02.10.2012
М.В. Бондарко

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Corr}_{rat} \arrow[r, "\text{карубизация}"] \arrow[d] & \mathrm{Chow}^{eff} \arrow[d] \\
\mathrm{Corr}_{alg} \arrow[r, hook] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d] \arrow[d, shift left=2] & \mathcal{M}ot^{eff}_{alg} \arrow[d, shift right=2] \arrow[d] \arrow[d, shift left=2] \\
\mathrm{Corr}_H \arrow[r, hook] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d] \arrow[d, shift left=2] & \mathcal{M}ot^{eff}_H \arrow[d, shift right=2] \arrow[d] \arrow[d, shift left=2] \\
\mathrm{Corr}_{num} \arrow[r, hook] & \mathcal{M}ot^{eff}_{num}
\end{tikzcd}$$

Chow^{eff} — самые точные

$\mathcal{M}ot^{eff}_{num}$ — самые грубые

с коэфф. над $\mathbb{Q}$ — по умолчанию — больше (убивают кручение) объектов!

над $\mathbb{Z}$ — больше информации

Откуда берутся неэффективные мотивы?

мотив Лефшеца → $\mathbb{L}$

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathcal{M}(pt) \oplus \mathbb{L}$$

у Воеводского: $\mathbb{Z} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}(1)}_{\text{подкрутка}}\underbrace{[2]}_{\text{сдвиг}}$

$H^{*et}_{\Lambda}(\mathbb{L}) = \Lambda(-1)[-2]$ если K — алгебраически замкнутое поле

На всех этих категориях можно определить тензорное произведение.

Все тождества мы будем писать для Chow^{eff} с коэфф. в $\mathbb{Z}$ — тогда они верны и в остальных категориях мотивов

$$\mathcal{M}(X \times Y) = \mathcal{M}(X) \otimes \mathcal{M}(Y)$$

— это задает $\otimes$ на объектах Corr_*

как на морфизмах?

$\mathcal{M}(X_1) \longrightarrow \mathcal{M}(Y_1)$

C_1 в $X_1 \times Y_1$

$$\mathrm{Chow}^i(Z_1) \times \mathrm{Chow}^j(Z_2) \to \mathrm{Chow}^{i+j}(Z_1 \times Z_2)$$

C_2 в $X_2 \times Y_2$

$\mathcal{M}(X_2) \longrightarrow \mathcal{M}(Y_2)$

$$\longrightarrow \mathcal{M}(X_1) \otimes \mathcal{M}(X_2) \longrightarrow \mathcal{M}(Y_1) \otimes \mathcal{M}(Y_2)$$

и если $\otimes$ задано на $\mathcal{C}$, то появляется $\otimes$ на $\mathrm{Kar}(\mathcal{C})$:

пусть (X, p), (X', p')

$\Downarrow$

$(X \times X', p \otimes p')$ — тоже идемпотент

$\forall$ мотива M рассмотрим $M \otimes \mathbb{L}^i$, $i \geq 0$

$$M \otimes \mathbb{L}^i = M\{i\}$$

(у Воеводского это $M(i)[2i]$)

неэффективные мотивы появляются, если научимся подставлять сюда отрицательные i.

$$\mathrm{Chow}^i(X \times \mathbb{P}^1) \cong \mathrm{Chow}^i(X) \oplus \mathrm{Chow}^{i-1}(X)$$ — из $X \to X \times \mathbb{P}^1 \to X$

посчитаем морфизмы в Chow^{eff}:

$$\mathrm{Chow}^{eff}(M(X_1)\{i_1\}, M(X_2)\{i_2\}) = \mathrm{Chow}^{d_2+i_1-i_2}(X_1 \times X_2)$$

($\dim X_1 = d_1$, $\dim X_2 = d_2$) — из пред. формулы, используя $X_1 \times X_2 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Следствие:

$$\mathrm{Chow}^i(X) \cong \mathrm{Chow}^{eff}(L^{\otimes i}, M(X))$$

Отсюда следует:

$$M_1, M_2 \in Ob(\mathrm{Chow}^{eff})$$

$$\to \mathrm{Chow}^{eff}(M_1\{1\}, M_2\{1\}) = \mathrm{Chow}^{eff}(M_1, M_2)$$

— „теорема о сокращении"

