01.10.2012

И. Панин

Еще одна задача

Пусть R — локальное кольцо, содержащее поле k (char $k \neq 2$ временно), с полем вычетов $\overline{R}$.
Пусть $q = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i^2$ — квадратичная форма над R с $a_i \in R^\times$.
Пусть $f \in R[t]$ — такой унитарный многочлен нечетной степени, что $\overline{f} \in \overline{R}[t]$ сепарабелен. Пусть $\widetilde{R} = R[t]/(f(t))$

($\widetilde{R}/R$ — конечное этальное расширение нечетной степени)

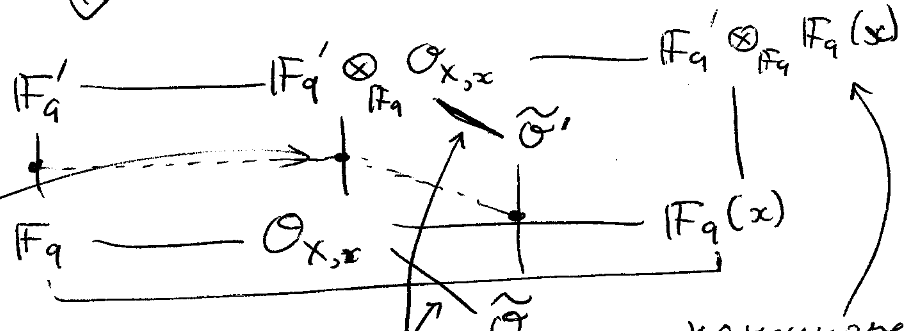
Предположим, что уравнение $q_{\widetilde{R}} = q \otimes_R \widetilde{R} = 0$ имеет унимодулярное решение $(b_1, \dots, b_n) \in \widetilde{R}^n$. Доказать, что $q = 0$ над R имеет унимодулярное решение.

$\boxed{\text{Замечания}}$ 1) Если char $k \neq 2$ и $\overline{R}$ бесконечно, то это теорема Rehmann–Panin.
2) Если char $k = 2$ (с поправками в условие) и $\overline{R}$ бесконечно, то это теорема Пименова и Панина

Типичный случай задачи (не решенный):
$R = \mathcal{O}_{X,x}$, где $X/\mathbb{F}_q$ — многообразие (гладкое)
$k = \mathbb{F}_q$, x — замкнутая точка, т.е. $\mathbb{F}_q(x)$ конечно

$$2 \nmid q \rightsquigarrow \begin{matrix} \mathbb{F}_q' \\ | \\ \mathbb{F}_q \end{matrix}$$
- композит всех расширений степеней ℓ^n, где ℓ — фиксированное простое, отличное от 2.

$\Downarrow$



расширение бесконечно, но все данные конечны
$\rightsquigarrow \exists$ конечное подрасширение

$$\begin{matrix} \mathbb{F}_q' \\ | \\ \mathbb{F}_{q^{\ell^n}} \\ | \\ \mathbb{F}_q \end{matrix}$$

$\to$ остается конечное расширение констант

неч. степени, этальное

конечномерная сепарабельная $\mathbb{F}_q'$-алгебра
$\rightsquigarrow$ она равна $\prod (\mathbb{F}_q')^{(i)}$
$\rightsquigarrow \mathbb{F}_q' \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathcal{O}_{X,x}$ полулокально

„Определение"

Мотивное пространство — это пучок множеств в подходящей топологии на категории Sm/k гладких многообразий над k.

$$X : (Sm/k)^{op} \longrightarrow Sets \quad \text{— предпучок}$$
$$U \longmapsto X(U)$$

такой, что $\forall\, U \in Sm/k$ $\; X|_U$ — пучок

$Mor_{Spc}(X, Y) :=$ морфизмы пучка X в пучок Y

$=$ морфизмы предпучка X в предпучок Y

$\boxed{\text{Замечание}}$: $Sm/k \hookrightarrow Sh(Sm/k) =: Spc(k) =: Spc$ — полное вложение

