30.10.2012

Исправления:

Замечание: в прошлый раз мы строили S по K',

$$\begin{array}{c} S \\ \downarrow \\ \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z} \end{array}$$

S должна быть связной

$$X_i \longrightarrow (\mathrm{cosk}_{i-1}(\mathrm{Sk}_{i-1} X))_i$$ — правильно

Fontaine — Mazur conjecture: K — числовое поле

неприводимое $\mathbb{Q}_\ell$-представление де Рама над всеми точками над ℓ почти всюду неразветвленное

$\Updownarrow$

неприводимый подфактор в $H^{?}_{\mathbb{Q}_\ell,et}(\underset{\substack{| \\ \text{многообразия над } K}}{?})(?)$ ← с подкруткой

<u>Чистая структура Ходжа</u> (PHS) веса i $(i \in \mathbb{Z})$

- конечно порожденная абелева группа H ($\mathbb{Q}$-пространство), $H_\mathbb{C} = H \otimes \mathbb{C}$
- фильтрация $F^p H_\mathbb{C}$
- разложение Ходжа:

$$H = \bigoplus_{p+q=i} H^{pq} \qquad H^{pq} = \overline{H^{qp}}$$

$$F^p H_\mathbb{C} = \bigoplus_{j \geq p} H^{j,i-j} \qquad F^p_{H_\mathbb{C}} \cap \overline{F^{i-p+1}_{H_\mathbb{C}}} = 0$$

$$H^{pq} = F^p H_\mathbb{C} \cap \overline{F^{i-p} H_\mathbb{C}}$$

морфизмы — гомом. групп, сохр. фильтрацию и разл. Ходжа

$\rightsquigarrow$ абелева категория, тензорная, не полупростая

Структуры Ходжа зависят от вложения $K \hookrightarrow \mathbb{C}$

X — гладкое проективное

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega^1 X \to \Omega^2 X \to \cdots \longrightarrow \Omega^d X$$

(Бачина Постникова: см. Гельфанд-Манин)

$$F^p \Omega^*(X) = \omega_{\geq p}\, \Omega^*(X)$$
$$\downarrow$$
$$\cdots \to \Omega^p X \to \cdots$$

$$\rightsquigarrow H^*(X_{Zar}, F^p \Omega^* X) \longrightarrow H^*(X, \Omega X) = H^*_{sing}(X, \mathbb{C})$$

образ $= F^q H^*_\mathbb{C}(X)$

$E_1^{i,j} = H^i(X, \Omega^i X)$ — первый лист

$E_2^{i,j}$
подфактор $E_1^{i,j}$

$$H^{pq} \cong H^q(X, \Omega^p X)$$

⇝ эта спектральная посл-сть вырождается в $E_1^{\cdot,\cdot}$

$$(2\pi i)^m \mathbb{Z} \subseteq (2\pi i)^m \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

или H^{mm} — структура веса $2m$,
которая называется $\mathbb{Z}(-m)$, $\mathbb{Q}(-m)$ соответственно

Свойства:

① $H^i(P)$, P — гладкое проективное
PHS веса i — когомологическая теория Вейля

② $P = \mathbb{P}^N$ $\quad i = 2k, \quad k \in \mathbb{N}$
$H^i(P) = \mathbb{Z}(-k)$

③ Функториальность — ф-ла Кюннета + дв-сть Пуанкаре

Гипотеза Ходжа (стоимость: \$1000000)

$i > 0$, X - гладкое проективное

$$\mathrm{Im}\left(\mathrm{cl} : \mathrm{Chow}^i(X) \longrightarrow H^{2i}_{sing}(X, \mathbb{C})\right) = \left(H^{i,i}(X) \cap H^{2i}_{sing}(X, \mathbb{Q})\right)(i)$$

$$\mathrm{Chow}^i(X) \longrightarrow H^{2i}_{sing}(X, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^{2i}_{sing}(X, \mathbb{C})$$

Замечание:

$$H^{i,i}(X) \cap H^{2i}_{sing}(X, \mathbb{Q})$$

① Ходжевы классы дают подструктуру Ходжа в $H^{2i}(X, \mathbb{C})$

② γ — простой цикл коразмерности i в X
(подмногообразие)

$$\tilde{\gamma} \longrightarrow \gamma \hookrightarrow X$$

$H^*(X) \longrightarrow H^*(\gamma)$, двойственность Пуанкаре:

$$H^0(\tilde{\gamma}) \longrightarrow H^{2i}(X)(i)$$
$$1_{\tilde{\gamma}} \longmapsto \mathrm{cl}(\gamma)$$

⇝ $H^{2i}_{Hodge} = \mathbb{Q}(-i)^{\oplus n}$

Гипотеза известна для $i=1$ (даже с целыми коэффициентами), а для $i>1$ с целыми коэффициентами она неверна.

