

Можно ли в качестве Tr^+ взять $\langle [P] \rangle$?

простые объекты

PTr^+ — замыкаем их с помощью конусов

$\mathcal{Y} : Obj = \{ [P] \}, P \in Sp V/k$
дифференциально градуированная категория

$$y_i^*([P], [Q]) = c^*(\underbrace{L(Q)}_{\text{"}})(P)$$

$$Sm \text{ Con}(-, Q)$$

$$y^i(Q, R) \otimes y^j(P, Q) \longrightarrow y^{-i-j}(P, R)$$

$$\begin{pmatrix} P \times A^j & \longrightarrow & BQ \\ Q \times A^i & \longrightarrow & R \end{pmatrix}$$

умножим первое на $id(A^i)$ и возьмем композицию

Рассмотрим $Tr \mathcal{Y} = Tr^+ \mathcal{Y}$

Тогда $Kar(Tr, \mathcal{Y}) \cong D_{gm}^{eff}$
 "геометрические" мотивы (Бондарни) — DG -категория
 эквивалентность категорий
 "все" мотивы (Ваводин)

Если $\mathcal{C} \subset Tr^+(\mathcal{Y})$, то $\mathcal{C} = Tr^+(\text{что-то})$

$$Tr^+(PTr^+(\mathcal{Y})) \cong Tr^+(\mathcal{Y})$$

взято $\leftarrow U$
 $Tr^+(\text{подкатегория,}$
 принадлежащей $\mathcal{C}$)

в этом случае говорят, что это — дифференциально градуированное усиление

Локализация усиленной категории тоже усилено

пусть $\forall X, Y \quad \mathcal{Y}(X, Y)$ не имеет кручения

(более общий случай: $\mathcal{Y} - R$ -категория $\rightarrow$ триангуляр, чтобы $\mathcal{Y}(X, Y)$ был плоским R -модулем)
 (сюр-м R -модуль на Hom)

и $\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{Y}$ — полная подкатегория

Нас интересует локализация $Tr^+(\mathcal{Y}) / Tr^+(\mathcal{Y}')$

Возьмем категорию с теми же объектами

$$\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{Y}'}^i(X, Y) = \left\{ \sum y_{xx'}^{i_1} \circ \varepsilon_{x'} \circ y_{x'_1 x'_2}^{i_2} \circ \varepsilon_{x'_2} \circ \dots \circ \varepsilon_{x'_n} \circ y_{x'_n Y}^{i_{n+1}} \right\}$$

$x'_s \in Obj(\mathcal{Y}'), \sum i_s = i + n$

$$\forall \varepsilon_{x'_e} \in \mathcal{Y}/\mathcal{Y}'^{-1}(x'_e, x'_e) \quad \alpha \varepsilon_{x'_e} = id_{x'_e}$$

возможна в обратном порядке!

$$\rightarrow \in H^y/y, id_{x'_i} = 0$$

Теперь положим $Tr^t(y) / Tr^t(y') := Tr(y/y')$

$$K^b(Sm(Or)) \xrightarrow{\text{лок. + кар.}} DM_{gm}^{eff}$$

карпубизация не порчит
гипотезу

$$\downarrow \text{дифференциализация} \\ \text{(+ карпубизация?)}$$

$$DM_{gm}^o \quad \swarrow \text{Kahly Sujatha}$$

$$ZSX - \text{корреляция всегда иде } U \hookrightarrow X \text{ — открытое погружение в } X.$$

$$M(X, Z) \rightarrow M(X) \rightarrow M(Z)(C)[2C]$$

Бирационально-эквив.
= Локализация по

$$DM_{gm}^{eff}(1)[2]$$

$$Chow^{eff}(1)[2] \subset Chow^{eff}$$

Майер-Вьетори

$$U \cup V \rightrightarrows U \sqcup V \longrightarrow U \cup V \text{ — конус от}$$

$$U \cup V \rightarrow U \text{ и } V \rightarrow U \cup V \text{ — это бирациональн-сти}$$

→ достаточно убедиться в мультипликативности бирациональн-сти и бирациональн-сти
— а Майер-Вьетори убеждает по дороге

Чтение Воеводского в слух

Элементарный квадрат Нисневича:

EDSN

$$W = U \times V \rightarrow V$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$U \hookrightarrow X$$

$$V \rightarrow X \text{ — этапы,}$$

$$X \setminus U \cong V \setminus W$$

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X \end{array}$$

— обделенный

$$X \setminus U \cong V \setminus T$$

Замкнутое вложение

cdh-квадрат

Пучок Нисневича - ~~если~~ если

$$0 \longrightarrow S(X) \longrightarrow S(U) + S(V) \longrightarrow S(W)$$

cdh-пучок: покрытие в cdh-топологии - это
покрытие по Нисневичу + $Z \sqcup V \longrightarrow X$

(из cdh-квадрата)

- аксиомы топологии Гротендика заставляют нас выходить
за пределы категории гладких многообразий (для cdh-топологии)

$U \longrightarrow X$ - конечный эталонный

$\downarrow$ S - пучок с трансферами

$$S(X) \longrightarrow S(U)$$

$$S(U) \longrightarrow S(X)$$

Примеры:

$$K^+ \xrightarrow{\text{Tr}} L^+$$

$$K^* \xrightarrow{N} L^*$$

$(-)^+, (-)^*$ - пучки с трансферами

композиция равна $\text{id}_X \circ d$
(для гладких соответствий)