$U \longmapsto \underset{Sm/k}{Map}(-, U)$ — представимый предпучок

Мы построим $Ho^{\mathbb{A}^1}(k) := Ho(Spc) = Spc[W^{-1}]$

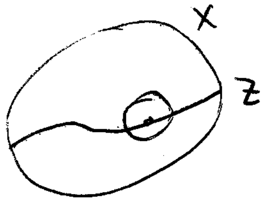
Это можно сделать, поскольку Spc обладает следующими свойствами:

1. В Spc есть все обратные пределы
2. В Spc есть все прямые пределы
3. Выделен $W \subset Mor(Spc)$ — слабые экв-сти
4. Выделен $Cof \subset Mor(Spc)$ — кофибрации
5. Выделен $Fib \subset Mor(Spc)$ — фибрации

+ свойства, их связывающие

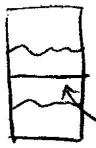
Какую выбрать топологию?

Напомним пожелания к категории $Ho^{\mathbb{A}^1}(k)$.

1. 

Хотим, чтобы локально

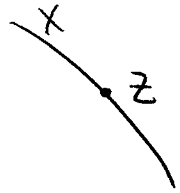
$(X, Z) \cong (U, 0 \times Z)$, где $U \subset \mathbb{A}^1 \times Z$



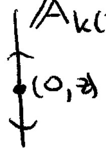
U — окрестность по Зарискому $0 \times Z$

не вполне точно!

Например,

1'. 

$(X, z) \cong (U, z)$, где $U \subset \mathbb{A}^1_{k(z)} = \mathbb{A}^1 \times z$



т.е. пара (X, Z) локально стандартна (в нашей топологии),

т.е. имеет вид $(\mathbb{A}^1 \times Z, 0 \times Z)$

② $\forall U \in Sm/k \quad [U, Gr]_{/\mathbb{A}^1} \xrightarrow{\sim} K_0^{alg}(U)$

О топологиях (можно считать для простоты, что $k = \mathbb{C}$)

Отображение $\begin{matrix} X' & x' \\ \downarrow & \downarrow \\ X & x \end{matrix}$ — гладкие — называется <u>эталным</u>, если $\forall x' \in X'$

$T_{X',x'} \longrightarrow T_{X,x}$ — изоморфизм

<u>Эталное покрытие</u> X — сюръективное эталное отображение $X' \longrightarrow X$.

<u>Свойства</u>:

① $\begin{tikzcd} X'' \arrow[d, "\text{покрытие}"] \arrow[dd, bend left=60, "\text{покрытие}"] \\ X' \arrow[d, "\text{покрытие}"] \\ X \end{tikzcd}$

Открытое покрытие в топологии Зарисского — эталное

Замкнутое вложение, как правило, не является эталным

② $\begin{tikzcd} Y' = Y \times_X X' \arrow[r] \arrow[d, "\text{покрытие}"'] & X' \arrow[d, "\text{покрытие}"] \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$

все гладкие

③ $\begin{tikzcd} & X' \times_X X'' \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ X' \arrow[dr] & & X'' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$ — следствие ① и ②

покрытие

покрытия

Et/X — категория всех эталных морфизмов $\begin{matrix} X' \\ \downarrow \\ X \end{matrix}$

+ топология на Et/X; т.е. для каждого $Y \in Et/X$ взяты все эталные покрытия Y

Топология нужна для того, чтобы сказать, что такое пучок:

Пучок $F: (Et/X)^{op} \longrightarrow Sets$ — предпучок такой, что $\forall Y \in Et/X$ и $\forall\, Y' \longrightarrow Y$ — покрытия

$\begin{tikzcd} F(Y' \times_Y Y') & F(Y') \arrow[l, "p_2^*"'] \\ F(Y') \arrow[u, "p_1^*"] & F(Y) \arrow[l, "f^*"] \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$ — декартов и $F(\varnothing) = *$

<u>Опр</u> Пусть есть категория $\mathcal{C}$ с расслоенными произведениями и пусть есть $\varnothing$ (начальный) и pt (финальный).