Определим мотивы Чжоу:

$$Ob(\mathrm{Chow}) = Ob(\mathrm{Chow}^{eff}) \otimes \mathbb{L}^i \qquad i \in \mathbb{Z}$$

морфизмы: $M_1\{i_1\}$ $\quad$ $M_2\{i_2\}$

$$\mathrm{Chow}(M_1 \otimes \mathbb{L}^{i_1}, M_2 \otimes \mathbb{L}^{i_2}) = \varinjlim_s \mathrm{Chow}^{eff}(M_1 \otimes L^{i_1+s}, M_2 \otimes L^{i_2+s})$$

по теореме о сокращении получаем полное вложение

$$\mathrm{Chow}^{eff} \hookrightarrow \mathrm{Chow}$$

$\boxed{\text{Свойства}}$

1. на Chow, Mot_{alg}, Mot_{H}, Mot_{num} есть тензорное произведение

2. $M \otimes \mathbb{L}^i = M\{i\}$ $\quad$ + следствие: подкрутки складываются при $\otimes$

3. Определим $\widehat{M(X)\{i\}} = M(X)\{-d-i\}$. Тогда $\widehat{\ }$ продолжается ($\dim X = d$) до двойственности на Чжоу, то есть

$$\mathrm{Chow}(\hat X, \hat Y) \cong \mathrm{Chow}(Y, X), \quad \widehat{f\circ g} = \hat g \circ \hat f$$

На карубизацию это продолжается так:

$$\widehat{(X, p)} = (X, {}^t p)\{-d\}$$

t – транспонирование;
получается перестановкой сомножителей в $X\times X$.

Можно было сказать, что Chow — карубизация категории с объектами вида $\mathcal{M}(X)\{i\}$ и морфизмами, определенными как выше:

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{M}(X_1)\{i_1\}, \mathcal{M}(X_2)\{i_2\}) = \mathrm{Chow}^{d_2+i_1-i_2}(X_1\times X_2)$$

(4) $\mathcal{M}(pt)$ – единица в смысле $\otimes$

есть внутренний Hom: $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y) = Y\otimes \hat X$

$$\mathrm{Chow}(Z\otimes X, Y) \cong \mathrm{Chow}(Z, \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y))$$

где $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) = Y\otimes\hat X$ $\rightsquigarrow$ rigid tensor category

(5) Все работает для остальных мотивов

(6) V – векторное расслоение, $\dim V = n$

$$\begin{array}{c} V \\ \downarrow \\ X \end{array} \qquad \mathcal{M}(\mathbb{P}(V)) \cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{M}(X)\{i\}$$

$\mathbb{P}(V)$ ← проективизация

В частности, $\mathcal{M}(\mathbb{P}^{n-1}) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{L}^i$

(7) Можно вычислить мотив раздутия

$$\begin{array}{c} X \\ \cup \\ Z \end{array} \text{ – коразмерности } d$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{M}(X) \oplus \sum_{i=1}^{d-1} \mathcal{M}(Z)\{i\}$$

(8)

~~$\mathrm{Chow}(\mathcal{M}(X), \mathbb{L}^i)$~~ композиция: $\mathbb{L}^i \longrightarrow X \longrightarrow \mathbb{L}^i$

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Chow}(\mathbb{L}^i, \mathcal{M}(X)) & \times & \mathrm{Chow}(\mathcal{M}(X), \mathbb{L}^i) & & \\ \| & & \| & & \\ \mathrm{Chow}^i(X) & \times & \mathrm{Chow}^{d-i}(X) & \longrightarrow & \Lambda \\ (\dim X = d) & & & & (\mathbb{Z} \text{ или } \mathbb{Q}) \\ (f, & & g) & \longmapsto & \langle f, g\rangle = \text{"}\int f\cdot g\text{"} \end{array}$$

