Некоммутативная и производная алгебраическая геометрия

Дмитрий Орлов

28–31.03.2016

1 28 марта

Алгебраическое многообразие обычно определяется в терминах покрытия открытыми множествами $U_1, \ldots, U_n$, и $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, где A_i — коммутативная алгебра над базовым полем K. Теперь попытаемся продеформировать A_i в некоммутативную алгебру $A_{i,t}$. Некоммутативное аффинное многообразие — это просто некоммутативная алгебра, а что такое ее спектр — совершенно неважно. Как склеить такие алгебры — непонятно. Так получается некоммутативная алгебраическая геометрия.

Производная алгебраическая геометрия — это когда вместо алгебр рассматривается что-нибудь другое (например, n-стэки; см. работы B. Toen, J. Lurie — у них коммутативная производная алгебраическая геометрия). Мы считаем, что правильно делать одновременно некоммутативную и производную алгебраическую геометрию. Производные категории (квази)когерентных пучков позволяют получить все то же, но в каком-то смысле более простым способом.

Пример: пусть Y, Z — подмногообразия в X (например, две кривые на поверхности), и пусть $Y \cap Z = \mathrm{pt}$, пересечение трансверсально и все хорошо. Если теперь ситуация другая и $Y = Z$, то $Y \cap Y = Y$, казалось бы. С точки зрения производной геометрии это не совсем так. Пересечение — это расслоенное произведение $Y \times_X Y$, и это должна быть уже не обычная схема, а производная: как топологическое пространство это Y, и над ним висит уже не структурный пучок $\mathcal{O}_Y$ а что-то более сложное (комплекс). То есть получаем топологическое пространство, снабженное не пучком регулярных функций, а комплексом (или DG-алгеброй) регулярных функций. Это производные в одну сторону (налево), а бывают и в другую (направо): это как раз n-стэки.

Зачем в принципе нужны некоммутативные многообразия? Чаще всего это связано с разными задачами физики: квантовые группы, зеркальные симметрии.

На этой лекции мы будем говорить про коммутативные многообразия и введем основные объекты, через которые потом мы перейдем в некоммутативный мир.

Пусть X — алгебраическое многообразие (или схема). Как его изучить? На это есть разные точки зрения. Можно попытаться описать всевозможные подмногообразия там. Если мы взяли кривую, то подмногообразия в ней — это наборы точек (может, с нильпотентнами какими-то), и две кривые сложно различить, зная только точки на них. Как мы знаем, X — это не только топологическое пространство X, но и пучок регулярных функций $\mathcal{O}_X$. Как топологические пространства все кривые рода g одинаковы. Напомним, что пучок сопоставляет каждому открытому множеству U множество $\mathcal{O}_X(U)$ регулярных функций на U. Так вот, гораздо важнее изучить на X не подмногообразия, а различные когерентные пучки. Самый простой пример когерентных пучков — это алгебраические векторные расслоения на X. Если Y — подмногообразие в X, ему естественно сопоставить квази-когерентный пучок $\mathcal{O}_Y$ на X. С другой стороны, если E — векторное расслоение на X, то локально $E|_U = \mathcal{O}_U^{\oplus r}$, где r — ранг E.

Мы утверждаем, что изучить многообразие X — значит, изучить категорию когерентных пучков на X. То есть, всякому X мы сопоставляем категорию $\operatorname{coh} X$. Объекты

$\operatorname{coh} X$ — когерентные пучки на X, а морфизмы между ними — морфизмы пучков.

Что такое квазикогерентный пучок? Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема. Естественно изучать ее представления, то есть, модули над A. Если M — модуль над A, то естественным образом строится пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\widetilde{M}$. В частности, $\widetilde{M}(\operatorname{Spec} A) = M$, а сечения на (главных) открытых множествах даются локализациями модуля M. Так вот, каждому модулю M мы сопоставили пучок. Более того, между модулями и между пучками есть морфизмы: есть категория модулей M, и можно рассмотреть подкатегорию, порожденную пучками вида $\widetilde{M}$, в категории, скажем, всех пучков абелевых групп на X. Такая категория называется категорией квази-когерентных пучков на X и обозначается через $\operatorname{Qcoh}(\operatorname{Spec} A)$.

