Исправления:

06.11.2012

М. Бондарко

(1) В прошлый раз про поляризацию $P(CX, z)$

$$C_{HM} = \cancel{\ } - \cdot i^{p-q}$$

т.е. поляризация — <u>не</u> полож. опред. форма на четных/нечетных когомологиях

Нужна такая замена знака

(2) H^{et} — не поляризуемы в разумном смысле (нужно разложение Ходжа

(3) гипотеза Ходжа: пол. опр. $P(-,-)$ на примитивных алгебраических классах

$$H^{2i}_{prim}(X) \cap \mathrm{Im}\, Cl^i_{\mathbb{Q}}$$

класс гиперплоского сечения

$$H^{2i-2} \xrightarrow{\cdot L} H^{2i} \xrightarrow{\cdot L^{d-2i}} H^{2d-2i} \xrightarrow{\cdot L} H^{2d-2i+2}$$

$\sim$

его ядро — H^{2i}_{prim}

На $\mathrm{Im}\, Cl^i_{\mathbb{Q}}$ множитель i^{p-q} неактуален, ибо там $p=q=i$

$L + Hdg \Rightarrow D$ — достаточно проверять спаривание на этих классах

в char $p>0$ Hdg ничего доказывать не умеет

Еще примеры:

$H_{\mathbb{C}} \cong \bigoplus_{p+q=i} H^{pq}$ — <u>эффективная</u>, если $H^{pq} = \{0\}$ при $p<0$ или $q<0$

$H^i(X)$ — эффективна!

H^0: вес 0, никакого разложения, никакой фильтрации — просто группа

H^1: $H_{\mathbb{C}} = H^{10} \oplus H^{01}$

откуда берется такое разложение?

(структуры Ходжа нечетного веса четномерны! (в силу симметрии $H^{pq} = \overline{H^{qp}}$)

H^{01} $\qquad$ H^{10}

$\Lambda \hookrightarrow \mathbb{C}^n$

$\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2n}$ — <u>решетка</u>

$$\Lambda \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$$

ибо

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

$\Lambda \otimes \mathbb{R} = \mathbb{C}^n$

мы построили экв-сть

решетка $\longrightarrow$ структура Ходжа

└ это экв-сть категорий

Альтернативное описании фильтрации Ходжа.

$\mathbb{C}^* \circlearrowright H_{\mathbb{C}}$

x на H^{pq} : $x^p \bar{x}^q$

Смешанная структура Ходжа **MHS**:

- группа
- F^p на $H_{\mathbb{C}}$
- фильтрация весов (возрастающая) W_i
  и Gr_n^W — чистая структура Ходжа веса n

откуда они берутся?

гладкие с нормальными пересечениями

пусть $U = X \setminus \underbrace{\bigcup D_i}_{=D}$

(простая идея: взять гиперкогомологии комплекса де Рама — но это плохо!)

Вводится логарифмический комплекс де Рама

$(\Omega_X^* \subset) \, \Omega_X^* (\log D) \subset j_* \Omega_U^* \qquad j : U \hookrightarrow X$

(то есть ограничить поведение эл-тов Ω_X^* на D

$W_m(\Omega_X^i (\log D)) = \cancel{\sum_{k \le m} \Omega^{i-k} \wedge}$

Λ

Ω_U^i

$\frac{dz_i}{z_i}$ — лок. коорд. соотв. D_i

локально имеет вид $\bigoplus \frac{dz_{i_1}}{z_{i_1}} \wedge \frac{dz_{i_2}}{z_{i_2}} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_{i_k}}{z_{i_k}} \wedge \Omega^{i-k}$

$i_1, \ldots, i_k$ — различны

бета-версия

см. Peters, Steenbrink, Mixed Hodge Structures, p. 90

$\Omega_X^1 (\log D) = \bigoplus_k \frac{\partial z_{i_k}}{z_{i_k}} \mathcal{O} \oplus$ все как обычно

локально в $D_{i_1} \wedge \ldots \wedge D_{i_k}$

$\Omega_X^p (\log D)$ — p-ая внешняя степень

$$W_n \Omega_X^i (\log D) = \begin{cases} \Omega_X^{i-n} \wedge \Omega_X^n (\log D) & 0 \le n \le i \\ \Omega_X^i (\log D) & n \ge i \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

