$$\boxed{18.12.2012}$$

М. Бондарко

$$\begin{tikzcd}
Tr(Y) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & & Var \arrow[dd, "M"'] \arrow[dd, bend left, "M^c"] & \\
Mot_{Bond} \arrow[d] \arrow[drr, dashed] \arrow[dd, "t"] & & & DM^{eff}_{gm} \arrow[dl] \\
Mot^{(op)}_{Han} & & DM^{eff}_- \arrow[dll, dashed] & \\
& K^b(Chow^{eff}) & &
\end{tikzcd}$$

весовые комплексы (WC) GS – GNA

$$Tr(Y) \longrightarrow DM^{eff}_-$$

$$[P] \longmapsto \underline{C}(P)$$

$$\begin{tikzcd}
Tr(Y) \arrow[r] \arrow[drr, dashed] & K^-(ShSmCor) \arrow[r] & D^-(ShSmCor) \\
& & DM^-_{eff} \arrow[u, phantom, "\subset" rotate=90]
\end{tikzcd}$$

$$\text{“}Y\text{”}^*(Y,Z) \times \text{“}Y\text{”}^*(X,Y) \longrightarrow \text{“}Y\text{”}^*(X,Z)$$

$Y^{-n}(X,Y)$ = гладкие соответствия $X \times \mathbb{A}^n \longrightarrow Y$, которые обнуляются при ограничении на координатные гиперплоскости

Y, Z можно взять гладкими проективными, и убрать кавычки

– вложение триангулированных категорий: достаточно проверить, что этот функтор задает квазиизоморфизм на когомологиях:

$$H^i Y(Y,Z) \overset{?}{\cong} DM^-_{eff}(C(Y), C(Z)[i])$$
$$\cong$$
$$D^-(ShSmCor)(L(Y), C(Z)[i])$$
$$\cong$$
$$H^i(Y_{Nis}, C(Z))$$
$$\|$$
$$h_i C(Z)(Y)$$

гладкие проект → гиперкогомологии равны когомологиям → то, что нужно

$\mathcal{U} = X \setminus \cup D_i$

$$M^c(\mathcal{U}) = C(\cdots \rightrightarrows \overset{D^2}{L(\sqcup D_i \cap D_j)} \rightrightarrows \overset{D^1}{L(\sqcup D_i)} \to L(X))$$

$$\begin{tikzcd}
L(D^1) \arrow[r] \arrow[d] & L(X) \arrow[r] & L^c(\mathcal{U}) \\
L^c(\cup D_i) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

— это становится выделенным треугольником при переходе к мотивам,

а $L(D^2) \rightrightarrows L(D^1) \to L^c(\cup D_i)$

— точная последовательность предпучков

видно, что она приходит из $T_r(Y)$

$$M(X) \to M(D^1)(1)[2] \to M(D^2)(2)[4] \to \cdots$$

Весовые структуры

— это почти как -структуры, только совершенно другое

$\underline{C}$: пытаемся аксиоматизировать свойства канонической фильтрации комплексов

$D^?(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{c}
\cdots \to C^{-2} \to C^{-1} \to \ker d_0 \to 0 \to 0 \to \cdots \quad \in \underline{C}^{t\le 0} \\
\downarrow \\
C \\
\downarrow \\
\cdots \to 0 \to \operatorname{Im} d_0 \to C^1 \to C^2 \to \cdots \quad \in \underline{C}^{t\ge 1}
\end{array}$$

В $\underline{C}$ есть подкатегории $\underline{C}^{t\le 0}$, $\underline{C}^{t\ge 0}$. При этом

$$\underline{C}^{t\le 0}[1] \subset \underline{C}^{t\le 0}, \quad \underline{C}^{t\ge 0} \subset \underline{C}^{t\ge 0}[1]$$

$\underline{C}^{t \lessgtr i} = \underline{C}^{t \lessgtr 0}[-i]$ (см. Гельфанд – Манин)

$\underline{C}^{t\le 0} \perp \underline{C}^{t\ge 1}$ — нет морфизмов из отрицательных влево.

