25.09.2012

М.В.Бондарко

Свойства $H^i_{et}(X, \mathbb{Q}_\ell)$, неканонически изом. $H^i_{et}(X, \mathbb{Q}_\ell(r))\ \forall r \in \mathbb{Z}$
(для алг.замкнутого k)

(отождествить можно, если выбрать обр. в μ_{ℓ^n})

① $H^i(\ldots)$ – конечномерны над $\mathbb{Q}_\ell$ (для любого многообразия X/k)

② $H^i \neq 0 \Leftrightarrow 0 \leq i \leq 2d$

③ Если X – гл.проект. связное
$$H^{2d}(X) \cong \mathbb{Q}_\ell(-d)$$
и спаривание
$$H^i(X) \times H^{2d-i}(X) \longrightarrow H^{2d}(X)$$
невырождено, билинейно

④ $H^s(U \times V) \cong \bigoplus_{i=0}^{s} H^i(U) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^{s-i}(V) \quad \forall U, V$

⑤ $\forall$ гладкого X $\exists$ функториальные
$$cl^i : Chow^i(X) \longrightarrow H^{2i}(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) \cong H^{2i}(X, \mathbb{Q}_\ell)(i)$$

Из функториальности:
$$cl(Z \wedge Z') = cl\, Z \cdot cl\, Z'$$

Как из этого выводится формула Лефшеца?

$f : X \longrightarrow X$ – гл.проект.
$$\#\Gamma(f) \cap \Delta = \sum (-1)^i \operatorname{Tr} H^i(f)$$
Если $f = Frob_{\mathbb{F}_q}$, то пересечение устроено хорошо

это соответствует точкам $X(\mathbb{F}_q) \longrightarrow$ их конечное число

Более общая формула

$f, g : X \longrightarrow X$ („соответствия")
$$\#(\Gamma(f) \cap {}^t\Gamma(g)) = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \operatorname{Tr} H^i(f \circ g)$$

$$H^*(X \times X) \cong H^*(X) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^*(X)$$
, условно говоря (следует из (2) и (3))

Более точно, в производной категории
$$RH^*_\Lambda(X \times X) \cong RH^*_\Lambda(X) \otimes_\Lambda RH^*_\Lambda(X)$$
– уже для любого Λ

Грубо говоря, $H^*(X) \otimes H^*(X) \cong Hom(H^*(X), H^*(X))(d)$
– ну типа как $\langle u, v \rangle = tr(uv^t)$

$id_M : M \longrightarrow M$ – многообразие
$$\sum (-1)^i \operatorname{Tr} id_{H^i(M)} = \chi(M)$$
– если она $\neq 0$, то на M нет ненулевых гладких векторных полей.

Эйлерова хар-ка

(6) Слабый Лефшец (WL)

(7) Сильный Лефшец (HL)

Перенесемся в середину $60^х$ годов

- была известна формула Лефшеца (для Фробениуса) $\forall \ell$

$\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, $\ell \neq p = \mathrm{char}\, F$.

$$\underset{\#X(\mathbb{F}_{q^n})}{\overset{\shortparallel}{\#\left(\Gamma(\mathrm{Frob}_q^n) \cap \Delta\right)}} = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \, \underset{\sum a_{ij}^n}{\overset{\shortparallel}{\mathrm{Tr}\, H^i(\mathrm{Frob}_q^n)}}$$

для разных ℓ они совершенно разные

работает $\forall$ проективного (не обяз. гладкого)
в общем случае H_c^i
компактный носитель

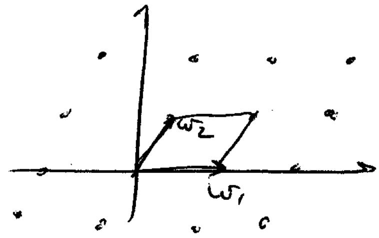
При этом $a_{ij} \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}$

Возник вопрос: может быть, существует теория над $\mathbb{Q}$ такая, что $H^*(X, \mathbb{Q}_\ell) = H^*(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$

Ответ: (Серр) не существует

рассмотрим суперсингулярную эллиптическую кривую над $\mathbb{F}_q$

$$\mathbb{C} \supset \underset{\omega}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2}} \qquad \mathbb{C}/\omega$$



E - эллипт. кривая

$\mathrm{End}_E \supset \mathbb{Z}$

Если $\exists w$. $w\omega \subset \omega$, то там есть умножение на w.

$\rightsquigarrow$ E - кривая с комплексным умножением.
End_E хотя бы двумерно над $\mathbb{Z}$

$E/\mathbb{F}_q$ — есть еще Frob_q, не соответствующий ничему из $\mathbb{Z}$

суперсингулярные — когда End_E максимально — четырехмерно

$(\mathrm{End}\, E) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{H}$.

