

Дифференциально градуированные категории и
связанные комплексы: * применение к мотивам

DG-категория: аддитивная,

$C(X, Y)$ — комплекс, состоящий из $C^i(X, Y)$

$$C^*(X, Y) \times C^*(Y, Z) \xrightarrow{\circ} C^*(X, Z)$$

то есть,

$$f \circ g \in C^{i+j}(X, Z)$$

$\begin{matrix} C^i & \circ & C^j \\ \uparrow & & \uparrow \end{matrix}$

и есть формула Лейбница:

$$d(f \circ g) = df \circ g + (-1)^i f \circ dg$$

$\begin{matrix} C^i & \circ & C^j \\ \uparrow & & \uparrow \end{matrix}$

$$id_X \circ id_X = id_X$$

$\downarrow$

$$d id_X \circ id_X + id_X \circ d id_X = d id_X$$

$$\rightarrow d id_X = 0$$

$$B \text{ — аддитивная} \rightarrow S(B)$$

объекты $\neq 0$;

$$S(B)(X, Y) = \begin{cases} B, & i \neq 0 \\ B(X, Y), & i = 0 \end{cases}$$

$$B^i(X, Y) = \prod_j B(X^j, Y^{j+i})$$

$$d(h^i) = (d_Y \circ h^i - (-1)^i h^i \circ d_X)$$

$$\text{Obj } B(B) = \text{Obj } C(B)$$

$\text{Ker } d^0$ — морфизм комплексов

$\text{Im } d^{-1}$ — морфизмы комплексов, гомотопные 0

$$HC = H^0(d):$$

$$\text{Obj} = \text{Obj}(C),$$

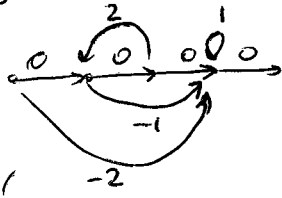
морфизмы:

$$HC(X, Y) = \frac{\text{Ker } d^0 C(X, Y)}{\text{Im } d^{-1} C(X, Y)}$$

C — DG-категория

$$\begin{array}{ccc} & & H \\ & \swarrow & \searrow \\ B & & S(B) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & B(B) \xrightarrow{HC} K(B) \end{array}$$

скрученный комплекс



степени стрелок

PT_n

объекты: $(p^i, q_{ij} \in C^{i-j+1} (p^i, p^j))$

$$q^2 + dq = 0$$

морфизмы — наборы стрелок, (степени i) сдвигающие степени на i .

$$PT_n(C)^i(X, X') = \prod C(p^j, p^{j+i})$$

$$\delta f = df + q' \circ f \pm f \circ q$$

Берем морфизм h $\ker \delta^0$

$$p''^i = p'^i \oplus p^{i+1}, \quad \begin{pmatrix} q' & h \\ 0 & q \end{pmatrix} \leadsto \text{Cone}(h)$$

↑
ограниченность?
потому что все $p^i = 0$

$$X \rightarrow X' \rightarrow X'' \rightarrow X[1]$$

$\leadsto PT_n - \mathbb{D}G$ -категория

$$T_n(C) = H(PT_n(C))$$

T_n^+ — минимальная триангулированная подкатегория в $T_n(C)$, содержащая HC .

Теорема ① $T_n(C)$ — триангулированная категория

② $PT_n(PT_n(C)) \cong PT_n(C)$, с PT_n^+ — тоже, для ограниченных — тоже (верно)

③ PT_n, T_n, PT_n^+, T_n^+ — «функторы»

$$C \rightarrow PT_n^+(C) \hookrightarrow PT_n(C)$$

$$HC \hookrightarrow T_n^+ \hookrightarrow T_n(C)$$

↓
[$\exists$ консервативный точный $t: \mathcal{D}u_{gm}^{(eff)} \rightarrow K^b(C Chow)^{(eff)}$]

⑤ $F: C \rightarrow D, \forall X, Y \in Ob(C)$

F задает изоморфизм $H^i C(X, Y) \rightarrow H^i D(F(X), F(Y))$

Тогда

а) $T_n^+(F)$ — вложение

б) $\forall T \in Ob(D) \exists U \in C: F(U) \cong T \Rightarrow T_n^+(F)$ — эв. категория

5a) „Доказ“:

индукция по „сложности“ объектов

$$\mathrm{Tr}^+(A, B) \xrightarrow{\mathrm{Tr}(F)} \mathrm{Tr}^+(\cancel{A}, \cancel{B}) \mathrm{Tr}_F^+(A), \mathrm{Tr}_F^+(B)$$