$\underline{Ht}$: $\mathcal{O}b := \underline{C}^{t=0} := \underline{C}^{t\le 0} \cap \underline{C}^{t\ge 0}$

$\underline{Ht} \subset \underline{C}$ „сердце"

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

$$\Updownarrow$$

$A \to B \to C \to A[1]$ — выделенный треугольник

$$C^{-2} \to C^{-1} \to C^{0} \to C^{1} \to C^{2} \to C^{3}$$

фильтрация подкомплексами

В смешанных мотивах была возрастающая фильтрация весов! Сейчас знак меняется: в новых статьях $[i]$ вместо $[-i]$

$$\underline{C}_{w\ge 1} \to \underline{C} \to \underline{C}^{w\le 0}$$

Аксиомы:

$\boxed{\mathrm{I}}$ $\underline{C}^{w\le 0}, \underline{C}^{w\ge 0} \subset \mathcal{O}b(\underline{C})$ — каруби-замкнутые в $\underline{C}$

$\underline{C}^{w \lessgtr i} = \underline{C}^{w \lessgtr 0}[-i]$ — отн-но сдвигов

$\boxed{\mathrm{II}}$ — так же

$\underline{C} \supset \underline{Ht}$: $\mathcal{O}b = \underline{C}^{t=0} := \underline{C}^{t\le 0} \cap \underline{C}^{t\ge 0}$

Что с ортогональностью?

аналогия:

— комплексы Суслина

из t в — стрелок нет

$\boxed{\mathrm{III}}$ $\underline{C}^{w\ge 1} \perp \underline{C}^{w\le 0}$

$\boxed{\mathrm{IV}}$ $X_{w\ge 1} \to X \to X_{w\le 0}$ — Весовое разложение — существует $\forall X$ (треугольник)

$$\to X^{-2} \to X^{-1} \to X^{0} \to X^{1} \to X^{2} \to \ldots$$

$$0 \to X^1, \quad X^0 \to 0$$

$$\underline{C}^b = \left(\bigcup_i \underline{C}^{w\geq i}\right) \cap \left(\bigcup_i \underline{C}^{w\leq i}\right)$$ — ограниченные

Невырожденность: $\bigcap \underline{C}^{w\leq i} = \bigcap \underline{C}^{w\geq i} = \{0\}$

$\boxed{\text{Утв.}}$ $\boxed{\text{I}}$ Самодвойственность; устойчивость отн-но сдвигов

$\boxed{\text{II}}$ $\underline{C}^{w\geq 1} = {}^{\perp}\underline{C}^{w\leq 0}$ $\quad \underline{C}^{w\leq 0} = \underline{C}^{w\geq 1\perp}$

$\boxed{\text{III}}$ $\underline{C}^{w \leq i, \geq i}$ аддитивны, замкнуты относительно расширений

$\boxed{\text{IV}}$ w задает ограниченную весовую структуру на $\underline{C}^b$

$\boxed{\text{V}}$ $A \longrightarrow B \longrightarrow C \implies B \cong A \oplus C$

$A, B, C \in \underline{C}^{w=0}$

$\boxed{\text{VII}}$ $\langle Hw \rangle \simeq \underline{C}^b$

адд. категория, негативная.

$\boxed{\text{VI}}$ $X \in \underline{C}^{w\geq 0} \implies X_{w\leq 0} \in \underline{C}^{w=0}$

Если сдвинуть весовую структуру на i, получится тоже весовая структура

При переходе $\underline{C} \longmapsto \underline{C}^{op}$ и замены полож. часть на отрицательную (и наоборот) весовая стр-ра остается весовой

$$\begin{tikzcd} & X_{w\geq 1} \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[dr, bend left] & X_{w\leq 0} \arrow[r] & X_{w\geq 1}[1] \\ X_{w\leq 0}[-1] \arrow[ur] & & & \text{здесь } 0 & \end{tikzcd}$$

