

Замечания:

① $Z \subset X \times Y$, Z/X конечен
$$\begin{array}{c} Z \\ \downarrow \\ X \end{array}$$
 - замкнутый морфизм $\Rightarrow$
доминантность над $X \Leftrightarrow$ сюръективность над X

② Недостаток описания Chow по Воеводскому

- циклы нельзя переворачивать (может пропасть конечность)

Возвращаясь к т. Jannsen

 Mot_{num}/K достаточно доказывать для эрмитовых мотивов коэффициенты - в поле F характеристики 0. (а K - любое)

Шаг 0

Лемма

 $\forall$ гладкого X/K Chow_{K,F}/числ. зив. конечномерно
 Док-ва рассмотрим $H = H_{\mathbb{Q}_\ell}^i(-\tilde{r})$
 $K \hookrightarrow K^{alg}$ $\ell \neq \text{char } K^{alg}$

Замечание

можно взять $F = \mathbb{Q}$

Гипотеза (Бейлинсон)

 K - конечно $\Rightarrow$ на Chow_{K,\mathbb{Q}}(-)
рациональная зив-сть
равна численной
 C -гладная кривая $\Rightarrow$
 $\text{Ker}(\text{Chow}_{\mathbb{Z}}^1(C) \rightarrow \text{Chow}_{\mathbb{Z}}^1(C)/\text{числ. зив.})$
 $\parallel$
 $\underline{Y}(C)(K)$
 $\leftarrow$ якорная кривая C
 K -конечно $\Rightarrow - \otimes \mathbb{Q} = 0$
 (все точки кручения)
Пусть $\dim X = d$ Chow_{\mathbb{Q}}ⁱ $\times$ Chow_{\mathbb{Q}}^{d-i} $\longrightarrow \mathbb{Q}$ - спариваниеРассмотрим такие $c_1, \dots, c_n \in \text{Chow}_{\mathbb{Q}}^{d-i}(X)$,
что $\mathbb{Q}_\ell$ -базис $\mathcal{C}_H(\text{Chow}_{\mathbb{Q}}^{d-i}(X))$
 $H^{2d-2i}_{\mathbb{Q}_\ell}(X)(i-d)$ - конечномерно над $\mathbb{Q}_\ell$
 $X_{K^{alg}} \longrightarrow X$
Тогда $x \in \text{Chow}_{\mathbb{Q}}^i(X)$ численно эквивалентен 0

$$\int x \cdot c_i = 0 \quad \forall i$$

"очевидно", если же есть $C \in \text{Chow}_{\mathbb{Q}}^{d-i}(X)$, то $\exists d_i \in \mathbb{Q}_\ell: \mathcal{C}C = \sum d_i \cdot \mathcal{C}c_i$

$$\leadsto \int x \cdot C = \sum d_i \int x \cdot c_i$$

(следует из то, что индекс пересечения считается по эрмитовым мотивам)

$$\Rightarrow \dim \text{Chow}_{K,\mathbb{Q}}^i(X) \leq n$$

потому что рассмотрим отображение

$$\text{Chow}_{\mathbb{Q}_e}^i(X): X \mapsto (\int X \cdot c_1, \dots, \int X \cdot c_n) \in \mathbb{Q}^n$$

и применим теорему о гомоморфизме

Замечание K -анализируемо $\Rightarrow \text{Chow}_{\mathbb{Q}_e}^i(X) / \text{гомом. эквив.} \cong \text{Im } \text{Chow}_{\mathbb{Q}_e}^i(X) \subset \mathbb{Q}^n$

$\text{Chow}_{\mathbb{Q}_e}^i(X)$ не обязательно равно $\text{Chow}_{\mathbb{Q}}^i(X) \otimes \mathbb{Q}_e \cong \text{Im } \text{Chow}_{\mathbb{Q}_e}^i(X)$

$$\text{Chow}_{\mathbb{Q}_e}^i(X) \xrightarrow{\quad} H_{\mathbb{Q}_e}^{2i}(X) \xrightarrow{\quad} \text{Chow}(X) \otimes \mathbb{Q}_e \rightarrow H_{\mathbb{Q}_e}^{2i}(X)$$

$\downarrow$ $\searrow$ *лучше*

$$\text{Chow}(X) \otimes \mathbb{Q}_e \rightarrow H_{\mathbb{Q}_e}^{2i}(X) \otimes \mathbb{Q}_e$$

т.е. нужно правильно доказать на $\mathbb{Q}_e$

Var 1 $\forall X/K$. Рассмотрим автоморфизмы $\text{Mot}_{\text{num}}(X)$:

Тогда $\text{Mot}_{\text{num}}(\text{Mot}_{\text{num}}(X), \text{Mot}_{\text{num}}(X))$ — неупрощенная алгебра. Почему?

$\uparrow$ с коэфф. в F

$\mathcal{A}(X)$

$\mathcal{Y}(\mathcal{A}(X)) = 0$

$\uparrow$

$\mathcal{A}(X) = \bigoplus \text{Mat}^n(\mathbb{D}_i)$

$\swarrow$ тела над F

Все еще фиксировано $H, \ell \neq \text{char } K$, и т.д.