увелич

$\Leftrightarrow$ $\forall A, B$

нужно проверить, что это изоморфизм $\forall A, B$

базисно для $A = X \quad B = Y[i]$

$$B' \rightarrow B \rightarrow B''$$

$$\mathrm{Tr}_C^+(A, B'[i]) \xrightarrow{a} \mathrm{Tr}_C^+(A, B') \rightarrow \mathrm{Tr}_C^+(A, B) \rightarrow \mathrm{Tr}_C^+(A, B'') \xrightarrow{b} \mathrm{Tr}_C^+(A, B'[i])$$

$\downarrow \mathbb{Z}$

$\downarrow \mathbb{Z}$

$\downarrow$

$\downarrow \mathbb{Z}$

$\downarrow \mathbb{Z}$

$$\xrightarrow{a'} \mathrm{Tr}_D^+(\mathrm{Tr}^+ F(A), \dots) \rightarrow \dots \rightarrow \dots \xrightarrow{b'} \dots$$

$$\mathrm{Coker} a \cong \mathrm{Coker} a'$$

$$\ker b \cong \ker b'$$

$\rightarrow$ увеличим сложность B .

$$\textcircled{6} \quad \mathrm{Tr}_F^+(HC) \geq \mathrm{Tr}^+(HD)$$

$$\begin{matrix} \textcircled{H} \\ \textcircled{D} \end{matrix}$$

$$C \rightsquigarrow C^-$$

$$C^-(X, Y) = \dots \rightarrow C^-(X, Y) \rightarrow \ker(C^0(X, Y)) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow C^- \text{ — DG-комплекс; } i: C^- \rightarrow C$$

$$\textcircled{2} \quad C \text{ — негати́вная, если } C^- = C; \text{ тогда } \mathrm{Tr}^+ C = C$$

$$C \text{ — коомологически негати́вная, если } H^i C(X, Y) = 0 \quad \forall i > 0$$

$$C \text{ — коомолог. негати́вна } \Rightarrow \mathrm{Tr}^+(i) \text{ — эв-ств. комплекс}$$

$$\textcircled{3} \quad C \text{ — негати́вная } \rightsquigarrow C_N: \text{ объекты те же,}$$

$$C_N(X, Y) =$$

$$C^N(X, Y) \rightarrow C^{N+1}(X, Y) \rightarrow \dots \rightarrow C^0 \rightarrow C^0$$

Tr^+

$\rightarrow$ получаем функтор

$$\mathrm{Tr}^+(C) \xrightarrow{t_N} \mathrm{Tr}^+(C_N)$$

Все t_N консервативны

$$\begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} t_N \\ t_{NM} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \mathrm{Tr}^+(C) \\ \mathrm{Tr}^+(C_M) \end{matrix}$$

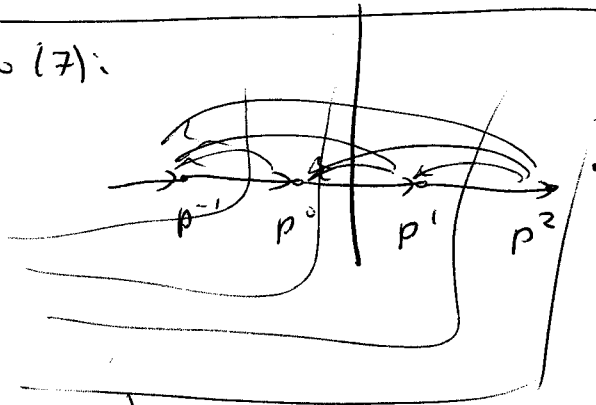
(7) $H: Tr^+ \longrightarrow$

— когомологический функтор

Берем X или более — сиртинский комплекс $(P^{\bullet}, \dots)$

$\rightarrow \exists WSS: E_1^{pq} = H^q(P^p) = H(P^p[-q]) \Rightarrow H^{p+q}(X)$
 дифференциал $E_1^{pq} \rightarrow E_1^{p-1,q}$ равен $H^q(\partial_{p-1,p})$

Доказ (7):



База Постникова

$W_{\leq 1000} X$

$X \rightarrow W_{\leq 3} X \rightarrow W_{\leq 2} X \rightarrow W_{\leq 1} X \rightarrow \dots$
 $\swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow$
 $P^3[-2] \quad P^2[-1]$

$\rightarrow W_{\leq 1000} X = 0$

упражнения
в Гельф. Манн

получаем (7)

Доказ (6):

проблема только в консервативности.