Для произвольной схемы X, покрытой аффинными схемами $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, можно сказать, что пучок $\mathcal{F}$ *квазикогерентен*, если он локально имеет описанный выше вид: $\mathcal{F}|_{U_i} = \widetilde{M_i}$, где M_i — модуль над A_i. Пусть теперь схема X нетерова, и A_i — нетеровы алгебры. В этом случае можно определить *когерентные* пучки: они получаются склейкой из конечно-порожденных модулей.

Можно определить и другие категории: например, категория $\mathcal{O}_X$-модулей значительно больше, чем категория квази-когерентных модулей. Можно рассматривать другие топологии на схеме: например, этальную, плоскую,.... Категория $\mathcal{O}_X$-модулей, конечно, зависит от того, в какой топологии эти пучки рассматривать, а вот категория квази-когерентных пучков не зависит от топологии. Поэтому квази-когерентные пучки видят саму схему, а не ту «случайную» топологию, которую вы на нее навесили.

Итак, наш первый шаг: если X — схема, то естественно рассмотреть категорию $\operatorname{Qcoh} X$ или $\operatorname{coh} X$. Эти категории абелевы: для морфизма пучков определены ядро, коядро и образ.

Второй шаг (Гротендик). Если есть абелева категория $\mathcal{A}$, то следует перейти к *производной категории* $D(\mathcal{A})$. Что это такое? Производная категория определяется через категорию комплексов $\operatorname{Com}(\mathcal{A})$. Комплекс — это последовательность объектов

$$\mathcal{F}^\bullet = \{\ldots \xrightarrow{d} \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{d} \mathcal{F}^i \xrightarrow{d} \mathcal{F}^{i+1} \to \ldots\},$$

где $\mathcal{F}^i \in \mathcal{A}$, и $d^2 = 0$. Комплексы — это объекты категории $\operatorname{Com}(\mathcal{A})$. У каждого комплекса есть когомологии: условие $d^2 = 0$ означает, что $\operatorname{Im}(d^{i-1}) \subseteq \operatorname{Ker}(d^i)$, и можно положить

$$H^i(\mathcal{F}^\bullet) = \operatorname{Ker}(d^i)/\operatorname{Im}(d^{i-1}).$$

Морфизмы комплексов определяются естественным образом: если $\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet$ — комплексы, то $\{f^i\}$ — морфизм между ними, если в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \mathcal{F}^{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i-1}"] & \mathcal{F}^i \arrow[r] \arrow[d, "f^i"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \mathcal{G}^{i-1} \arrow[r] & \mathcal{G}^i \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

все квадраты коммутативны. Теперь мы отождествляем комплексы, которые имеют «одинаковые» когомологии. А именно, морфизм комплексов $f\colon \mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet$ называется *квази-изоморфизмом*, если индуцированное отображение $H^i(\mathcal{F}) \to H^i(\mathcal{G})$ является изоморфизмом для любого $i \in \mathbb{Z}$.

Для такого отождествления есть простое категорное понятие *локализации*. Для абелевой категории $\mathcal{A}$ *производная категория* $D(\mathcal{A})$ получается из категории $\operatorname{Com}(\mathcal{A})$ обращением всех квази-изоморфизмов, то есть, локализацией относительно класса квази-изоморфизмов. Объекты $D(\mathcal{A})$ — это объекты $\operatorname{Com}(\mathcal{A})$. Морфизмы между $\mathcal{F}^\bullet$ и $\mathcal{G}^\bullet$ — это домики вида

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{H}^\bullet \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathcal{F}^\bullet & & \mathcal{G}^\bullet
\end{tikzcd}$$

где s — квази-изоморфизм.

Заметим, что $\mathcal{A}$ вкладывается в $D(\mathcal{A})$: можно сопоставить каждому объекту $\mathcal{F}$ комплекс, у которого в нулевой позиции стоит $\mathcal{F}$, а остальные позиции нулевые. Это полное вложение: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Есть понятие сдвига: если $\mathcal{F} \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{F}[n]$ — комплекс, у которого $\mathcal{F}$ стоит в позиции $-n$ (а в остальных местах нули). Оказывается, что $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(\mathcal{F},\mathcal{G}[n]) = \mathrm{Ext}^n(\mathcal{F},\mathcal{G})$.

