

$\mu_{\ell^n}^{\otimes r}$

Поле должно быть не алг. замкнуто, чтобы это имело смысл

$\mu_{\ell^n}(\operatorname{Spec} R) = \{x \in R \mid x^{\ell^n} = 1\}$

//тут видно, что должно быть $\ell \neq p$

Имеет место точная последовательность Куммера

$$1 \to \mu_{\ell^n} \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{(-)^{\ell^n}} \mathbb{G}_m \to 1$$

$H^*_{et}(X, \mathbb{Z}_\ell(r))$ — перейти к пределу при $n \to \infty$

$\mathbb{Q}_\ell(r)$

$$H^i(X, \mathbb{Z}_\ell(r_1)) \times H^j(X, \mathbb{Z}_\ell(r_2)) \longrightarrow H^{i+j}(X, \mathbb{Z}_\ell(r_1+r_2))$$

— кольцевая структура

Если есть все корни из 1, то

$\mu_{\ell^n} \cong \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ — постоянный пучок

не канонически

Интереснее, когда поле незамкнуто

Общие свойства этальных когомологий

X — многообразие над K (не обязательно гладкое проективное)

$H^i_{et}(X, \underbrace{\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}(r)}_{\text{или } \mathbb{Z}_\ell})$ — r не влияет, если в поле есть корни степени ℓ^n из 1

Для замкнутого поля они конечно порождены.

$$H^0(X, S) = S(X)$$

Пусть $X = U \cup V$. Тогда есть точная посл-сть Майера – Вьеториса

$$\cdots \to H^i(X) \longrightarrow H^i(U) \oplus H^i(V) \longrightarrow H^i(U \cap V) \longrightarrow H^{i+1}(X) \to \cdots$$

этальные, с коэфф. в $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}(r)$ для фикс. ℓ, n, r
или $\mathbb{Z}_\ell(r)$

$Z \subseteq X$ — замкнутое подмногообразие, оба гладкие, $U = X \setminus Z$

Z везде коразмерности $c \geq 0$

(например, Z может быть несвязным)

$$\cdots \to H^{i-2c}(Z, \mathbb{Z}_\ell(r-c)) \to H^i_{et}(X, \mathbb{Z}_\ell(r)) \longrightarrow H^i_{et}(U, \mathbb{Z}_\ell(r)) \longrightarrow H^{i-2c+1}(Z, \mathbb{Z}_\ell(r-c)) \to \cdots$$

длинная точная посл-сть Гизина (Gysin)

Оказывается „разрезанием" (в этальном смысле) на мелкие кусочки.

$\mathbb{P}^{N-1} \subset \mathbb{P}^N \supset \mathbb{A}^N \quad \rightsquigarrow c = 1$

$$\rightsquigarrow \cdots \to H^{i-2}(\mathbb{P}^{N-1}, \Lambda(-1)) \to H^i(\mathbb{P}^N, \Lambda) \longrightarrow H^i(\mathbb{A}^N, \Lambda) \longrightarrow \cdots$$

$H^i(\mathbb{A}^N, \Lambda) \cong H^i(pt, \Lambda)$, $pt = \operatorname{Spec} k$

когомологии Галуа

Над замкнутым полем:

$$H^*(\mathbb{P}^n, \Lambda) = \bigoplus_{i\geq 0}^{N} \Lambda(-i)[-2i]$$

сдвиг т.е. она сидит в размерности $2i$

когомологии контравариантно зависят от поля

$\Rightarrow$ на H_{et} действует группа Галуа

т.е. если в базовом поле корни были не все, то группа Галуа действует на них; поэтому подкрутка остается

$\mu_{\ell^n}^{\chi(g)}$ ← возводится в степень $\chi(g)$ — циклотомический характер

$\downarrow$

$\mu_{\ell^n}^{(\chi(g)^n)}$ $\chi(g) \in \mathbb{Z}$, определенное mod ℓ^n

$\downarrow$ после перехода к пределу

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell^*$$

Например, для конечного поля действует Фробениус: он возводит в степень p^{-i}, потому что $\Lambda(-i)$ — внезапно

$$H^{i-2c}_{et}(Z, \Lambda(r-c)) \to H^i_{et}(X, \Lambda(r)) \to H^i_{et}(U, \Lambda(r)) \to H^{i-2c+1}(Z, \Lambda(r-c))$$

Можно взять $i = 2c$, $r = c$

$$H^0_{et}(Z, \Lambda) \cong \Lambda^{\#\text{компонент } Z} \cong \Lambda$$

(последний изоморфизм — если Z неприводимо)

Так можно определить Cl на примитивных циклах: (когда одно многообразие неприводимое)

$$H^0(Z, \Lambda) \longrightarrow H^{2c}(X, \Lambda(c))$$

$\Lambda \ni 1 \mapsto\ ?$

тут мы пользовались тем, что Z гладкий

$$Z' = Z \setminus \operatorname{sing} Z \hookrightarrow X \setminus \operatorname{sing} Z = X'$$

нужно выкинуть особенности Z

Когда выкидываем кусок маленькой размерности, младшие когомологии не меняются

Что означает подкрутка? Отождествление Λ с $\Lambda(c)$ не каноническое (даже для замкнутого поля)

Cl функториально зависит от поля! Опять же, если цикл был определен над кон. полем, то группа Галуа действует тривиально

$$H^{2d}(X, \Lambda) \cong \Lambda(-d)$$