exp: $\mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C}^*$ — пример (универсального) накрытия Галуа (топологического)

$G=\underset{=\pi_1(\mathbb{C}^*)}{\mathbb{Z}}$ — действует сдвигами на $2\pi i$

Для алгебраических этальных морфизмов все группы проконечные

$\pi_1^{et}(\mathbb{C}^*)=\hat{\mathbb{Z}}$

Для тора $G=\mathbb{Z}^n$

Для алгебраического абелева многообразия $\hat{\mathbb{Z}}^{2d}$
(во всяком случае, в хар-ке 0)

$$H^i(pt_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^i(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \forall i$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r, "\sim"] & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[G] \arrow[r, "g-1"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[G]) \arrow[l, bend right, "tr=g+1"'] \end{tikzcd}$$

→ когомологическая размерность $=+\infty$

Если $Gal(K)$ „большая", то легко заработать „большую" $H^2(pt_K, \dots)$

Зачем нужны гипотезы Вейля?

$\#X(\mathbb{F}_{q^n})$ — возвратная последовательность
⇒ можно оценить ее „сложность"

И саму $\#X(\mathbb{F}_{q^n})$ можно оценить

Особенно полезно применять со слабым Лефшецом WL

В частности, можно рассмотреть гладкое полное пересечение

$\mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ ← например, отображение Веронезе

пересечение

$$\mathbb{P}^{N-d} \cap \mathbb{P}^n = Z \rightsquigarrow H^i(Z, \Lambda) \overset{WL}{\cong} H^i(\mathbb{P}^n, \Lambda), \ i<n-d$$

Λ: $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_\ell$, $\mathbb{Q}_\ell$

Если Z гладкий размерности $n-d$, то по двойственности Пуанкаре

$$H^{2(n-d)-i}(Z,\Lambda) \cong H^i(Z,\Lambda)(i+d-n)$$

$$H^i(Z,\Lambda) = H^i(\mathbb{P}^{n-d},\Lambda) \text{ при } i \neq n-d$$

$\# Z(\mathbb{F}_{q^m})$; пользуемся гипотезой Римана для H^{n-d}

$$\left|\# Z(\mathbb{F}_{q^m}) - \# \mathbb{P}^{n-d}(\mathbb{F}_{q^m})\right| \leq \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^{n-d}(Z, \mathbb{Q}_\ell) - q^{m(n-d)/2}$$

Комментарий к гипотезе Тейта:

$$cl^i : \mathrm{Chow}(X_k) \otimes \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow H^{2i}_{et}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)(i)^G$$

Если X_k, k — не конечно порождено

то $\exists\, X'/_{k'}$ т.ч. $X = X'_k$

k' — кон. порождено, $k' \subset k$

Аналогично про любой элемент $\mathrm{Chow}^i(X)$

Знают, можно перейти к пределу!

Собственные гиперпокрытия над K

$\exists$ собственное гиперпокрытие X

компоненты которого — регулярные дополнения

NCD до проективных регулярных многообразий над K

дивизор с нормальными пересечениями

(над совершенным полем регулярное $\Rightarrow$ гладкое)

отображения, ведущие к X (или все?) — собственные

$$\begin{array}{c} X_\bullet (\,\cdots \Rrightarrow X_i \Rrightarrow \cdots) \\ \downarrow \\ X \end{array}$$

X_i собственно покрывает cosk_i

$X_{i-1} \Rrightarrow X_{i-2}$

Веса для когомологий

<u>простой случай</u>: X — гладкое проективное над $\mathbb{F}_q$ (ну, или над $\overline{\mathbb{F}_q}$)

$H^i(X_{\bar{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ — представление Галуа

имеет вес i если модули всех собств. чисел Fr_q на M равны $q^{i/2}$ (для всех вложений $\mathbb{Q}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}$)

<u>второй случай</u> гладкое проективное над K

как определить веса?