Возьмем $F = \mathbb{Q}_e$; рассмотрим $\mathcal{B}(X) = \text{Chow}_{\mathbb{Q}_e}(\mathcal{M}(X), \mathcal{M}(X)) / H\text{-экв.}$

$\parallel$

$\text{Mot}_H(\mathcal{M}(X), \mathcal{M}(X))$

$\swarrow$

$\mathcal{A}(X)$

Надо доказать: $\text{Ker}(\mathcal{B}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X))$ содержит $\mathcal{Y}(\mathcal{B}(X))$

Берем $j \in \mathcal{Y}(\mathcal{B}(X))$

$C \in \text{Chow}_{\mathbb{Q}_e}^d(X \times X) : \int C \cdot j \neq 0$

$j' \in \text{Chow}^d(X \times X)$

$\swarrow$ — подвен j

$C \cdot j = \bigoplus_{i=0}^d (-1)^i \text{Tr } H^i(\mathcal{M}(C) \circ \mathcal{M}(j))$

$\text{Im}^t(-\circ_j) \in \mathcal{Y}(\mathcal{B}(X)) \rightarrow$ т.е. по-прежнему действует на $H^i(X)$

$\leadsto \text{образ} = 0$

Var 2

$\forall M \in \mathcal{B}(\mathcal{J}) \text{ Mot}_{\text{num}}, F \quad \mathcal{A}(M) \text{ полупр. ?}$

$\rightarrow \exists X: M(X) = M \oplus M'$

Пусть $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\mathcal{A}(M))$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}(M) & \text{Mot}_{\text{num}}(M', M) \\ \text{Mot}_{\text{num}}(M, M') & \mathcal{A}(M') \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Y} \circ \text{Mot}_{\text{num}}(M', M) \\ \text{Mot}_{\text{num}}(M, M') \circ \mathcal{Y} \quad \text{Mot}_{\text{num}}(M, M') \circ \mathcal{Y} \circ \text{Mot}_{\text{num}}(M', M) \end{pmatrix}$$

$\exists N: \mathcal{Y}^N = 0 \rightarrow$ какой-то степен $= 0$ $\swarrow$ двусторонний идеал $(N?)$

Var 3

(Mot_{num} - карбулева категория)

$\forall$ объект = прямая сумма различных:

$$M = \bigoplus M_i$$

$\text{End } M_i$ - тело $\forall i$

$\rightarrow$ наша категория $= \bigoplus \text{End}(M)$ -mod - полупроста

почему? $\nearrow M$ -неразложимый объект

$M^{\oplus i} \subset \text{Mot}_{\text{num}}$

Остается доказать, что Если M, M' - неразложимые, то или $M \cong M'$, или

$$\text{Mot}_{\text{num}}(M, M') = \{0\}$$

Пусть $\text{Mot}_{\text{num}}(M, M') \neq \{0\}$

$$\text{Mot}_{\text{num}}(M', M) \circ \text{Mot}_{\text{num}}(M, M')$$

- если эта композиция $= 0$, то $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \text{Mot}_{\text{num}}(M, M') & 0 \end{pmatrix}$ - т.е. по-прежнему двусторонний идеал в $\text{End}(M \oplus M')$ не бывает!

3

Если h композиция $\neq 0$, то $\exists m_1 \in \text{Mot}_{\text{числ}}(M', M)$, что $m_2 \in \text{Mot}_{\text{числ}}(M, M')$

$$m_1 \circ m_2 \neq 0$$

$\uparrow$
 $\mathcal{A}(M')$ — тело

$$m_1 \circ m_2 \circ (m_1 \circ m_2)^{-1} = \text{id}_M$$

$\rightarrow$ и m_1 всего обратный справа

$\rightarrow M$ — прямое слагаемое M'

$$\rightarrow M \cong M'$$

□

Замечания

- ① Для любого m -морфизма численных модулей: $m \in \text{Mot}_{\text{числ}}(X_1, X_2)$ можно рассмотреть $\text{Ker}(m)$, $\text{Im}(m)$, $\text{Coker}(m)$ — и это прямые слагаемые соответствующих X_i

Проблема! Что им соответствует на уровне когомологий?

Численные модули не соответствуют когомологиям, а для других нет полупростоты, если они не равны численным

- ② $\forall M \in \text{Mot}_{\text{числ}, \mathbb{Q}_\ell}$ $\exists!$ минимальный подмодуль в Mot_M

$$\begin{array}{ccc} B(X) & & \\ \varphi \downarrow & \searrow & \\ & B(X)/y & \\ \swarrow & & \\ \mathcal{A}(X) & & \end{array}$$

$\exists p \sim p$ поднимается в $B(X)$

$\exists M$ неразложим $\leadsto$ его подмодуль M' можно взять неразложимым: $\varphi(M') \cong M$

Если $\varphi(M'') \cong M \leadsto$

$$\begin{array}{ccc} M & & M' \\ \downarrow & \leadsto & \downarrow \\ M & & M'' \end{array} \quad \begin{array}{c} s' \uparrow s'' \\ s' \downarrow s'' \end{array}$$

композиция — id численно нулевая

$$s' \circ s'' = \text{id}_{M''} - \text{нильпотент}$$

$\Downarrow$
 s' обратим

$$B(M) \rightarrow \mathcal{A}(M)$$

Что теряется при переходе от Mot_M к $\text{Mot}_{\text{числ}, \mathbb{Q}_\ell}$?