Для кривых было известно, что $\dim H^1(C) = 2g_C = 2$
кривая — в нашей ситуации

$$\mathrm{End}\, E \longrightarrow \underset{\text{матрицы } 2\times 2}{\mathrm{End}\, H^1(E)}$$

$\rightsquigarrow$ это отображение нулевое
$\rightsquigarrow$ полный бардак
$\rightsquigarrow$ нет теории над $\mathbb{Q}$

$|a_{ij}|_{\mathbb{C}} = q^{i/2}$ $\quad i$ — <u>вес</u>

<u>Упражнение</u>: посчитать эти числа для $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$

Посчитаем: $q-1$ точка, $\sum_{i=0}^{2}$; q имеет вес 2, 1 имеет вес 0 $\rangle$ был бы знак +, как для $\mathbb{P}^1$, а тут вес сдвигается

Гуманитарное определение мотивов
— универсальная когомологическая теория

гладкие проективные многообразия

Все приличные объекты в душе счетны

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{SmPrVar} \arrow[rr, bend left] \arrow[d] \arrow[drr] & & \forall \ell \neq p \ \exists \ H_{et}, \mathbb{Q}_\ell \\
H^{*sing}_\sigma & F \overset{\sigma}{\subseteq} \mathbb{C} & \mathrm{Mot} \arrow[u] \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

контравариантная? У Воеводского она ковариантная

сингулярные: для каждого вложения $F \overset{\sigma}{\subseteq} \mathbb{C}$ H^{*sing}_σ (— можно считать по-разному! многообразия могут получиться не гомеоморфные

(категория „гомологических" мотивов)

Хотелось: Mot абелева полупростая
(любой объект — $\oplus$ простых, или:
любой морфизм $f: X \longrightarrow Y$

$$\begin{array}{c} \overset{\mathrm{Im} f}{Z} \oplus X' \cong X \\ \mathrm{id} \big\downarrow 0 \\ Z \oplus Y' \cong Y \end{array}$$

$\dim X = d_1$, $\dim Y = d_2$

$e \in H^{2d_1}(X \times Y, \mathbb{Q}_\ell(d_1))$

задает отображение $H^*(Y) \longrightarrow H^*(X)$
называется соответствием

в частности,
$e = cl\, Z$, $Z \in \mathrm{Chow}^{d_2}(X \times Y)$

Операции в SmPrVar: $\sqcup$, $\times$

как получить абелеву категорию?

$\mathrm{Mot}'(A,B) = \mathbb{Z}^{\mathrm{Mor}(A,B)}$ — грубый метод

Вместо этого берут категорию соответствий

$\mathrm{Corr}^{eff}_{rat}$ — эффективные, рациональные

$\mathrm{Ob}(\ldots) = \mathrm{Ob}(\mathrm{SmProjVar})$

$\mathrm{Mor}(X,Y) = ?$

$\mathrm{Mor}(X, \bigsqcup_i Y_i) = \bigoplus \mathrm{Chow}^{\dim Y_i}(X \times Y_i)$ ~~алгебраических~~

rat, hom (H), num, ~~alg~~ — численные; гомологические; alg — алгебраическая

$$\mathrm{Chow}^{d_2}(X\times Y) = \mathbb{Z}^{\{Z\subset X\times Y \mid \operatorname{codim} Z = d_2\}} \Big/ \text{рациональная экв-сть}$$

alg нам не понадобится

~~[illegible]~~

т.е. рац. экв-сть $\Rightarrow$ ~~алг. экв-сть~~ $\xRightarrow{\forall H \text{ из списка выше}}$ H-гом. экв-сть $\Rightarrow$ числ. экв-сть

$\mathrm{Corr}^{eff}_{rat}$ $\qquad$ Corr^{eff}_{H} $\qquad$ $\mathrm{Corr}^{eff}_{num}$

гомологическая: hom_H: $A\sim B$, если $cl(A)=cl(B)$ в

$$\mathrm{Chow}^i(X)\longrightarrow H^{2i}(X)$$

численная: num $\mathrm{Chow}^i(X)\times \mathrm{Chow}^{d-i}(X)\longrightarrow \mathbb{Z}$ — спаривание

(кол-во точек пересечения)

цикл $\underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{Chow}^i}}{\alpha} \sim 0$, если $\forall \beta\in \mathrm{Chow}^{d-i}$ $\int \alpha\cdot\beta = 0$

$\uparrow$ кол-во точек пересечения

$\to$ есть аддитивные функторы

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Corr}^{eff}_{rat} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathrm{Corr}^{eff}_{H} \arrow[dr] & & \mathrm{Corr}^{eff}_{H'} \arrow[dl] \\
 & \mathrm{Corr}^{eff}_{num} &
\end{tikzcd}$$

Какая композиция в Corr?

$$X \xrightarrow{d_1} Y \xrightarrow{d_2} Z$$

$P_2 \subset Y\times Z$, $P_2 \longrightarrow Y$ — конечный

$P_1\subset X\times Y$, $\dim Z = d_1$

задано отображение $P_1\longrightarrow X$ — можно надеяться, что это конечный морфизм