Главное: между представлениями разного веса — только нулевые отображения
морфизмы имеют геометрическое происхождение
$\Rightarrow$ коммутируют с действием группы Галуа
представления данного веса = абелева подкатегория в категории всех представлений

От гладкого X/k переходим к гладкому X'/k'

k' — конечно порожд. над простым подполем

$\rightsquigarrow$ поле частных $\left(\mathbb{F}_p[x_1,\dots,x_n]/I\right) = R$
или $\cancel{\mathbb{Z}}[x_1,\dots,x_n]/I$

поле рац. функций многообразия над $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{F}_p$ $\quad V$

$\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Q}$?

$\boxed{\text{Если над } \mathbb{F}_p}$

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\text{гл. проект}"'] & X_V \arrow[d, dashed, "\text{проект., но не гладк}"] \\
\operatorname{Spec} k' \arrow[r, hook, "\text{общая точка}"'] & V
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ можно взять открытое S — гладкое проективное над $\mathbb{F}_p$

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & X_V \arrow[dd] \\
& X_S \arrow[ur] \arrow[dd, "\text{гладкое проективное}"] & \\
\operatorname{Spec} k' \arrow[rr, hook] & & V \\
& S \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Исправляем:

$\operatorname{Spec} k'$ — общая точка $\operatorname{Spec} R$, R — конечно порождено над $\mathbb{Z}$

$\underline{\operatorname{char} S \neq \ell}$

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[d, "\text{гладкие проективное}"'] & & X_R \arrow[d, "\text{проективное}"] \\
\operatorname{Spec} k' \arrow[rr, hook, "\text{общая точка}"] \arrow[dr, bend right] & X_S \arrow[ur] \arrow[d, "\text{гладкое проективное}"] & \operatorname{Spec} R \\
& S \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

поле частных замкнутой точки S конечно

Пусть $s \in S$ — замкнутая точка

$$\Downarrow$$

$$H^i_{et}(X'_{\bar{k}'}, \Lambda) \cong H^i_{et}(X_{\bar{s}}, \Lambda)$$

($\bar{\ }$ = сепараб. замыкание)

Как это доказывается?

можно считать, что $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$

Λ — постоянный пучок на X_S

$X := X'$

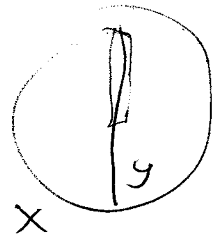
$$\begin{tikzcd}
 & \Lambda \arrow[d, dotted, dash] & \\
X_{\bar k} \arrow[r] \arrow[d] & X_S \arrow[d] & X_{\bar s} \arrow[l] \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}\overline{K'} \arrow[r] & S & \bar s \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

геометрические точки

Хочется взять обратные образы пучка Λ слева и справа

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r] \arrow[d, dashed] & Y \arrow[d, "j"] \\
U \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

$F(U)$



$$j^* F_{\text{пред}}(V) = \varinjlim F(U)$$

$$(j^*F)_{\text{прав}} = \text{пучкование } (j^* F_{\text{пред}})$$

достаточно ограничить Λ на генерализацию $\bar s$ в $\operatorname{Spec} K$

$$\begin{tikzcd}
 & \Lambda & \\
S \arrow[r, "j"] & \operatorname{Spec}\mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

$j^*\Lambda$ — постоянный

$$\begin{tikzcd}
X_{\bar k} \arrow[r, "\text{про-этальное}"] \arrow[rr, bend right, "\text{(про-) этальна}"'] & X_k \arrow[r, "\text{про-открытое вложение}"] & X_S
\end{tikzcd}$$

⇝ то, что (про)-этально на X_S, (про)-этально на $X_{\bar k}$

⇝ это аналогично случаю открытого вложения $Y \hookrightarrow X$

→ никаких проблем с обратным образом нет

Что происходит над $X_{\bar s}$?

$$X_S \times S^h_{\bar s}$$

$$\begin{tikzcd}
\Lambda & \Lambda & \Lambda \\
X_{\bar k} \arrow[u, dash] \arrow[r] \arrow[d, "p_{\bar k}"] & X_S \arrow[u, dash] \arrow[d, "p_S"] & X_{\bar s} \arrow[u, dash] \arrow[l] \arrow[d, "p_{\bar s}"] \\
\operatorname{Spec}\bar K \arrow[r] & S & \bar s \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Берем $R^i p_{\bar k *}\Lambda\ (\operatorname{Spec}\bar K)$