<u>База топологии</u> τ ~~[illegible]~~ — это сопоставление каждому $X \in \mathcal{C}$ семейства морфизмов $f: X' \longrightarrow X$, называемых покрытиями, так, что выполнены 1) и 2) и любой изоморфизм $X' \xrightarrow{\sim} X$ — покрытие.

<u>Пучок</u> по отношению к τ на $\mathcal{C}$ — это предпучок $\mathcal{F}: \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Sets$ т.ч. $\forall\, Y' \xrightarrow{\text{покрытие}} Y$ выполнено ... (см. выше) и $\mathcal{F}(\varnothing) = *$

$\boxed{\text{Примеры}}$ $(\mathcal{C}, \tau)$

① Sm/k и τ — Зариского

(покрытие: $\coprod X_i \xrightarrow[\text{сюръективно}]{} X \mid X_i \hookrightarrow X$ — открыто по Зарискому)

② Sm/k и τ — этальная

(покрытие: $X' \xrightarrow[\text{сюръект.}]{} X$ — этальное)

③ Sm/k и $\tau = Nis$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $X \in Sm/k$. Морфизм
$$\begin{array}{c} X' \\ \downarrow f \\ X \end{array}$$
называется <u>покрытием по Нисневичу</u>, если

① f — этальное покрытие

② $\forall\, Z \subset X$ — неприводимое замкнутое, z — общая точка Z, $\exists\, z' \hookrightarrow X'$ — схемная точка такая, что

а) $f(z') = z$

б) $k(z') \xleftarrow{f^*} k(z)$ — изоморфизм

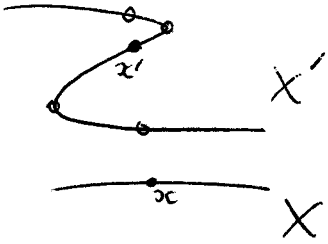
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "f"] & \ni & z' \arrow[d] \\ X & \ni & z \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ <u>Элементарный квадрат Нисневича</u> — это декартова диаграмма гладких многообразий

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[d, "f'"] & X' \arrow[d, "f"] & Z' \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ U \arrow[r, hook, "i"'] & X & Z \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

такая, что
① f — этальный
② i, i' — открытое по Зарискому
③ $Z' \xrightarrow{\sim} Z$
④ $f^{-1}(Z) = Z'$

$\rightsquigarrow U \coprod X' \longrightarrow X$ — покрытие по Нисневичу



т.е. $U \amalg X'$ „состоит из" открытого подмножества $U \hookrightarrow X$ и этального морфизма $X' \longrightarrow X$

Spec $k((t))$ —— Spec $k[[t]]$ – аналог „маленького диска" – по духу то же самое

$\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ ——— 0 ——— $\mathbb{A}^1$

(покрытие в строго плоской топологии)

$\boxed{\text{Лемма}}$ Предпучок $\mathcal{F} : (Sm/k)^{op} \longrightarrow Sets$ является пучком в топологии Нисневича тогда и только тогда, когда для любого элементарного квадрата Нисневича квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U') & \mathcal{F}(X') \arrow[l] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[u] & \mathcal{F}(X) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

декартов и $\mathcal{F}(\emptyset) = *$.

$\boxed{\text{Пример}}$ элементарного квадрата Нисневича

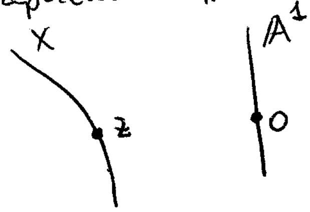
$\underbrace{U_1 \cup U_2}_{\text{покрытие по Зарисскому}} = X \rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} U_1 \cap U_2 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & U_1 \arrow[d, hook] & Z \arrow[l, hook'] \arrow[d, equal] \\ U_2 \arrow[r, hook] & X & Z \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

Итак у нас есть Sm_{Zar}/k, Sm_{et}/k, Sm_{Nis}/k

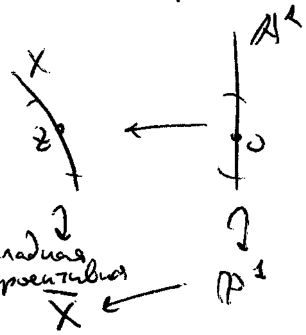
Какая из этих топологий хороша для Spc?