как вводится фильтрация на когомологиях?

$$W_m H^i(U) = \mathrm{Im}\left(H^i(X, \underset{W_{m-i}\Omega^*_X(\log D)}{\uparrow}) \longrightarrow H^i(X, Rj_*\Omega^* U)\right)$$

$\| \quad j_*$(гиперрезольвента комплекса)

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[dl] \\ \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

фильтрация Ходжа — как обычно

Мы определили стр. Ходжа, но не там, где хотели: не на U, а с помощью $j: U \hookrightarrow X$

кроме того, это все на уровне комплексных когомологий, а не целочисленных.

$$\mathrm{Im}\left(H^i(X; R^{\tau\le n}_{j_*}\mathbb{Z}_U) \longrightarrow H^i(X, Rj_*\mathbb{Z}_U)\right) = W_{n+i}H^i(U)$$

τ — канонич. фильтрация на $\mathbb{D}(Sh(X))$

фильтрация Лере

Спектральная последовательность весов:

с точностью до „сдвига слоев" равна спектральной последовательности Лере для j.

$$D \xhookrightarrow{i} X \xhookleftarrow{j} U \quad \Big| \quad \mathbb{Z}_X \to Rj_*\mathbb{Z}_U$$

$\downarrow$ есть выделенный треугольник

$$\underbrace{Ri_!}_{\substack{\| \\ Ri_*}} Ri^!\mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathbb{Z}_X \longrightarrow Rj_* \underbrace{Rj^*\mathbb{Z}_X}_{\mathbb{Z}_U}$$

ибо это замкнутое вложение

$Ri^!\mathbb{Z}_X = Ri_*\mathbb{Z}_D(-1)[-2]$

для модулей Ходжа, превратных пучков... имеет смысл подкрутка

в степени 0

в степ. 2 $\to$ есть т. посл-сть Гизина

для з. вложений прямой образ точен

$\to$ в этом случае спектральная посл-сть Лере соответствует длинной точной посл-сти Гизина

$$Gr_n^{\tilde{\tau}} Rj_* \mathbb{Z}_U = \bigoplus_{i_1,\dots,i_n} R\ell_{i_1,\dots,i_n *} \mathbb{Z}_{D_{i_1}\cap\dots\cap D_{i_n}}$$

— спектральная посл-сть весов

Спектральная посл-сть весов не зависит от компактификации: д-во Делиня (+ функториальность?)

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & X_1 \\
X_2 & \exists X_3 \arrow[u] \arrow[l]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[d, "p"] \\
U \arrow[ur, "j'"] \arrow[r, "j"] & X \arrow[d, "x"] \\
 & \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

p — собственные

$\Downarrow$

p_* точный

$$\begin{matrix} \tau_{\le n} Rj'_* \mathbb{Z}_U & & R x_* (R p_* \tau_{\le n} R j'_* \mathbb{Z}_U) \\ \text{vs.} & \sim & \\ \tau_{\le n} R j_* \mathbb{Z}_U & & R x_* (\tau_{\le n} R j_* \mathbb{Z}_U) \end{matrix}$$

Спектральная посл-сть весов $(\otimes \mathbb{Q})$ вырождается в E_2 за счет того, что веса „не смешиваются"

$$\cdots \; X_2 \;\substack{\to\\ \to\\ \to}\; X_1 \rightrightarrows X_0 \to X$$

$$E_1 = H^q(X_{p}) \Rightarrow H^{p+q}(X)$$

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

меньшей размерности, чем X.