(Вопрос из аудитории: можно ли таким же образом определить функторы Tor? Нет, потому что Tor должен быть связан с тензорным произведением, а у нас нет тензорного произведения с точки зрения некоммутативной геометрии. Дело в том, что над некоммутативной алгеброй у нас есть только, скажем, левые модули, а их нельзя тензорно перемножать.)

Итак, если X — схема, мы построили производные категории $D(\mathrm{Qcoh}\,X)$ (неограниченная производная категория) и $D^b(\mathrm{coh}\,X)$ (ограниченная производная категория). Иногда рассматривают еще всякие категории типа D^+ или D^-, но на самом деле это совершенно не нужно.

Конечно, мы хотим теперь морфизмам $f\colon X \to Y$ сопоставить какие-то функторы между этими категориями. Например, есть функторы $Rf_*\colon D(\mathrm{Qcoh}\,X) \to D(\mathrm{Qcoh}\,Y)$, $Lf^*\colon D(\mathrm{Qcoh}\,Y) \to D(\mathrm{Qcoh}\,X)$. Рассмотрим произведение $X \times Y$:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

Пусть E, скажем, векторное расслоение на $X \times Y$, или вообще какой-то объект $\mathcal{E}^\bullet \in D(\mathrm{Qcoh}(X \times Y))$. Тогда есть функтор $\Phi_f\colon D(\mathrm{Qcoh}\,X) \to D(\mathrm{Qcoh}\,Y)$, который переводит $\mathcal{F}^\bullet$ в $Rp_{2,*}(p_1^*\mathcal{F} \otimes^L \mathcal{E}^\bullet)$. (У любого $\mathcal{E}^\bullet$ в производной категории есть h-плоская резольвента: квази-изоморфный ему комплекс, члены которого — плоские пучки.) Таким образом, каждому объекту на произведении X и Y мы сопоставили функтор между производными категориями на X и на Y.

Если рассматривать маленькие категории когерентных пучков, то нужны некоторые ограничения на объекты $\mathcal{E}^\bullet$ и требовать, чтобы X был собственным или что-то в этом роде.

Это аналогично такой ситуации: если A, B — алгебры, и мы рассматриваем правые A-модули, то каждый комплекс A-B-бимодулей определяет функтор $D(\mathrm{Mod}-A) \to D(\mathrm{Mod}-B)$, $N^\bullet \mapsto N^\bullet \otimes_A^L M^\bullet$.

Пусть теперь X — гладкое проективное многообразие (а проективные многообразия гораздо лучше аффинных: правильно не склеивать схемы из аффинных, а наоборот, определить сначала гладкие проективные многообразия и получать из них аффинные удалением чего-то, а особые — стягиванием чего-то). На какие вопросы мы хотим отвечать?

- Для каких X, Y категории $D^b(\mathrm{coh}\,X)$ и $D^b(\mathrm{coh}\,Y)$ (или категории $D(\mathrm{Qcoh}\,X)$ и $D(\mathrm{Qcoh}\,X)$) эквивалентны?
- Как описать $D^b(\mathrm{coh}\,X)$?

В первом вопросе имеются в виду эквивалентности в триангулированном смысле, то есть, точные функторы. Что такое триангулированная (K-линейная) категория? Пусть $\mathcal{T}$ — K-линейная аддитивная категория. Она называется *триангулированной*, если

1. выделена аддитивная авто-эквивалентность $[1]\colon \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}$;
2. выделен класс точных треугольников вида

   $$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1],$$

   который удовлетворяет некоторому набору аксиом.

Одна из аксиом: любой морфизм $f\colon X \to Y$ может быть включен в выделенный треугольник. Другая: если есть два выделенных треугольника и морфизмы между X и Y, то они продолжаются до морфизма треугольников:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, dotted] & X[1] \arrow[d] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

Так вот, нас интересуют *точные* функторы между триангулированными категориями, то есть, те, которые переводят точные треугольники в точные треугольники.

