М.В. Бондарко

$\forall M \in \langle \mathcal{M}(V) \rangle$ можно представить скрученным комплексом

т.е. $\exists$ DG-категория $\mathcal{Y}$ (негативная)

кот. полностью описывается комплексами Суслина

$Ob_{\mathcal{Y}} = SmPrVar \qquad \mathcal{Y}^i(X,Y)=0 \quad i>0$

Можно забыть высшие стрелки и получить

① $t: DM_{gm}^{eff} \longrightarrow K^b(Chow)$ — консервативный функтор

② можно „рубить" $\rightsquigarrow$ башня Постникова

③ $\rightsquigarrow$ „весовая спектральная последовательность + весовая фильтрация

④ $K^0(Chow) \cong K^0(DM^{gm})$

Заодно: $\langle Chow \rangle = DM^{gm}$

$\underline{C}^{w\le 0} \qquad \underline{C}^{w>0}$

$\cap\!\!| \qquad \cap\!\!|$

$Obj\, \underline{C}$, Каруби-замкнутые, ортогональные

$\underline{Hw} = \underline{C}^{w\le 0} \cap \underline{C}^{w>0} \qquad \underline{Hw} \perp \underline{Hw}[i] \quad i>0$

H — негативная (add.) подкатегория $\underline{C}$

$\Rightarrow \exists!$ весовая структура на $\langle H \rangle$ $\qquad \underline{Hw} = Kar_{\underline{C}}(H)$

~~т.ч. $H \subset \underline{Hw}$~~

Примеры: ① $Chow^{(eff)} \subset DM_{gm}^{(eff)}$

② $\qquad DM_{gm}^{(eff)} \subset DM_{-}^{(eff)} \subset D^{-}_{SmCor}$

Хочется ввести весовую структуру такую, что

? $\quad X \in \underline{Hw} \iff \forall S \in HI \quad X \perp S[i] \quad i \ne 0$

гомотоп. инвар. пучки с трансферами Никевича

Имеет смысл брать $X = \mathcal{M}(Spec\, k)$ или $Spec\, R$

или с подкруткой: $(s)[s]$ $\qquad$ гладкие полулокальные

Выводим:

Если S — предпучок с трансферами, R — полулокально, K — его поле частных

$\Rightarrow S(Spec\, R) \hookrightarrow S(Spec\, k)$

$\mathcal{M}$-мотив $Spec(R)$ — прямое слагаемое мотива $Spec(k)$

(3) $DM^{eff}_{gm} \supset DM^{eff}_{gm}(1)$; локализация — бирациональные мотивы
(стали изоморфными мотивы бирац. гладких многообразий)

Можно д-ть, что есть весовая структура, порожденная мотивами всех гладких многообразий (а не только проективных)

$$DM^{o} = DM^{eff}_{gm} / DM^{eff}_{gm}(1)$$

$$\underline{Hw} = Kar(M^{o}(SmVar))$$

и она согласована с весовыми стр-рами на $Chow^{eff}$
и на той, которая с подкруткой $(s)[s]$

$$DM^{eff}_{gm} \supset DM^{eff}_{gm}(1) \supset DM^{eff}_{gm}(2) \supset DM^{eff}_{gm}(3) \supset \dots$$

фильтрация „ломтиков" (slice)

(4) Относительные мотивы

$DM(S)$. Есть некоторый аналог мотивов Воеводского

база

собственный проективный

$P \xrightarrow{p} S$ $\qquad p_* 1_P$ ⟶ мотивы Чжоу

регулярное
(не обяз гладкое)

$P_1 \times_S P_2$ может быть уже совсем плохим

$DM^{gm} \longrightarrow DH$

триангулир. категория комплексов Ходжа

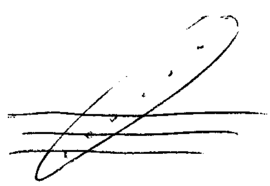
- хотелось, чтобы полный образ гладкого проективного имел вес 0.
- но здесь проблемы с негативностью ⇝ нужно делать так:

$DM^{gm} \longrightarrow \widetilde{D_pH_i} \longrightarrow DH$

с условием: каждый чистый фактор поляризуем

Относительный аналог: модули Ходжа (Сайто)

$DHM(X)$



ядро весовой стр-ры порождено $M_i[-i]$
ядро T-структуры — M_i

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl] & & \\ w_{\le i} X \arrow[rr] \arrow[ur, "{[1]}"] & & w_{\le i-1} X \arrow[ul] \arrow[r] & w_{\le i-2} X \\ & X \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur] \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