В категории $\text{SmCor}[d^{-1}]$ X - ретрант U

→ если много чего обратных, то все будет порождаться
наблюдениями противными

- вроде бы достаточно обратных $\checkmark$

Итак, получаем категорию $\text{SmVar}_{\text{Nis}}$ - слой основного поля

Var_{cdh}

Локальные кольца в топологии Нисневича = локальные нисневичи
кольца

в этальной топологии = локальные строго нисневичи
кольца

Лемма $\mathcal{O}_L(X)$ - пучок в Et, Nis

$\text{SmCor}(-, X)$

(2a) $U \longrightarrow X$ - Nis -покрытие $\leadsto U_\bullet \longrightarrow X$ - комплекс чехов
 $\leadsto L(U_\bullet \longrightarrow X)$ - аддитивный комплекс пучков Нисневича
(формулировка Виевдсена)

2в) $\forall$ EDSN-ив. $\mathcal{L}(\dots)$ ациклический
(формулировка Бондарно)

3) Если P - предпуток с трансферами ($P \in \text{PreShwT}$),
то ассоциированный путок Нисневича $\hat{P}_{Nis}$ тоже обладает трансферами

4) Если $P(X) \xrightarrow{\sim} P(X \times A^1)$ - изоморфизм,
 $P(X \times A^1 \xrightarrow{p^1} X)$.

P называется гомотопически инвариантным
 PNI - гомотоп. инв. предпуток Нисневича с трансферами
Если $P \in PNI$, то $P_{Nis} \in PNI$

5) $S \in NI \Leftrightarrow \begin{cases} S \in PNI \\ S\text{-путок в Zar} \end{cases}$

6а) K - ациклический комплекс пучков Нисневича

$\Downarrow$
 $C(K)$ - ациклический в (Sh_{Nis}, wT)
- комплекс Суссина

$$Sh_{Nis} \text{Var}_{Nis} \xleftarrow{i} \text{Var}_{Zar}$$

6б) K - комплекс пучков Нисневича.

Если i^*K ациклический, то $C(K)$ ациклический

Факт-во: Докажем, что $L(X)$ - Nis -путок;
- считаем, что X связен

$$SmCon(X, y) \xrightarrow{\sim} SmCon(U, y) \oplus SmCon(V, y) \rightarrow SmCon(W, y)$$

для этого покрытия
инъективность совп. стрелки
очевидна

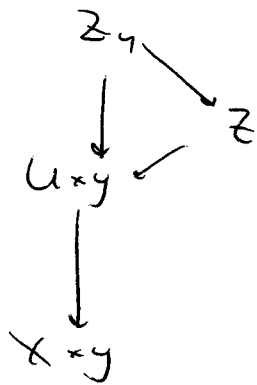
- остаток факта довр. др. в
см. Mazza - Voevodsky - Weibel

$$\bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$$

Рассмотрим $SmCon_{\mathbb{Z}}(-, y)$

$\cap$
 $X \times y$ - связен
над X и
конечен

$$Z_u \in \text{Sm}(\text{Cor}_Z(u, y))$$



$$B \text{ адм}, u \hookrightarrow X, w \hookrightarrow v \text{ — открыто}$$

$$\rightarrow \text{Sm}(\text{Cor}(X, y)) \cong \text{Sm}(\text{Cor}(u, y))$$

$$\dots (w, y) \dots (v, y)$$

2a) Подставим "малую" реализацию схемы S :
(т.е. реализацию малую в точке)

$L(u;)(S)$ — акцилично?

представит S как предел $\mathbb{A}^1_S$ -замкнутое конечное над S

Рассмотрим $Z \subset \mathbb{A}^1_S$ — замкнутое конечное над S

Z_{u_i} — над u_i Z — реализация схемы
те подсистемы, которые входят над Z

$$L(X)(S) = \varinjlim_Z L_Z(X)$$

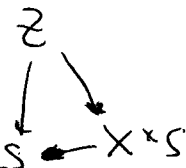
почему $L_Z(X)$ акцилично?

Одна из компонент $U_Z \rightarrow Z$ расщепляет его:
Заметим, что из $U \rightarrow X$ (поэтому Z -реализация)

→ расщепление дает стягиваемую реализацию

(см. Voevodsky, Triangulated categories of motives over a field)

— Z работает, если Nis заменить на Et



Теорема $\mathcal{DM}_{\text{eff}}^- = \{K \in \mathcal{D}^-(Sh_{Nis} \text{Sm}(\text{Cor})) : H^i(K) \in HI \forall i \in \mathbb{Z}\}$

I ① $\mathcal{DM}_{\text{eff}}^- \xrightarrow[\text{RC}]{i} \mathcal{D}^-(Sh_{Nis} \text{Sm}(\text{Cor}))$ — вложение псевдо-абелевых триангулированных категорий

② $\forall$ малую X $K \in \mathcal{DM}_{\text{eff}}^-$ $\mathcal{DM}^-(\mathcal{M}(X), K) = H^0(X_{Nis}, K)$

③ $\mathcal{DM}_{\text{eff}}^-, \mathcal{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}$ — тензорные трианг. категории

④ $\text{RC} \circ L$ задает полное тензорное вложение $\mathcal{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}} \hookrightarrow \mathcal{DM}_{\text{eff}}^{\text{eff}}$

II ① C задает функтор $T_n(y) \rightarrow \mathcal{DM}_{\text{eff}}^{\text{eff}}$, кардиналы обр. $\rightarrow \dots$

② $\exists$ консервативный $t: \mathcal{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}} \rightarrow \mathcal{K}^b(\text{Chow}_{\text{eff}})$

$$L(X) \otimes L(Y) = L(X \times Y)$$

на $\mathcal{DM}_{\text{eff}}^-$ — за счет того, что она триангл. $\mathcal{D}^-$

5