- умирают нильрадикальные морфизмы
- могут умереть некоторые модули (на вырост еще: $B(X)/y \rightarrow \mathcal{A}(X)$)

□ 4

③ Уточним это:

пусть $M \in \text{ob Mot}_n$ и $\varphi(M) = 0$

$(X, p) \rightsquigarrow p$ численно эквивалентен 0

$$\rightsquigarrow \int p \cdot \Delta = 0$$

$$H^*(M) \hookrightarrow H^*(X) \xrightarrow{\quad} \sum (-1)^i \dim H^i(M)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum \dim \text{четных} = \sum \dim \text{нечетных}$$

Мотивные (стандартные) гипотезы

Гипотеза D:

числ. экв-сть = гомологическая экв-сть



Lefschetz-type conjecture:

Hard Lefschetz:

$$\begin{array}{ccccc}
 H^0 \wedge \mathbb{C} \ell(L)^{d-i} & & H^i & \xrightarrow{\quad} & H^{2d-i} \quad \underline{i=2s} \\
 & \nearrow \mathbb{C} \ell^s & & & \nearrow \mathbb{C} \ell^{d-s} \\
 \text{Chow}^s & \xrightarrow{\quad} & \text{Chow}^{d-s} & &
 \end{array}$$

$\downarrow \ell^{di}$

L_1 : прообраз алгебраической
класса — алгебраический

L_2 : обратное отображение
можно задать алгебраическим
циклом на $X \times X$

изоморфизм на гомологиках,
алгебраические классы переходят
в алгебраические классы,
будет ли там стрелочка?

взят
обрезки стрелок

$$L_1(X \times X) \Rightarrow L_2(X)$$

существование разложения диагонали
- Künneth decomposition of the diagonal.

$$\exists p_i, 0 \leq i \leq 2d$$

$$\wedge_2^{\text{Chow}}(X \times X)$$

т.ч. $H^j(p_i) = \begin{cases} id_{H^i} & \text{если } j=i \\ 0 & \text{если } j \neq i \end{cases}$

$$(X, \Delta)$$

$$\Delta \sim \sum p_i$$

Chow-Kinneth decomposition:
 (если это можно взять в Chow — расширение станд. гипотез)

sign conjecture:

$\exists p_{\text{чет}}, p_{\text{нечет}}$ — суммы p четных и p нечетных, т.е.

$$H^j(p_{\text{чет}}) = \begin{cases} \text{id}_{H^j} & \text{если } j \text{ четно} \\ 0 & \text{если } j \text{ нечетно} \end{cases}$$
 (и $p_{\text{нечет}} = 1 - p_{\text{чет}}$)

не бывает ненулевых H -мотивов, которые численно нулевые

Другое следствие sign conjecture:

$\Rightarrow$ численные мотивы образуют Tannakian category

$\mathcal{C}$ -абелева (в нашем случае полупростая) категория

$+ \otimes$, perfect duality

$+ H$: fiber functor (про-редуктивная?)

$\text{Aut}(H)$ групповая схема

$\Rightarrow \mathcal{C}$ -категория конечномерных представлений $\text{Aut}(H)$

У нас $\otimes$ есть, но оно неправильное

H -забывающий функтор из представлений в векторные пространства

$$\dim(X, p) := \int p \cdot \Delta$$

это может быть $\mathbb{C}\Delta$ — нехорошо.

Для Tannakian нужно, чтобы в p -ле были скалярные $\pm$, а не $(-1)^i$

$\leadsto$ нужно подправить $\otimes$

$$X \times X$$

$\curvearrowright$ — автоморфизм $\mathcal{U}(X) \otimes \mathcal{U}(X)$

— надо подправить его так, чтобы на

нечетных котом. размерностях менял знак.

Super Tannakian

• гипотеза Воеводского о smash nilpotence:

$$p \in \text{Chow}^i(\mathbb{A}^1 X),$$

$$p \underset{\text{hom}}{\sim} 0 \Rightarrow \exists N : p^N \in \text{Chow}^{\text{in}}(X^N)$$

$\underset{0}{\parallel}$ — раз. инв.-ств

Воеводский доказал, что это верно, если $p \sim 0$ алгебраически

• Kimura fin.-dim.

нейтральная Tannakian category

- это когда она $\mathbb{Q}_\ell$ -линейна

и функтор в к/м в.п. над $\mathbb{Q}_\ell$.