$R^i p_{\bar s *}\Lambda\ (\operatorname{Spec}\bar s)$

это и есть когомологии

Применяем теорему о собственной замене базы:

$\rightsquigarrow R^i p_{S*}(\Lambda)$ нужно ограничить на точки $\operatorname{Spec} \bar{k}$ и $\operatorname{Spec} \bar{s}$

- гладкий проективный морфизм сохраняет локальную постоянность пучков

$$Y_{\bar k} \longrightarrow X_S \hookleftarrow X_{\bar s}$$

есть стрелка

$$X_S \times S^h_{\bar s}$$

Что происходит с представлениями Галуа?

S — аффинная схема, $s \in S$ — замкнутая точка,

$\operatorname{Spec} K' \hookrightarrow S$ — общая точка

$$\operatorname{Spec} k' \hookrightarrow S \hookleftarrow s$$

$$\begin{array}{ccc} G \curvearrowright \operatorname{Spec} \overline{R'} & \to & \operatorname{Spec} R' = S \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bar s & \dashrightarrow & s \end{array}$$

$\exists$ автоморфизмы из G, которые сохраняют фиксированный прообраз s в $\operatorname{Spec} \overline{R'}$ (точку $\bar s$)

— это <u>группа разложения</u> (с точностью до сопряженности — соотв. выбору $\bar s$)

$\cup$

<u>группа инерции</u> — соответствует гензелизации —

Хочется сказать, что фробениус можно перенести с $\bar s$ на $\operatorname{Spec} \overline{k'}$

~~[illegible]~~ представление Галуа <u>имеет вес i в точке s</u>,

если ~~[illegible]~~ (1) неразветвленное: эл-ты группы инерции s действуют тривиально

(2) Fr_s (любой) т.ч.

$$|\text{с.числа } Frob_s| = (\# \operatorname{Spec} s)^{-i/2}$$

Представление Галуа (K') <u>имеет вес i</u>, если оно имеет вес i во всех замкнутых точках некоторой непустой открытой подсхемы в $\operatorname{Spec} R$

Более правильно рассматривать веса пучков, а не групп когомологий (это „поточечные" веса)

Обычно веса определяют для представлений групп Галуа числовых полей
Фонтэн ~~[illegible]~~ — Мазур)
Гипотеза: $\mathbb{Q}_\ell$ представление равно (подкрученному?) подфактору
(непрерывное)
$H^i(X)$ для некоторого X над числовым полем K
(гладкого проективного??)

$$\Updownarrow$$

- оно неразветвлено кроме конечного мн-ва точек
- представление де Рама над точками, лежащими над ℓ
(потенциально или полустабильное)

Представление Галуа называется смешанным,
если оно обладает конечной фильтрацией с чистыми факторами

Мораль: чистые мотивы ⟷ чистые представления ⟷ чистые структуры Ходжа
смешанные ⟷ смешанные ⟷ смешанные

Когомологии де Рама

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^2_X \longrightarrow \Omega^3(X) \longrightarrow \dots$$

когерентные пучки
↓
для аффинного X у них нет высших когомологий → дост. взять афф. покрытие

→ в случае $\mathbb{R}$ достаточно взять глобальные сечения,
и посчитать когомологии этого комплекса

в алгебраическом случае берем H^*(этот комплекс) → в. п. над K

Как правило, $\operatorname{char} K = 0$

Фильтрация: $F^i\Omega^*X$ → наш комплекс
(убывающая)
обрезание с i-ого места

→ есть отображение на когомологиях
→ получаем фильтрацию на H^*
–(Hodge – de Rham spectral sequence)

$$H^i_{sing}(X, \mathbb{C}) \cong H^i_{dR}(X) \qquad F^j H^i_{dR}(X_{\mathbb{C}})$$

$$\cong H^i_{sing}(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} \qquad \| $$

$$H^i_{sing}(X, \mathbb{Q}) \qquad \bigoplus_{\substack{a+b=j \\ a \geq j}} H^{ab}(X)$$

сопряжение

$$\overline{H^{ab}(X)} = H^{ba}(X)$$

лефшец ⟷ $2\pi i$

тут сопряжены периоды