Триангулированные категории появляются всюду:

- в топологии: стабильная гомотопическая категория;
- в алгебре: производные категории представлений;
- в алгебраической геометрии: $D(\operatorname{Qcoh} X)$, $D^b(\operatorname{coh} X)$, $\operatorname{Perf} X$;
- в теории мотивов: категория мотивов Воеводского $\mathrm{DM}_{gm}(K)$;
- в симплектической геометрии: триангулированная категория Фукая $DFuk(X, W)$;
- в теории струн: категория D-бран в σ-моделях и моделях Ландау–Гинзбурга.

Так вот, если $D^b(\operatorname{coh} X)$ эквивалентна $D^b(\operatorname{coh} Y)$, то X и Y называются *Фурье–Мукаи партнерами*. Второй вопрос: что значит «описать» категорию $D^b(\operatorname{coh} X)$? Например, установить ее эквивалентность какой-то совершенно другой триангулированной категории: категории Фукая или категории представлении какого-то колчана. Например, для $X = \mathbb{P}^2$ получено описание каких-то стабильных векторных расслоений (инстантонов) в терминах линейной алгебры с помощью теории ADHM (Atiyah–Drinfeld–Hinchin–Manin).

2 29 марта

Итак, каждой схеме X (над K) мы сопоставили категории $D(\operatorname{Qcoh} X)$ и $D^b(\operatorname{coh} X)$ (если X нетерова), и сформулировали два вопроса:

- Для каких X, Y категории $D(\operatorname{Qcoh} X)$ и $D(\operatorname{Qcoh} Y)$ эквивалентны?
- Как описать $D(\operatorname{Qcoh} X)$?

Начнем с ответа на второй вопрос. Считаем, что X — квазикомпактная отделимая схема. Обсудим свойства категории $D(\operatorname{Qcoh} X)$. В ней ей произвольные прямые суммы.

Определение 2.1. Объект E называется **компактным**, если

$$\operatorname{Hom}(E, \bigoplus_i F_i) \cong \bigoplus_i \operatorname{Hom}(E, F_i)$$

для любого набора объектов $\{F_i\}$. Рассмотрим подкатегорию компактных объектов в $D(\operatorname{Qcoh} X)$ и назовем ее $D(\operatorname{Qcoh} X)^c = \operatorname{Perf} X$. У этой категории есть другое определение: комплекс E называется **совершенным**, если он локально квази-изоморфен ограниченному комплексу из алгебраических векторных расслоений. Подкатегория совершенных комплексов — это и есть $\operatorname{Perf} X$.

Если X нетерова, то $\operatorname{Perf} X \subseteq D^b(\operatorname{coh} X)$, и иногда они совпадают. А именно, $\operatorname{Perf} X \cong D^b(\operatorname{coh} X)$ тогда и только тогда, когда X регулярно. Фактор-категория $D_{sg}(X) = D^b(\operatorname{coh} X)/\operatorname{Perf} X$ называется **категорией особенностей**.

Теорема 2.2 (Neeman)**.** Пусть схема X квазикомпактна и отделима. Тогда

1. $D(\mathrm{Qcoh}\, X)$ компактно порождена;

2. $\mathrm{Perf}\, X$ имеет генератор (то есть, классически порождена одним объектом).

Первое свойство морально означает, что в категории $D(\mathrm{Qcoh}\, X)$ достаточно много компактных объектов. Определение компактной порожденности: если для всякого компактного объекта $E \in \mathrm{Perf}\, X$ выполнено $\mathrm{Hom}(E, F) = 0$, то $F = 0$. Второе утверждение теоремы означает, что существует объект $E \in \mathrm{Perf}\, X$ такой, что минимальная триангулированная подкатегория $\mathcal{N} \subseteq \mathrm{Perf}\, X$, которая содержит E и замкнута относительно взятия прямых слагаемых (то есть, из $V \oplus W \in \mathcal{N}$ следует, что $V, W \in \mathcal{N}$), совпадает с $\mathrm{Perf}\, X$.

Теорема 2.2 утверждает, таким образом, что $D(\mathrm{Qcoh}\, X)$ имеет компактный генератор E (если $\mathrm{Hom}(E, F[n]) = 0$, то $F = 0$).