индекс пересечения в $X\times X$

Мораль: грубее Mot_{num} мотивов не бывает (если убили pt, то убили и все остальное)

И вообще, если для f нашлось g: $\int f \cap g \neq 0$, то f нельзя убить никак

9 $Chow^0_\Lambda(X) = \Lambda^{\#\text{компонент связности } X}$

$Chow^1(X) = Div(X)$

$$Mot_{num}(\underset{\substack{\shortparallel \\ M(pt)}}{\Lambda}, \underset{\substack{\text{связная} \\ \text{кривая}}}{M(C)}) = \text{дивизоры}/\sim$$, где $\sim$ = равенство степеней

Стандартная гипотеза D: численная экв-ть $\otimes \mathbb{R}$ = гомологическая экв-ть

т.е. $Mot_H = Mot_{num}$

Определим категорию гладких соответствий

$Ob(SmCorr) = SmVar$

морфизмы:

$Sm\,Cor(X, Y) = \mathbb{Z}^{\{Z \subset X \times Y\}}$ — замкнутое неприводимое подмногообразие, доминантное над X, конечное над одной из компонент X

$$Chow(M(X), M(Y)) = \frac{Sm\,Cor(X,Y)}{Im\left(Cor(X \times \mathbb{A}^1, Y) \xrightarrow{i_0^* - i_1^*} Sm\,Cor(X,Y)\right)}$$

нулевая когомология комплекса Суслина

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{i_0} & \\ X \times \{1\} & \xrightarrow{i_1} & X \times \mathbb{A}^1 \end{array}$$

$$\mathbb{Q} \otimes K^n_{\circledast}(X) \cong \bigoplus_{i \geq 0} DM(X, \mathbb{Q}(i)[2i-n])$$

$K^b(Sm\,Cor)$ — add. категория локализуем по

$X \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\pi_1} X$

$U \cap V \overset{i_0}{\underset{i_1}{\xrightarrow{i_0 - i_1}}} U \sqcup V \longrightarrow U \cup V$

и берем карубизацию:

получаем категорию эффективных геометрических мотивов Воеводского

DM^{eff}_{gm}. В ней сидит $Chow^{eff}$, есть теорема о сокращении, есть $\mathbb{Z}(1)[2]$; можно его тензорно обратить и получить категорию всех геометрических мотивов Воеводского.

$DM_{gm} = DM^{eff}_{gm}[\mathbb{L}^{-1}]$

∀ гомологического функтора будет иметь место
посл-сть Майера–Виеториса и гомотопическая инвариантность
Получается триангулированная категория.

см. Воеводский,
„Триангулированная категория мотивов над полем" или
Voevodsky + Weibel + Mazza

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Jannsen, 1992)

K – алг. замкнуто?

$Mot_{num,\mathbb{Q}}(K)$ – абелева, $\underbrace{\text{полупростая}}$,

$\Updownarrow$

∀ морфизм $X \longrightarrow Y$

$F \cong id_Z \oplus 0$

$\boxed{\text{Замечание}}$ для более тонкой экв-сти не может получиться абелева полупростая: $\mathbb{L}^i \longrightarrow X \longrightarrow \mathbb{L}^i$

спаривание
– аннулирует циклы, численно эквивалентные нулю.

Если есть что-то еще, то есть $s: \mathbb{L}^i \longrightarrow X$
т.ч. $\forall s': X \longrightarrow \mathbb{L}^i \quad s' \circ s = 0$
– в абелевой полупростой такого не бывает

Д-во

$$
\begin{array}{c}
Chow(M(X), M(Y)) \\
\downarrow \\
Mot_H(M(X), M(Y)) = A(X,Y) \\
\downarrow \\
Mot_{num}(M(X), M(Y)) = B(X,Y)
\end{array}
$$

– конечномерно над $\mathbb{Q}$

$H = H^{et}_{\mathbb{Q}_\ell}$

$\ell \neq p = \operatorname{char} K$