$\boxed{16.10.2012}$

М.В. Бондарко

Таннак. категории

нейтральные — остальные

$\underline{\mathcal{C}}$ — у нас абелева полупростая $\otimes$-категория „жесткая" ($\forall X\ \exists \hat{X}$) с $1$ (в смысле $\otimes$), K-линейная (char $k=0$), т.е.

$\mathcal{C}(1,1)=K$ (из этого следует, что $\underline{\mathcal{C}}(M,M')$ — K-пр-во $\forall M,M'$) ($1=M(pt)$ „$=K$")

таннакиевость:

$\exists\, H: \underline{\mathcal{C}} \longrightarrow Vect_k^{fin}$ — строгий $\otimes$-функтор, K-линейный

$\forall$ коммутативной K-алгебры $R$ $\quad H_R = H\otimes R$

Теорема $(\underline{\mathcal{C}},H,k)$ — танн. категория

$\rightsquigarrow \exists$ про-алгебраическая про-редуктивная группа над $K$

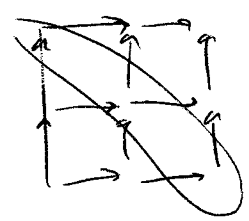
т.ч. $G(\operatorname{Spec} R) = \operatorname{Aut}_{\otimes} H_R$

$$\underline{\mathcal{C}} \simeq \bigoplus_{i\in I} \underline{\mathcal{C}}_i$$

---

бикомплекс $C^{\cdot\cdot}$

$$C_1^{\cdot}\otimes C_2^{\cdot} = \operatorname{Tot}(C^{\cdot\cdot})$$



+ правильный выбор знаков

$$C_1^i\otimes C_2^j \xrightarrow{-id,\ \text{если } i+j \text{ нечетно}} C_1^i\otimes C_2^j$$

$\hookrightarrow$ если на когомологиях менять знаки, то не попадем в $Vect_k^{fin}$ — там-то обычное $\otimes$

$\rightsquigarrow Mot_{num,\mathbb{Q}_\ell}$ надо поменять знаки в

$$Mot(X\times Y)\cong Mot(Y\times X),$$

иначе она получится супер-таннакиева, т.е. с функтором в супер-векторные пространства, т.е. $SVect_k^{fin}$

После этого $H:=\bigoplus_i H^i_{et,\mathbb{Q}_\ell}(\ldots)$

$V=V_{чет}\oplus V_{неч.}$: $H_{чет}=\bigoplus_i H^{2i}_{et,\mathbb{Q}_\ell}$, $H_{неч.}=\bigoplus H^{2i+1}_{et,\mathbb{Q}_\ell}$

---

$C$ — аддитивная тензорная $\mathbb{Q}$-линейная категория

$$X^{\otimes n} \curvearrowleft S_n \rightsquigarrow \mathbb{Q}[S_n] \longrightarrow \underline{\mathcal{C}}(X^{\otimes n}, X^{\otimes n})$$

$$p_{чет} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sigma\ , \quad \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} i(\sigma)\sigma = p_{неч.} \ \text{— идемпотенты}$$

образ этого, прим. к $X^{\otimes n}$ — ~~n-ая~~ внешняя степень $X$ $\quad X^{\wedge n}$

образ этого, примененный к $X^{\otimes n}$ — n-ая симметрическая степень $X$ $\quad S^n(X)$

Это имеет смысл: если $V$ — вект. пр-во, то

$\mathrm{Ker}\, p_{чет} = \langle \ldots \otimes u \otimes \ldots \otimes v \otimes \ldots - \ldots \otimes u \otimes \ldots \otimes v \otimes \ldots \rangle$