Пример 2.3. Если $X = \mathrm{Spec}\, A$, то $D(\mathrm{Qcoh}\, X) = D(\mathrm{Mod} - A)$. Какой в этой категории компактный генератор? Ответ: сам A.

Пример 2.4. Пусть X — квазипроективное многообразие. Например, если $X = \mathbb{P}^n$, то объект $E = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(n)$ является генератором. Если же теперь $X \subseteq \mathbb{P}^n$, можно ограничить ту же прямую сумму на X (и даже достаточно взять столько, какова размерность X): $E = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(d)$, где $d = \dim X$.

Определение 2.5. DG-алгебра — это градуированная алгебра $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ вместе с дифференциалом $d\colon A^i \to A^{i+1}$ таким, что $d^2 = 0$ и $d(ab) = da \cdot b + (-1)^{\overline{a}} a \cdot db$ (правило Лейбница). Есть категория (правых) DG-модулей над A: DG-модуль — это прямая сумма $M = \bigoplus M^i$ с дифференциалом d_M, где $d_M^2 = 0$ и выполняется правило Лейбница. Рассмотрим гомотопическую категорию от категории $\mathrm{Mod} - A$ и профакторизуем по ацикличным модулям; получим производную категорию $D(A)$ DG-модулей над A. Ее подкатегория компактных объектов $DG(A)^c = \mathrm{Perf}\, A$ описывается так: это минимальная триангулированная подкатегория, содержащая A и замкнутая относительно прямых слагаемых.

Теорема 2.6 (Keller)**.** Для любого X как выше существует DG-алгебра A такая, что производная категория $D(\mathrm{Qcoh}\, X)$ эквивалентна категории $D(A)$, и при этом $\mathrm{Perf}\, X \cong \mathrm{Perf}\, A$.

Категория $D(\mathrm{Qcoh}\, X)$ имеет естественное оснащение в виде DG-категории.

Определение 2.7. DG-категория — это категория оснащенная над комплексами. По DG-категории $\mathcal{C}$ можно определить **гомотопическую категорию** $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$. Объекты у $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ такие же, а $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{C})}(E, F) = H^0 \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$.

Определение 2.8. Оснащение для категории $\mathcal{T}$ — это DG-категория $\mathcal{C}$ с эквивалентностью $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}$.

Определение 2.9. Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ — DG-категории. Функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ называется **квази-эквивалентностью**, если

1. для любых $X, Y \in \mathcal{C}$ отображение $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(FX, FY)$ является квази-изоморфизмом комплексов;

2. индуцированное отображение $\mathrm{Ho}\, F\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{C}')$ является эквивалентностью категорий.

Определение 2.10. Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ называются **квази-эквивалентными**, если существует последовательность

$$\mathcal{C} \xleftarrow{\sim} \mathcal{A}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_1 \xleftarrow{\sim} \ldots \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}'.$$

Посмотрим на категорию $D(\operatorname{Qcoh} X)$. Откуда на ней берется оснащение? Ответ: из инъективных резольвент. В категории $\operatorname{Com} X$ есть подкатегория $\operatorname{Inj} X$ гомотопически инъективных комплексов (мы не будем объяснять, что это такое). Морфизмы между $I, J \in \operatorname{Inj} X$ можно оснастить комплексами: пусть i-й член комплекса $\underline{\operatorname{Hom}}(I, J)$ равен $\prod_k \operatorname{Hom}(I^k, J^{k+i})$. Можно аккуратно определить дифференциал, и тогда $H^0(\underline{\operatorname{Hom}}(I, J)) = \operatorname{Hom}(I, J)$. Получаем DG-категорию $\underline{\operatorname{Inj}}(X)$.

Тогда $D(\operatorname{Qcoh} X) = \operatorname{Ho}(\underline{\operatorname{Inj}}(X))$. При этом $\underline{\operatorname{Hom}}_{\operatorname{Inj} X}(E, E)$ является DG-алгеброй; эту DG-алгебру и нужно взять в теореме Келлера 2.6.

