13.11.2012

М.В. Бондарко

В прошлый раз говорилось будто бы для проективного многообразия прямой образ точен. Это неправда!

По поводу смешанных мотивов:

$$\underset{\text{смм}}{MM_n} \subset \underline{Chow[-n]}$$
$$\cap$$
$$DM$$

гомологические

берем мотивы Чжоу с $(-n)$-ой группой когомологий и сдвигаем их на n: $[n]$

⤳ получается возрастающая фильтрация весов на категории мотивов

смешанные реализации

$MR \subset DMR$

абелева — триангулированная

RH_{sing} — комплекс, вычисляющий сингулярные когомологии

RH_{et} — этальные ⤳ RH_{sing}
$\downarrow$
RH_{et} — превращается в квази-изоморфизм после $\otimes \Lambda$

1-мотивы (0) — попытка получать смешанные мотивы

$M: \ L \longrightarrow S$

L — локально постоянный этальный пучок (f.p.p.R) (над $Spec\, k$)

$\wr\wr$

подгруп. $\mathbb{Z}^n$

S — полуабелево: $0 \longrightarrow T \longrightarrow S \longrightarrow A \longrightarrow 0$

T — тор (подкручение $\mathbb{G}_m^n$), A — абелево

① $-\otimes\mathbb{Q}$ — абелева категория

② Двойственность Картье (антиавтоморфизм, $L \leftrightarrow T$)

③ Фильтрация весов $W_{-3}M = 0$, $W_{-2}M = 0 \longrightarrow T$,

$W_{-1}M = 0 \longrightarrow S$, $W_0 M = M$

$K \subset \mathbb{C}$ H^0_{sing}

$$H^0_{sing}(L) \longrightarrow \overset{\text{что это?}}{\overline{H^0_{sing}(M)}} \longrightarrow H^1_{sing}(S)$$

$Gr_0^W H^0(M) = H^0(L)$ — тривиальная структура Ходжа

$Gr_1^W H^0(M) = H^1(A)$ — поляризуемая структура Ходжа веса 1

$Gr_2^W H^0(M) = H^1(T)\ (-1)$

При $K = \mathbb{C}$ получаем вложение (1-мотивы) $\hookrightarrow$ (такие стр-ры Ходжа)

анти-изоморфизм

H^0_{Φ}: $F^2 H^0_C = 0 \Leftrightarrow \overline{F^2 H^0_C} = 0$

эффективное

Гипотезы Делиня и других

как найти алгебраическое описание того, что мы получили такими вырезаниями из структур Ходжа?

Якобиан

C — гладкая проективная комплексная кривая рода g

$\sim H_1(C) = \mathbb{Z}^{2g}$

есть g независимых голоморфных диф. формы на C.

$\mathcal{L} = \mathbb{Z}^{2g} \subset \mathbb{C}^{2g}$

$$C(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^g/\mathcal{L}$$

Зафиксируем точку, любую другую можно соединить с ней путем и проинтегрировать вектор из дифф-форм вдоль этого пути

Якобиан — абелево многообразие, любое абелево изогенно якобиану

вложение решеток с конечным ядром

Триангул. категория $\otimes \mathbb{Q}$ порожд. мотивами гладких многообразий $\dim \leq 1$

О функторах весового комплекса

собственные (гипер)покрытия ; Cdh-покрытия — наиболее полезны

(собств. или эталные)

„те покрытия, в которых все точки поднимаются"

более слабые: Nis-покрытия — это такие эталные покрытия, в которых все точки поднимаются:

$$\begin{array}{ll} \sqcup U_i: & \forall x \in X\ \exists \text{ сечение} \\ \downarrow & \\ X & \end{array}$$

не обязательно замкнутая!

$$\begin{tikzcd} U_{01} \arrow[r] \arrow[d] & U_1 \arrow[d] \\ U_0 \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

элементарный выделенный квадрат

$U_1 \setminus U_{01} \cong X \setminus U_0$

покрытие X по Нисневичу

открытое плотное вложение

$\rightsquigarrow$ cdh-топология

У любого многообразия есть гладкое cdh-покрытие

1. Voevodsky, Bondarko
2. Gillet – Soulé, Guillen – Navarro Aznar

Другой тип cdh-покрытия происходит из раздутия (дополнения к чему-нибудь открытому)

$$X_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0$$

$\downarrow$

можно сделать комплекс мотивов Чжоу $K^b(Chow)$

При измельчении гиперпокрытий комплекс меняться не будет (с точностью до гомотоп. экв-сти)

① Manin's wonderful identity principle

когда Chow-комплекс стягиваем? $C=(C^i)$

$\Longleftrightarrow$ для M – мотива Чжоу рассмотрим комплекс $Chow(C^i, M)$ – стягиваем $\forall M$ – достаточно $\forall M(P)$ гладкого проективного

$$Chow(C^i, M) \longrightarrow Chow^d(M\times C^i)$$

ацикличен ацикличен $\|$

$$Chow^d(P\times C^i)$$

$Chow^?(C^i)$ – выразить как предел спектральной последовательности Герстена:

$$\bigoplus_{x\in X^i_{i+q}} K_i(x) \quad \text{– или} \quad \bigoplus_{x\in X^i_{i+q}} Chow^i(x)$$

получаем морфизм спектральных посл-стей, который изоморфизм на E_2

cdh-покрытия не меняют спектр. посл-сть весов

$$H^p(X'_{\pm q}) \Longrightarrow H^{p+q}(X)$$
$$H^p(X_{\pm q}) \Longrightarrow H^{p+q}(X)$$

→ сравним их E_2-члены
→ все когомологии пропускаются через мотивы Чжоу
↓
фильтрация та же