$\mathrm{Ker}\, p_{неч.} = \langle \ldots \qquad + \ldots \qquad \rangle$

$S^n(V[1]) = V^{\wedge n}[n]$

$\mathbb{Q}[S_n]$-модуль $W$

$\mathrm{Im}\, p_{чет}(W \to W)$
$\quad ||$
$\{S_n\text{-инв. эл-ты } W\}$

$\mathrm{Im}\, p_{неч}(W \to W)$
$\quad ||$
$\{\text{антисимм. эл-ты } W\}$

**Определение** (Кимура — O'Sullivan)

$X$ четно-конечномерен, если $\exists n: X^{\wedge n} = 0$

нечетно-конечномерен, если $\exists n: S^n(X) = 0$

> если может одновременно такой и сякой, то он нулевой

конечномерен, если $X \cong X_{чет} \oplus X_{неч}$

$X_{чет}$ — четно-к/м, $X_{неч}$ — нечетно-к/м

~~если~~ это выполнено в гомологических мотивах,

$\Longleftrightarrow$ выполнена sign conjecture для $X$

**Утверждение** Kim-Fin — тензорная карубиева подкатегория Mot

Kim-Fin — категория кимура-конечномерных мотивов

$F$ — морфизм в $\underline{\mathcal{C}}$ $\rightsquigarrow$ $\ldots \otimes F \otimes \ldots \otimes F \otimes \ldots \otimes F \otimes \ldots$

Если $Mot_{num}$ кимура-к/м $\rightsquigarrow$ это таннак. категория

$N \uparrow$

Если $Mot_{\sim}$ кимура-к/м $\rightsquigarrow$ $N$ — консервативный функтор

$h \in \underline{\mathcal{C}}(X,X)$, $N(h) = 0 \Rightarrow h \in \mathrm{Nil}(\mathcal{C}(X,X))$

$Mot_F | K$. Рассмотрим $H^i(X) = H^i_{et,\mathbb{Q}_\ell}(X_{K^{sep}}) \circlearrowleft G_K$

Любое поле! непрерывное действие

$\rightsquigarrow G_K \longrightarrow GL_{\mathbb{Q}_\ell}(H^i(X))$ — представление Галуа

$Rep_{cont}(G, \mathbb{Q}_\ell)$ — таннакиева (нейтральная)

$H(R) = R$ как вект. пр-во над $\mathbb{Q}_\ell$ — забывающий функтор

## Гипотеза Тейта

Пусть $K$ — конечно порожденное поле. Тогда
$X$ — гладкое проективное

$$Im\big(\underset{\underset{Chow_F(M, F\{i\})}{\parallel}}{Chow^i(X)} \longrightarrow H^{2i}(X)(i)\big) \overset{?}{=} \big(H^{2i}(X)(i)\big)^G$$

$F\{i\} = L^{\otimes i}$

„$\subset$" — очевидно

т.е. вопрос в сюръективности

$\boxed{\text{Утверждение}}$ $F = \mathbb{Q}_\ell$, гипот. Тейта $/K \Rightarrow$ функтор $\oplus H^i$ — полный (в $Rep_{cont}(G, \mathbb{Q}_\ell)$) или в градуированную $Rep_{cont}(G,\mathbb{Q}_\ell)^{\mathbb{Z}}$

Док-во: Достаточно д-ть для мотивов многообразий.

Пусть $X_1, X_2$ — связные проективные многообразия

$\dim X_1 = d_1$

$\dim X_2 = d_2$

— морфизмов между разными компонентами все равно нет, поскольку у них разные веса

$$Chow(M(X_1), M(X_2)) \longrightarrow \bigoplus_i Rep_{cont}(G,\mathbb{Q}_\ell)\big(H^i(X_2), H^i(X_1)\big)$$

$\rightsquigarrow$ по ф. Кюннета + двойств. Пуанкаре

$$\bigoplus\big(H^i(X_1)\otimes \widehat{H^i(X_2)}\big)^G \qquad \big(H^{2d_2}(X_1\times X_2)(d_2)\big)^G$$

$$\cong \bigoplus\big(H^i(X_1)\otimes H^{2d_2-i}(X_2)\big)^G$$

по гипотезе Тейта такой элемент действительно задается элементом из Chow □

$\rightsquigarrow Mot_{H,\mathbb{Q}_\ell} \longrightarrow Rep_{cont}(G,\mathbb{Q}_\ell)^{\mathbb{Z}}$ — полный функтор, строгий

$F: M_1 \to M_2$, $H(F)$ — изо $\Rightarrow F$ — изо  $H(F)^{-1} = H(F')$

по гипотезе Тейта

$\to$ он консервативный

→ это „вложение". Как посчитать образ?