Дост. доказать, что если γ негативна, то γ — консервативна
 (взяв $\gamma = C_N$)

$M_{\text{on}}(t_0(X), t_0(X)) \rightarrow 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} M_{\text{on}}(X, X) = 0$

Берем функтор $H = Tr^+ \gamma(-, X)$ — представляющий объект X
 По (7) спектральную пос-сть — это когомолог. функтор

Смотрим на E_2^{pq} :

$P^i \in \text{ob}(H\gamma) \hookrightarrow \text{ob}(Tr^+ \gamma)$

комплекс из (7) стягиваем, а E_2^{pq} через него выражается
 (вектор)

$\rightarrow$ получить 0.

(8) $Tr^{++}(\gamma)$

— псевдоабелева

(Идемпотента есть расщепление)

Замечание относительно (счетных) прямых сумм.
 (ограниченных)

Док-во (8)

определить

гомотопические копределы
в трандуцированных категориях

$\varinjlim$

или это сделать? Легко, если это гомотопич. категория от чего-то
 $X^i \rightarrow X^{i+1}$

$$\bigoplus X^i \xrightarrow{\varphi} \bigoplus X^j \longrightarrow \text{Cone } \varphi$$

$$\bigoplus \text{id}_{X^i} \oplus (-\varphi)$$

— определить с точностью до изоморфизма
 E , если $\bigoplus X^i \xrightarrow{\varphi} E$ (не канонично)

Mapping telescope

свойства:

$$\bullet \varinjlim_{\text{id}_X} X = X$$

$$\bullet \varinjlim_0 X_i = 0$$

в трандуцированной категории

$$\bullet \forall y \in \text{Ob } \underline{C}$$

$$\underline{C}(\varinjlim X^i, y) \xrightarrow{\sim} \varinjlim (X^i, y)$$

• если y (счетно-)компактен, то

$\underline{C}(y, -)$ коммутирует со
счетными прямыми суммами

$$\underline{C}(y, \varinjlim X^i) = \varinjlim \underline{C}(y, X^i)$$

• слабая функториальность и аддитивность

морфизм между $\varinjlim$ есть, но неоднозначен

псевдоабелевость — $\forall$ изоморфизм, где есть предел

$$X \xrightarrow{e} X$$

e — идемпотент $\sim \text{id}_X - e$ — тоже идемпотент

4 предела

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{e} & X & \xrightarrow{e} & X & \xrightarrow{e} & X \rightarrow \dots \\ X & \xrightarrow{\text{id}_X - e} & X & \xrightarrow{\text{id}_X - e} & X & \xrightarrow{\text{id}_X - e} & X \rightarrow \dots \end{array}$$

сумма этих пределов равна X (лемма Чондея / Действительно)

$$\begin{array}{ccc} X \oplus X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1-e \end{pmatrix}} & X \oplus X \\ \downarrow & \sim & \downarrow \\ X \oplus X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1-e \\ 1-e & e \end{pmatrix}} & X \oplus X \end{array}$$

— а предел этого равен X

Отличные конструкции Бондарно от Хананури:

↑
комплекс
Сусинна

↑
комплекс
Блоха

↑
есть
вопросная
двойственность!

Нач. категория $\xrightarrow{\text{Comp. rat}} \text{Tr}(\tilde{Y})$ можно взять $\tilde{Y}$ так, что образ
содержит все объекты $\mathcal{C}$ до карубизации
 $\text{Tr}(Y) = \text{Tr}^+(Y) \xrightarrow{\text{eff}} \mathcal{DM}_{gm}^{\text{eff}} \xleftarrow{\mathcal{K}^b(\text{Sm Con})}$

$\text{Tr}^+(Y) \xrightarrow{\text{eff}} \mathcal{DM}_{gm}^{\text{eff}} \xleftarrow{\mathcal{K}^b(\text{Chow}^{\text{eff}})}$
контравариантно
 $\text{Tr}^+(Y) \xrightarrow{\quad} \text{Mot}_{\text{хананури}}$

На Sm Con есть группа $L(X)$, представляющая объект X

↓
 $C(L(X))$ — комплекс Сусинна

это комплекс
пучков Нисневича
с трансферами

пучки
помогли. чл. коммутативности

$\text{Tr}^+(Y) \xrightarrow{\text{eff}} \mathcal{DM}_{gm}^{\text{eff}} \xleftarrow{\quad} \mathcal{DM}_{gm}^{\text{eff}}$

в этих образах
живут комплекс Сусинна
и других многообразий

⇓
после карубизации
получается одно и то же