$X \perp \underline{C}^{w\leq 0}$ $\rightsquigarrow$ здесь 0 $\rightsquigarrow$ она расщепляется

$$\left.\begin{array}{l} \underline{C}^{v\leq 0} \subset \underline{C}^{w\leq 0} \\ \underline{C}^{v\geq 0} \subset \underline{C}^{w\geq 0} \end{array}\right) \implies v = w$$

Функториальность весовых разложений

$\boxed{\text{Утв.}}$ ① Любой морфизм объектов продолжается до морфизма весовых разложений

②
$$\begin{tikzcd}
X_{w\geq i+1} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_{w\leq i} \arrow[d, dotted] \\
Y_{w\geq j+1} \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y_{w\leq j}
\end{tikzcd}$$

Если $j=i$, то по (1) можно продлить

$j>i$ — вряд ли

$j<i \rightsquigarrow$ по f однозначно восстанавливаются боковые стрелки

③
$$\begin{tikzcd}
X_{w\geq 2} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & X_{w\leq 1} \arrow[d] \\
Y_{w\geq 1} \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Y_{w\leq 0} \arrow[d] \\
Z_{w\geq 1} \arrow[r] & Z \arrow[r] & Z_{w\leq 0}
\end{tikzcd}$$

треугольник

треугольники

$$\begin{tikzcd}
X_{w\geq i+1} \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "0"] & X_{w\leq i} \arrow[d, dashed] \\
 & Y \arrow[r] & Y_{w\leq j}
\end{tikzcd}$$
$j\leq i$

она пропускается через $X_{w\leq i}$

тогда есть и стрелка слева по аксиомам

Почему при $j<i$ она единственна?

если $f=0$ $\quad X \to X_{w\leq i} \to X_{w\geq i+1}[1]$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr] & X_{w\leq i} \arrow[r] \arrow[d] & X_{w\geq i+1}[1] \arrow[dl, "0"] \\
 & Y_{w\leq j} &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Mor}(X_{w\leq i}, Y_{w\leq j}) \subset \mathrm{Mor}(X, Y_{w\leq j})$

$$\begin{tikzcd}
X_{w\geq 2} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & X_{w\leq 1} \arrow[d] \\
Y_{w\geq 1} \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Y_{w\leq 0} \arrow[d] \\
Z_{w\geq 1} \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] & Z_{w\leq 0} \arrow[d] \\
X_{w\geq 2}[1] & & X_{w\leq 1}[1]
\end{tikzcd}$$

достраивается:

≥ 1 $\quad$ ≤ 0 → это весовое разложение

$$\begin{tikzcd}
X_{w\geq 1} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X \arrow[r] \arrow[d] & X_{w\leq 0} \arrow[d, dashed] \\
Y_{w\geq 1} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & Y \arrow[r, dashed] \arrow[d] & Y_{w\geq 0} \arrow[d, dashed] \\
Z_{w\geq 1} \arrow[r] & Z \arrow[r] & Z_{w\leq 0}
\end{tikzcd}$$

можно достроить:

это то же самое (после поворота)

$Z_{w\geq 1}[-1] = (Z[1])_{w\geq 2}$

→ весовое разложение X и Z дает весовое разложение Y

Отсюда видно, что достаточно требовать разложения в каких-то подкатегориях

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть $N \subset \underline{C}$ – <u>негативная</u> аддитивная подкатегория, то есть, $N \perp N[i]$ $\forall i \geq 0$

Тогда $\exists !$ весовая структура на $\langle N \rangle$ т.ч. $N \subset \underline{Hw}$

ограниченная

(можно считать, что $\langle N \rangle = \underline{C}$)

При этом

$$\underline{C}^{w\leq 0}_{(w\geq 0)} = \mathrm{Kar\,Ext\text{-}cl}\Big(\bigcup_{i\geq 0} N[i]\Big)$$

замыкание относительно расширений

$(i \leq 0)$

$\underline{Hw} = \mathrm{Kar}_{\underline{C}}(N)$

Док-во: все просто, кроме аксиомы IV, которое доказывается ~~и~~ индукцией (по сложности) с помощью 3×3-диаграммы выше.