Для двух гиперпокрытий есть их общее „измельчение"

Достаточно доказать, что если одно гиперпокрытие доминирует другое, то спектральная последовательность та же:

$$\begin{tikzcd} T_1(X) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "+"] & H^*(X)_1 \arrow[d] \\ T_2(X) \arrow[r, Rightarrow] & H^*(X)_2 \end{tikzcd}$$

— два варианта

изоморфизм на уровне групп + морфизм стр Ходжа сохраняет фильтрацию весов

как бы коммутативная диаграмма

строго сохраняет фильтрацию весов

$$\boxed{\begin{array}{c} H_1^i \xrightarrow{\sim} H_2^i \\ W_{\le n} H_1^i \cong W_{\le n} H_2^i \end{array}}$$

$\rightsquigarrow$ изоморфизм структур Ходжа

$\rightarrow$ произошло вырождение $\rightsquigarrow$ $T_1(X) \longrightarrow T_2(X)$ — изоморфизм, начиная с E_2.

поэтому это рассуждение работает только на уровне $\mathbb{Q}$, а не $\mathbb{Z}$.

Смешанные мотивы

над полем хочется, чтобы было:

- MM_k — абелева категория
- $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\forall"] \arrow[d] & H^i(X) \\ H^i_{MM}(X) \arrow[ur, "\exists"'] & \end{tikzcd}$$

  для любой теории когомологий Вейля (рациональной)

  точный, консервативный
- это тензорная категория; есть двойственность; $\mathbb{Q}(i)$ $(i \in \mathbb{Z})$

Гипотеза: такая существует (Бейлинсон)

функторы реализации

$$\begin{tikzcd} MM \arrow[r] \arrow[dr] & MHS \\ & \text{Gal-Rep}_{\mathbb{Q}_\ell} \end{tikzcd}$$

один смешанный мотив — одна когомология (точный!)

$W_{\le n}$ – фильтрация весов на MM (подкатегории)

– задается точными (идемпотентными) эндофункторами

$Gr^W_n MM$ = „чистые мотивы веса n" (численные) $= PM^n[n]$ веса n

или $-n$?

|| подкрученные кусочки, когомологии которых сидят в степени n

прямые слагаемые $Mot_{num}(P)$

Сами чистые мотивы там не сидят, вместо этого там сидят мотивы Чжоу; в производном смысле:

$$Chow \not\subset MM, \quad Chow \subset D^b(MM)$$

или $-i$? писать все с точностью до знака (ковар/контравар)

$$M \longmapsto \bigoplus H^i(M)$$

$H^i(M)$ имеет вес i

$\uparrow$

$Gr^W_i(MM)$

Chow–Künneth decomposition

Более общо,

Ext^i_{MM} между чистыми мотивами = высшие группы Чжоу (Блох) = мотивные когомологии

|| (Бейлинсон)

γ-куски K-теории

Что бы это дало?

Пусть есть точная последовательность когомологий (сингулярных или этальных)

⇝ по консервативности она поднималась бы до смешанных мотивов.

<u>Проблемы</u>: $Ext^i_{MM}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(j)) = 0$ при $i < 0$

| с другой стороны, это конкретный кусок K-теории (k-числовое)

⇝ гипотеза Бейлинсона – Суле

более слабая формулировка:

$\exists$ t – структура на DM геометрическое $\overset{?}{\cong} D^b(MM)$

т.ч. ее ядро равно MM

$$X \in DM^{i \le 0} \Leftrightarrow H^i(X) = 0 \quad i \geq 0$$

– следует из гипотез (большого количества)

Кандидаты:

- теория Nori — абстрактная
- Jannsen, Huber

$\downarrow$

категория „смешанных реализаций"

$H_{sing}(M) <$
- $\otimes \mathbb{C}$ — структура Ходжа: Gr_i^W — поляризуемы
- $\otimes \mathbb{Q}_\ell$ — этальные

можно завести категорию из этих данных (и сделать ее абелевой),
но лучше действовать на производном уровне (на уровне жесткого D)

вводится T-структура → ее ядро → на нем — фильтр. весов

1-мотивы — кусок MM ← ЕЩЕ ОДИН ВАРИАНТ

$\Downarrow$

стр-ры Ходжа: в разложении Ходжа

$(0,0)$

$(1,0) \quad (0,1)$ + поляризация

$(1,1)$

→ комплексы пучков

вес 0

$\Lambda \longrightarrow S$

вес 2 вес 1

лок. постоянный, локально в et — свободная аб. группа

полуабелево многообразие:

$0 \to T \to S \to A \to 0$

тор абелево