(Если $F = \mathbb{F}_q \rightsquigarrow G = \hat{\mathbb{Z}} = \langle \mathrm{Frob}_{\mathbb{F}_q} \rangle$)

гипотеза: полученные представления полупросты

(она следует из гипотезы Тейта + гипотезы D)

какие бывают простые представления $\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{Frob}]$?

достаточно знать собственные числа — это числа Вейля (Делинь)

имеющие модуль $q^{i/2}$ при любом вложении в $\mathbb{C}$.

для абелевых многообразий над конечным полем все хорошо.

---

Конечные открытые морфизмы в Top — не есть хорошо

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \rightsquigarrow \mathbb{C} \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$$

— две копии $\mathbb{C}$, склеенные по 0.

$$X \xrightarrow{\text{связно}} Y$$

— этальное накрытие (этальный конечный сюръективный морфизм)

$\Updownarrow$

сущ. этальное $Y' \hookrightarrow Y$:

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array} \qquad \text{т.ч. } X' \cong \coprod_i Y' \to Y'$$

**Опр.** $f: X \longrightarrow Y$ — (этальное) накрытие Галуа,

если $\exists$ конечная $G$. $X \times_Y X \cong X \times G$

$G \curvearrowright X/Y$

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \xrightarrow{(id, g)} & X \times_Y X \\ (x, g) & \longmapsto & (x, gx) \end{array}$$

$\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, F(X))$ //

на уровне колец — это когомологии Амицура

$H(R') \rightrightarrows H(R' \otimes_R R') \equiv H(R' \otimes_R R' \otimes_R R')$

**Утв.** $H^i_{Čech}(Y, F) = H^i(G, F(X))$ //

$$X \leftleftarrows X \times X \leftleftarrows X \times X \times X \equiv \ldots$$

$$X \qquad X \times G \qquad X \times G \times G$$

$$F(X) \rightrightarrows F(X)^{\times G} \rightrightarrows F(X)^{\times G \times G}$$

Если $X$ — точка в соотв. топологии
(спектр строго гензелева кольца
$\Leftrightarrow \forall$ этальное покрытие $X$ расщепляется)
$\Rightarrow$ функтор $F \xrightarrow{\Gamma_X} F(X)$ точный
$\Rightarrow H^i(F, X) = H^i(\Gamma_X(F)) = 0 \ \forall i \geq 0$

---

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ S \end{array} \qquad H^i(X, F) \cong H^i(S, Rf_* F)$$

$\to$ есть спектральная последовательность, сходящаяся к $H^i(Y, F)$:
(этальный случай)

$$H^i(\underbrace{X^{j-1}}_{\underbrace{X \times_Y X \times_Y \ldots \times_Y X}_{j-1}}, F) \Rightarrow H^{i+j}(X, F)$$

$$\begin{array}{c} \operatorname{Spec} K' \\ \downarrow \\ \operatorname{Spec} K \end{array}$$ — конечные сепарабельные — стремятся к $K_{sep}$.

---

Как изучать $H^i(X)$, если $X$ — не гладкое проективное?
в характеристике 0 есть т. Хиронаки о <u>разрешении особенностей</u>

<u>Лемма</u>: $X \hookrightarrow X'$
собственное

1. $X$ — негладкое $\Rightarrow$ можно нормализовать + поразрезать подмногообразия коразмерности $> 1$
$\to$ получить гладкие.
2. $X$ — гладкие $\to \exists X'$ и в нем $N$: $X = X' \setminus N$
$X'$ — гладкое собственное
$N$ — дивизор с нормальными пересечениями.
(компоненты $N$ гладкие и пересекаются трансверсально)

---

Пусть $K$ — совершенное поле $\Rightarrow \forall X$ существует собственное <u>гиперпокрытие</u> $X_i \setminus N_i$, взять предел по всем гиперпокрытиям $\to$ посчитать $H^i$.
(как в комплексе Чеха)
— симплиц. объект + свойство?