достроим до октаэдра

$$\overset{\le i-1}{w_{\le i-1} X} \longrightarrow \overset{\le i-1}{?[1]} \longrightarrow \overset{\le i-1}{w_{\le i} X[1]}$$

$$w_{\ge i+1} X \longrightarrow \overset{\ge i}{w_{\ge i} X} \longrightarrow \overset{\ge i}{?} \longrightarrow \overset{\ge i}{w_{\ge i+1}[1]}$$

$\rightsquigarrow ? \in \underline{C}^{w=i}$

$\rightsquigarrow$ весовой комплекс X

① Все ограниченные объекты порождаются ядром:

$\langle Hw \rangle = \underline{C}^b$

② $\exists$ весовая спектральная последовательность

$H : \underline{C} \longrightarrow \underline{A}$ — ковариантный функтор

$$\underset{\substack{\cap \\ H(X)}}{w_i H(X)} = \mathrm{Im}\,(H(w_{\ge i} X) \longrightarrow H(X))$$

это функториально и корректно определено, т.е.

$$\begin{tikzcd} H(w_{\le i} X) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & H(X) \arrow[d, "g"] \\ H(w_{\le i} Y) \arrow[r] & H(Y) \end{tikzcd}$$

<u>Выводы:</u> ① считать морфизмы между $M(X)(i)[j]$

② $M(X) \in DM_{w\,chow}$ ≥ 0, если X гладкий

≤ 0, если X проективный

$\mathcal{T}_{\le i} H : \quad X \mapsto \mathrm{Im}(H(X_{w \ge i}) \to H(X_{w \ge i-1}))$

$$\begin{tikzcd} w_{\ge i} X \arrow[r] \arrow[d, dashed] \arrow[dr] & w_{\ge i+1} X \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X \arrow[d] \\ w_{\ge i} Y \arrow[r] & w_{\ge i+1} Y \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

H — гомологический функтор $\Rightarrow \mathcal{T}_{\le i} H$ — гомологический

$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ — выд. треугольник

$$H\left(\begin{tikzcd} w_{\ge i}X \arrow[r] \arrow[d] & w_{\ge i-1}X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ w_{\ge i}Y \arrow[r] \arrow[d] & w_{\ge i-1}Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ w_{\ge i}Z \arrow[r] & w_{\ge i-1}Z \arrow[r] & Z \end{tikzcd}\right)$$

$$H(w_{=i}(X)) \oplus H(w_{=i}Z) \cong H(w_{=i}Y)$$

$$\begin{tikzcd} & H(w_{=i}Y) \arrow[d] & \\ & H(w_{=i}Z) \arrow[dl] & \\ H(w_{\ge i}Z) \arrow[rr] & & H(w_{\ge i-1}Z) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$\subset D_2$

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r] & D_1 \arrow[r] & E_1 \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} D_2 \arrow[r] & D_2 \arrow[r] & E_2 \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

$\leadsto$ башня Постникова

$$\begin{tikzcd} \tau_{\ge i}H: \operatorname{Im}\left(H(X_{w\ge i}) \to H(X_{w\ge i-1})\right) \arrow[d] \\ H(X) \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "0"] \\ T_{\le i-1}(X) = \operatorname{Im}\left(H(W_{\le i}X) \to H(W_{\le i}X)\right) \end{tikzcd}$$

виртуальное t-разложение $H: \underline{C} \longrightarrow \underline{A}$

получаем длинную точную последовательность функторов

соседствующая структура:

$$\underline{C}_{w\le 0} = \underline{C}_{t\le 0}$$

$$\tau_{\ge i}(\underline{C}(-, X)) = \underline{C}(-, t_{\ge i}X)$$

$\Phi: \underline{C}^{op} \times \mathcal{g} \longrightarrow A$ — спаривание (обобщение Hom)

весовая стр-ра — $\underline{C}$; t-стр-ра — $\mathcal{g}$

надо (для мотивов) положить ее счетно гомотоп. пределов

$\mathcal{g} := DM^{-}_{eff}$

$A := Ab$

$\leadsto$ будет такое же, только с Φ вместо Hom.

с весовым комплексом возникают проблемы (даже если его строить на категории комплексов)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ 0 \quad \| \quad 0 & & \times 2 \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \end{array}$$

— морфизм, не гомотопный нулю

$$k[t]/t^2 \xrightarrow{\times t} k[t]/t^2$$

$0 \quad 0 \quad 0$

$\times 2 \leftarrow 0 \quad \times 2$

весовое разложение $\rightsquigarrow$ какой морфизм ему соответствует?

с точностью до морфизма комплексов вида $df+gd$

$(df+gd)(df'+g'd) = ?$

$(dh+hd)+di$ $\qquad ((dh+hd)+di)((dh'+h'd)+i'd)$

$did=0$

$\to \; =0$