E_1-уровень весовой спектральной посл-сти восстанавливается по весовому комплексу X
E_2 – выражается через него функториально как объект гомотопической категории

$$U = X \setminus \bigcup D_i$$
↓
$w(U)$: $\ldots \to \bigsqcup D_{ij} \longrightarrow \bigsqcup D_i \longrightarrow X$

увы, не соответствует нормальным когомологиям X
– надо ~~подкручивать~~ подкручивать, а если не подкручивать – получатся когомологии с компактным носителем

Если есть замкнутое вложение $Z \hookrightarrow X$,
то $WC^c(X \setminus Z) \cong \mathrm{Cone}(WC(Z) \longrightarrow WC(X))$
из этого можно сделать эйлерову характеристику, то есть F со свойствами $F(X) = F(Z) + F(X \setminus Z)$

$K_0(\mathrm{Chow})$: образующие – классы мотивов Чжоу
соотношения: если $X = Y \oplus Z$, то $[X] = [Y] + [Z]$

$$\mathrm{Var} \longrightarrow K^b(\mathrm{Chow}) \longrightarrow K_0(\mathrm{Chow})$$

и взять в качестве хар-ки сумму классов членов комплекса с переменным знаком

Мотивное интегрирование (Kontsevich, ...)

$X_n := X[k[t]/t^{n+1}]$ $\quad A^{m+n} \quad$ X – гладкое $\rightsquigarrow$

расслоение ↓ $\qquad$ ⋮

$X(k)$ $\qquad$ A^m

K_0-класс домножается на соотв. мотив Лефшеца
если X не гладкое, оно не будет расслоением!

$$\lim_{n\to\infty}\left(\chi(X_n)\cdot \mathbb{L}^{-mn}\right)$$

есть мотивный аналог формулы замены переменной в интеграле

Мотивы Воеводского

– есть несколько описаний. Для одного из них нужно знать Высшие группы Чжоу.

Комплекс Блоха: X – гладкое многообразие

$$X\times\Delta^{-i}$$
$$\|$$
$$\{a_0+\dots+a_n=1,\ n=-i\}$$

(симплициальный комплекс)

$X\times\Delta^3$ $X\times\Delta^2$

циклы на $X\times\Delta^i$ коразмерности c – прилично пересекает все грани

т.е. пересечение имеет коразмерность c

инструмент: „выделенные подкомплексы" – это дает хорошую теорию когомологий

– потребовать, чтобы все эти циклы прилично пересекали еще что-то

– и на когомологии это не влияет

(есть еще кубический комплекс)

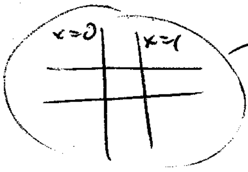
Комплекс Суслина

$SmCor$ – категория гладких соответствий

$F: SmCor^{op} \longrightarrow Ab$ – предпучок

$$\begin{array}{c} C'^{i}(F)=F(X\times\mathbb{A}^{-i}) \\ \uparrow g^i_{j,y} \\ X\times\mathbb{A}^{-i-1} \end{array}$$

пишем y на j-е место



ограничения на грани $(x=0)$, $(x=1)$ с переменными знаками

НО когомологии слишком большие!

$$C^i(F)=\bigcap_j \mathrm{Ker}(g^i_{j0}),\quad d^i=\sum(-1)^j F(g^i_{j1})$$

другой метод улучшения – альтернирование

– те элементы, на которых группа симметрий куба действует ~~[illegible]~~ антисимметрично

функтор $X \xmapsto{h^i} H^i(C^*(F(X)))$ – гомотопически инвариантен

т.е. $h^i(\mathbb{A}^1\times X\to X)$ – изоморфизм

$$g_1 := g^{-1}_{11}\ \uparrow\ \nearrow\ g^{-1}_{10} =: g_0, \qquad X \to \mathbb{A}^1\times X$$

Утверждение: $g_1^*, g_0^*: C^*(F)(\mathbb{A}^1\times X)\to C^*(F)(X)$ – гомотопны стягивающая гомотопия:

$$\begin{tikzcd} C^i(F)(\mathbb{A}^1\times X) \arrow[r, dash] & C^{i-1}(F)(X) \\ C'^i(\ldots) \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[r, dash] & C'^{i-1}(\ldots) \arrow[u, phantom, "\cap"] \end{tikzcd}$$

то же самое!

$$id_{C'^i(F(X\times\mathbb{A}^1))} - (pr_{i-1}\circ g^{i-1}_{10})^*$$

где $pr_{i-1} : \mathbb{A}^{1-i}\times X \longrightarrow \mathbb{A}^{-i}\times X$

$$X\times\mathbb{A}^2 \xrightarrow{id_X\times\mu} X\times\mathbb{A}^1$$

$$\begin{tikzcd} X\times\mathbb{A}^1 \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "id"] \arrow[rr, bend right] & X\times\mathbb{A}^2 \arrow[r, "\mu"] & X\times\mathbb{A}^1 \end{tikzcd}$$

проекция $X\times\mathbb{A}^1 \longrightarrow X\times\{0\}$

$\to$ тождественное отобр-ие на когомологиях $X\times\mathbb{A}^1$ пропускается через когомологии $X\times\{0\}$ $\to$ они изоморфны

$C^*(X\wedge Y)$ – комплекс, когомологии которого связаны с X и сдвигами Y

стартовые объекты: гладкие [illegible] проективных многообразий

$X\times\mathbb{A}^{-i}\times Y$

$Y\times\mathbb{A}^{-j}\times Z$

$$F_Y := SmCor(-, Y) = L(Y).$$