$\boxed{\text{Следствия}}$

① Гипотеза Ходжа $\Rightarrow$ мотивы относительно $H_{sing}^{(\mathbb{C})}$ вкладываются в категорию чистых структур Ходжа: $Mot_{H_{sing}}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \bigoplus_i PHS_i$

Док-во: аналогично утверждению про гип. Тейта

② Гипотеза Ходжа $\Rightarrow$ гипотеза типа Лефшеца

$2i<d$ класс гиперплоского сечения

$$\begin{tikzcd} H^{2i} \arrow[r, "\wedge cl(E)^{(d-2i)}"] & H^{2d-2i} \\ Chow^{i}(X) \arrow[u] \arrow[r, "\wedge E^{d-2i}"] & Chow^{d-i}(X) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$H^{2d-2i} \cong H^{2i}(2i-d)$$

$\Downarrow$

этот изоморфизм сохраняет ходжевы классы

Структура Ходжа веса i называется поляризуемой, если существует изоморфизм $H \cong \hat{H}(-i)$ который задает $(-1)^i$-знакопеременную невырожденную форму на $H_{\mathbb{Q}}$

поляризация

то есть, $P: H \times H \longrightarrow \mathbb{Q}(-i)$ — морфизм структур Ходжа

i — четное $\rightsquigarrow$ симметричная, полож. определенная

i — нечетное $\rightsquigarrow$ антисимметричная

$P(x, i^m \bar{x}) \geq 0$ — пол. определенная.

PPHS — полная подкатегория поляризуемых структур Ходжа

$\boxed{\text{Утверждение:}}$ ① PPHS — полупростая абелева категория

② $H^i(X)$ — PPHS

Док-во (1) H — поляризованное, H' — подструктура $\rightsquigarrow H = H' \oplus H'^{\perp}$

(2) $H^i \xrightarrow{\wedge cl(E)^{d-i}} H^{2d-i}$

хочется

$H^i \times H^{2d-i} \longrightarrow \mathbb{Q}(-d) = H^{2d}(X)$

(проблема в том, что это обычно вырождена

$$H^{i-2} \wedge \mathrm{cl}(E) \hookrightarrow H^i \longrightarrow H^{2d-i} \wedge^d E \twoheadrightarrow H^{2d-i-2}$$

Назовем примитивным, если лежит в

$$p^i H^i = \mathrm{Ker}\,(H^i \longrightarrow H^{2d-2i+2})$$

$$\rightsquigarrow \quad H^i \cong \underbrace{p^i H^i}_{\gamma} \oplus \underbrace{\mathrm{Im}\, H^{i-2}}_{\ni\, \alpha}$$

$p^{i-2} \oplus \ldots$ → примитивное разложение

$$\langle \gamma, \mathrm{cl}(E) \wedge \alpha \rangle = \underbrace{\langle \gamma, \mathrm{cl}(E)^{d-i+1}}_{=0} \wedge \alpha \rangle = 0$$

$$\forall i \leq 2 \qquad H^i \cong \bigoplus_{k \geq 0} p^{i-2k}(-k)$$

$H = H^{i*} \oplus H^{i\perp}$ — и просуммируем по всем k.

$p = \oplus p^k$ — со знаками!

Знакопеременность этой формы — Hdg (тоже называется гипотезой Ходжа) — для char $k > 0$ для эталных когомологий — неизвестна.

(3) Гипотеза Ходжа $\Rightarrow$ гипотеза (D)

$$\mathrm{Mot}_{H_{sing}} \hookrightarrow \oplus PHS_i$$

↓ абелева полупростая $\xrightarrow{\text{Jannsen}}$ это численная экв-сть.

GHC — обобщенная гипотеза Ходжа

$\lim \mathrm{Ker}(H^i(X) \longrightarrow H^i(U))$ — максимальной подструктуре Ходжа в $\bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}$, $p, q \geq c$

($U \subset X$, $X \setminus U$ — коразмерности c в X)

$$HC \xRightarrow{\text{WL+PD}} GHC \qquad (X \wedge E^i)\cancel{\times} C$$

кривая → C

$\boxed{\text{Замечание}}$ $HC \Rightarrow \exists$ разложение Кюннета

Смешанная структура Ходжа MHS:

$\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Q}$-mod $\quad H \oplus F^p H_{\mathbb{C}}$

$+W_i H$ т.ч. F задает структуру Ходжа веса i на Gr_i^W

возрастающая ~~[illegible]~~ фильтрация (весовая)

$\boxed{\text{Утв.}}$ MHS – абелева категория (с рациональными коэффициентами!)

Gr_w^i – точные эндофункторы

Есть расширения даже между поляризуемыми структурами разных весов

Про представления Галуа:

Над $\mathbb{F}_q$ разные веса разделяются, над замкнутым полем K – нет

→ есть смешанные представления Галуа: n-ый фактор веса n – абелева, но неточная подкатегория