Эквивалентность в теореме 2.6 — это эквивалентность триангулированных категорий, но она есть уже на DG-уровне (на самом деле, можно брать и другие оснащения, они все квази-эквивалентны). Категория полу-свободных модулей SF дает оснащение для $D(A)$: $\operatorname{Ho}(SF) = D(A)$, и категории $\underline{\operatorname{Inj}} X$ и SF квази-эквивалентны, что и дает эквивалентность категорий $D(\operatorname{Qcoh} X)$ и $D(A)$.

Объект $E \in D(\operatorname{Qcoh} X) = \operatorname{Ho}(\underline{\operatorname{Inj}} X)$ дает функтор $\operatorname{Hom}_{\underline{\operatorname{Inj}}(X)}(E, -) \colon \underline{\operatorname{Inj}} X \to \operatorname{Mod} - A$, где $A = \operatorname{End}(E)$.

Гомотопическая категория $\operatorname{Ho}(\mathcal{C})$ имеет естественную триангулированную структуру, но мы не будем об этом гоорить.

Разумеется, мы получаем оснащение и для любой подкатегории в $D(\operatorname{Qcoh} X)$, например, для $\operatorname{Perf} X$. Таким образом, $\underline{\operatorname{Inj}}(X) \cong SF(A)$ и $\underline{\operatorname{Perf}} X \cong \underline{\operatorname{Perf}}(A)$, где A — DG-алгебра (это фактически и доказывает Keller). Конечно, разные генераторы дают разные A, то есть, таких DG-алгебр A огромное количество.

Замечание 2.11. Алгебра A когомологически ограничена: у нее только конечное число ненулевых когомологий.

Определение 2.12. [Производная] некоммутативная схема — это DG-категория вида $\underline{\operatorname{Perf}} A$ для некоторой когомологически ограниченной DG-алгебры A. Категория $D(A)$ называется **производной категорией квази-когерентных пучков** на этой схеме.

Нас очень интересуют гладкие (скорее, регулярные) проективные (скорее, собственные) схемы. Напомним, что $\operatorname{Perf} A = \operatorname{Ho}(\underline{\operatorname{Perf}} A)$.

Когда $\underline{\operatorname{Perf}} A$ является *собственной*? Тогда и только тогда, когда $\dim_K \bigoplus_i H^i(A) < \infty$, то есть, все когомологии конечномерны. Это равносильно тому, что для любых $U, V \in \operatorname{Perf} A$ сумма $\bigoplus_n \operatorname{Hom}_n(U, V[n])$ конечномерна. Для обычных схем это равносильно обычному определению собственности.

Когда $\underline{\operatorname{Perf}} A$ является *гладкой*? Ответ придумал Концевич: тогда и только тогда, когда A как DG-бимодуль (или, что то же самое, как DG-модуль над $A \otimes_K A^{\mathrm{op}}$) является совершенным объектом. Можно доказать, что это свойство не зависит от выбора реализации (то есть, например, выбора другого генератора и замены A на другую DG-алгебру).

Когда $\underline{\operatorname{Perf}} A$ является *регулярной*? Регулярность $\underline{\operatorname{Perf}} A$ зависит только от триангулированной категории $\operatorname{Perf} A$, здесь не нужно оснащения. Напомним определение классического генератора $E \in \mathcal{T}$: минимальная триангулированная подкатегория, содержащая E и замкнутая относительно прямых слагаемых, совпадает с $\mathcal{T}$. Более конструктивно: обозначим через $\langle E \rangle$ полную подкатегорию, содержащую все сдвиги $E[n]$, конечные прямые суммы и прямые слагаемые. Берем какой-нибудь морфизм $f \colon X \to Y$ из $\langle E \rangle$ и рассматриваем его конус. Добавляем в нашу категорию все такие конусы и получаем $\langle E \rangle_2$, потом повторяем процедуру. Определение генератора означает, что $\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle E \rangle_i$.

Определение 2.13. Объект E называется **сильным генератором**, если вся $\mathcal{T}$ получается из E за конечное число таких шагов.

Так вот, $\mathcal{T}$ называется **регулярной**, если в ней имеется сильный генератор.

Теперь возникают вопросы:

1. Существует ли собственная гладкая некоммутативная схема, которая не является $\operatorname{Perf} X$ для обычной схемы X?

2. Как получить достаточно большое количество новых гладких собственных некоммутативных схем?