P_1 — график многозначной функции

Что такое $P_1\circ P_2$? Композиция этих многозначных функций

$$P_1\times P_2 \in \mathrm{Chow}(X\times Y\times Y\times Z)$$

$$\begin{tikzcd}
X\times Y\times Z \arrow[r, "id_X\times\Delta_Y\times id_Z = \varphi"] \arrow[d, "pr"] & X\times Y\times Y\times Z \\
X\times Z &
\end{tikzcd}
\qquad pr_*\varphi^*(P_1\times P_2)$$

C_2 — соответствие из X в X
$\rightsquigarrow$ есть ${}^tC_2$

$$\#(C_1 \cap {}^tC_2) = \sum (-1)^i H_i(C_1 \circ C_2)$$

$$d \in Corr_{rat}(X, Y) \longmapsto H^*(d) : H^*(Y) \longrightarrow H^*(X)$$
(из свойств H)

Идея в том, чтобы i-ому слагаемому соответствовал i-ый кусок многообразия — его назовем мотивом.

Как резать на куски? Нужна карубизация (псевдоабелианизация)

$$Kar(Corr_?^{eff}) = Mot_?^{eff}$$

рациональные мотивы = мотивы Чжоу

Хотим сделать из аддитивной категории (почти) абелеву

Пусть $p \in C(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ и $p^2 = p$

Если бы C была абелева, то было бы $\mathcal{M} = \ker p + \operatorname{Im} p$, где $\ker p = \operatorname{Im}(1-p)$, $\operatorname{Im} p = \ker(1-p)$

Для многообразий такого не бывает

значит, нужно добавить объекты: $\operatorname{Im} p$, где p — идемпотентный эндоморфизм, $\operatorname{Im} p = (\mathcal{M}, p)$

Морфизм $(\mathcal{M}, p) \longrightarrow (\mathcal{M}, p')$, $(\mathcal{M},p) = X$, $(\mathcal{M},p') = X'$

$$Kar\, C(X, X') = p' \circ C(\mathcal{M}, \mathcal{M}') \circ p$$

композиция никуда не девается

Старая категория вкладывается в новую:

$$X \longmapsto (X, id_X)$$

$$\rightsquigarrow (X, id_X) = (X, p) \oplus (X, 1-p)$$

коэффициенты? Для Chow берут $\mathbb{Z}/_n$, но Ab — не полупростая категория!

Вместо $\mathbb{Z}$ берут $\mathbb{Q}$, т.е. делают $\otimes \mathbb{Q}$. Для мотивов Воеводского важно кручение, и берут $\mathbb{Z}$, а для стандартных гипотез берут $\mathbb{Q}$ (для $\mathbb{Z}$ они неверны)

Примеры

X — многообразие над $\mathbb{F}_q$

$Frob_q : X \longrightarrow X$.

Можно ли построить многочлен над $\mathbb{Q}$ от $Frob_q$, являющийся нетривиальным идемпотентом? $P^2(Frob) = P(Frob)$. Для rat — неизвестно; для hom$_H$ — известно

$$Frob : \oplus H^i(X) \longrightarrow \oplus H^i(X)$$

цикл $= 0 \Leftrightarrow$ его отображение нулевое

$\rightsquigarrow$ нужно найти аннулирующий многочлен этого оператора

$\rightsquigarrow$ берем произведение хар. многочленов $H^i(Frob)$ — P_i

если они попарно вз. просты $\rightsquigarrow \exists Q_i : Q_i \vdots P_j$ при $j \neq i$, $Q_i \equiv 1 \pmod{P_i}$

$Q_i(Frob)$ и будет идемпотентом; $\oplus Q_i(Frob) = id_X$

$$\rightsquigarrow Mot_{H_{et}}(X) = \bigoplus_i \operatorname{Im} Q_i(Frob_q(X)), \quad \operatorname{Im} Q_i(Frob_q(X)) = (X, \overline{Q_i(\Gamma_{Frob_{\mathbb{F}_q}}, X)})$$

алг. цикл с точностью до рац. экв-сти, но это не обязан быть идемпотент с точностью до нее.

Простой пример:

пусть на X ${}^{\text{связной}}$ есть рац. точка

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "p"'] & pt \arrow[r] & X \end{tikzcd} \rightsquigarrow p^2 = p$$

$\Gamma(p)^2 = \Gamma(p)$ – соответствия

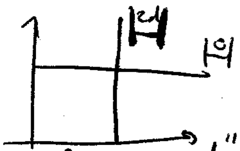
$\rightsquigarrow (X, p)$ – мотив

$(X, p) \simeq Mot_{rat}(pt)$

$\| $

$\mathbb{H}^0(X)$ – отвечает за нулевые когомологии X

Наоборот, $\mathbb{H}^{2d}(X)$



Транспонирование задает инволюцию на $End(X)$

$\rightsquigarrow \mathbb{H}^{2d}$ тоже идемпотент – L^d "Лефшец в степени d" или $\mathbb{Z}(d)[2d]$, $\mathbb{Q}(d)[2d]$, ...

степень ↓ подкрутка ↓

Воеводский

– отвечает за $H^{2d}(X, \ldots)$