Зарисского – плохая:



Верно ли, что (X, z) локально в топ. Зарисского изоморфно $(\mathbb{A}^1, 0)$? Не верно!

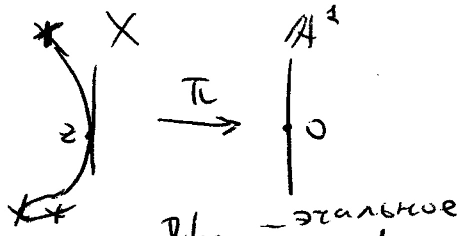
иначе есть регулярное



$\bar{X} \xleftarrow{f} \mathbb{P}^1$ регулярное

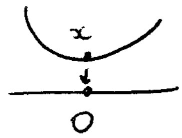
$\underline{\text{Лемма}}$ если $g(\bar{X}) > 0$, то таких отображений f нет (сюръективных)

В этальной топологии:



$$X \supset X^0 \xrightarrow{\pi|_{X_0}} \mathbb{A}^1 \text{ — этальное}$$

$$\begin{array}{ccc} X^0 & & \mathbb{A}^1 \\ \cup & & \cup \\ z & \longmapsto & 0 \end{array}$$



X' — этальная окрестность т. 0

$\mathcal{O}_{X,x}$: $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$

Есть ли у нас изоморфизм $(X^0, x) \to (U, 0)$ локально в этальной топологии? Есть: (X^0, x)

$$\begin{tikzcd} (X^0 \times_U X^0, \Delta(x)) \arrow[r] \arrow[d] & (X^0, x) \arrow[d] \\ (X^0, x) \arrow[r] \arrow[u, bend left, "\Delta"] & (U, 0) \end{tikzcd}$$

<u>Утверждение:</u> $\Delta(X^0) \amalg ? = X^0 \times_U X^0$

и $? \hookrightarrow X^0 \times_U X^0$ — открыто по Зарискому

$\Delta(X^0) \hookrightarrow X^0 \times_U X^0$.

<u>Пример:</u>

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec}(\mathbb{C}) \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{R})} \operatorname{Spec}(\mathbb{C}) \arrow[d, equal] & \\ \operatorname{Spec}(\mathbb{C}) \arrow[ur, "\Delta"] & \operatorname{Spec}(\mathbb{C}) \amalg \operatorname{Spec}(\mathbb{C}) & \operatorname{Spec}(\mathbb{C}) \arrow[ul, "?"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & & a \otimes b \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} & & (ab, a\bar{b}) \end{array}$$

Тогда

$$\begin{tikzcd} (\Delta(X^0), \Delta(x)) \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "\wr"'] & & \\ (X^0 \times_U X^0, \Delta(x)) \arrow[r] \arrow[d] & (X^0, x) \arrow[d] \\ (X^0, x) \arrow[r] & (U, 0) \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow (\Delta(X^0), \Delta(x))$ в малом такая же, как (X^0, x)

<u>Опр:</u> $\boxed{Spc = Sh_{Nis}(Sm/k)}$

$\rightsquigarrow$ Этальная топология нам подходит

Точно так же нам подходит топология Нисневича.
Почему же мы выбираем Нисневича, а не этальную?
Вспомним другое условие: $[X, Gr]_{\mathbb{A}^1} = K_0(X)$

$$Gr = \bigcup Gr(n, 2n)$$

— у нас есть посл-ти типа Майера–Вьеториса для соотв. топологии
аналог для этальной топологии — спектральная посл-сть

$\tilde{X}/X$ — накрытие Галуа $\quad H^i(X, K_j(\tilde{X}))$: $\quad H^*(X, K_*(\tilde{X})) \Rightarrow K_*(X)$

В частности, $K_0(\tilde{X})^{Gal} = K_0(X)$.
Но это не так! Для K_0 нет спуска Галуа (а для Pic есть)