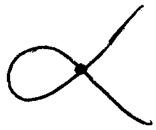
15.10.2012

И.А. Панин

Пример

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 & \leftsquigarrow & k[t] \\ \downarrow & & \cup \\ \mathbb{A}^1/\{-1,1\} = \operatorname{Spec} A & & \{f \in k[t] \mid f(-1) = f(1)\} = A \end{array}$$

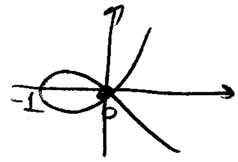


Любое многообразие (в том числе и не гладкое) задает представимый предпучок на Sm/k. Он является пучком в топологии Зарисского, Нисневича, плоской...

$$y^2 = x^2(x+1)$$

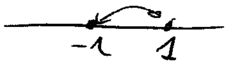
$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \underset{\parallel}{x+1}$$

$$t^2 = t^2$$



$$\big\downarrow$$

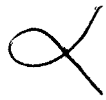
$$\Big(\underset{\substack{\parallel\\ x}}{t^2-1}\ ,\ \underset{\substack{\parallel\\ y}}{(t^2-1)t}\Big)$$



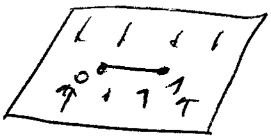
$$U \longmapsto h^C(U) = Map(U, C)$$ — мотивное пространство — играет роль окружности (симплициальной)

Определение $S^1_s = h^C = h^{\mathbb{A}^1/\{0,1\}}$

Пояснение Пусть $k = \mathbb{R}$. Что такое $h^C(\mathbb{R})$?



Видно, что $h^C(\mathbb{R})$ гомотопически эквивалентна окружности S^1

$k = \mathbb{C} \rightsquigarrow C(\mathbb{C}) := \mathbb{C}/\{0,1\} \to$  $\sim S^1$

Там есть отмеченная точка (происходящая из точек 0 и 1)

А вот другая окружность:

$\mathbb{A}^1 - \{0\}$, с отмеченной точкой 1:

$(\mathbb{A}^1 - \{0\}, \{1\}) =: (\mathbb{G}_m, \{1\})$

Замечание $k = \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R} - \{0\} \sim \{-1; +1\} = S^0$

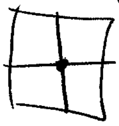
(Значит, мотивные пространства S^1_s и $\mathbb{G}_m$ не изоморфны)

Теперь $k = \mathbb{C} \rightsquigarrow (\mathbb{A}^1 - \{0\})(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \sim S^1$

Наблюдение $S^1 \wedge S^0 = S^1$

$S^1 \wedge S^1 = S^2$

$$\left(X \wedge Y = \frac{X \times Y}{X \vee Y} \right.$$



$(\wedge, \vee) \longleftrightarrow (\otimes, \oplus)$ // в $Ho^{\mathbb{A}^1}(k)$

Утверждение $(S^1_s, *) \wedge (\mathbb{G}_m, \{1\})$

$$\wr\wr_{\mathbb{A}^1}$$

$$(\mathbb{P}^1, \infty)$$

Определение $\underset{Spc_\bullet}{\underset{\cap}{(\mathbb{P}^1, \infty)}} = h^{\mathbb{P}^1}$ с отмеченной точкой $\{\infty\}$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}P^1$ ~ гомеоморфно S^1

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}P^1$ ~ гомеоморфно S^2

„Док-во": $S^1_s(\mathbb{R}) \wedge \mathbb{G}_m(\mathbb{R}) \sim S^1 \wedge S^0 = S^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

$S^1_s(\mathbb{C}) \wedge \mathbb{G}_m(\mathbb{C}) \sim S^1 \wedge S^1 = S^2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Принцип Если мы желаем проверить правдоподобность некоторого утверждения в будущей категории $Ho^{\mathbb{A}^1}(k)$, то надо посмотреть, что произойдет над $\mathbb{R}$ и что произойдет над $\mathbb{C}$.
(в категории (обычной) H)

Определение Мотивное пространство — это пучок множеств в топологии Нисневича на Sm/k.

Морфизм $\underset{Spc}{\underset{\cap}{X}} \xrightarrow{f} \underset{Spc}{\underset{\cap}{Y}}$ — это морфизм пучков, то есть, морфизм предпучков

Пример $pt: Sm/k \longrightarrow Sets$ $\qquad pt := h^{pt}$

$U \longmapsto$ одна точка $= Map_k(U, Spec(k))$

Опр. Пространство с отмеченной точкой — это пара $(X, i: pt \longrightarrow X)$

$X: U \longmapsto X(U)$ $\qquad$ т.е. $U \longmapsto (X(U), i(pt))$

$i: U \longmapsto i(pt)$

Иначе говоря, это пучок множеств с отмеченной точкой

Пример Y/k — многообразие, $y \in Y(k)$

(h^Y, h^y) — пространство с отмеченной точкой.

Морфизм пространств с отмеченной точкой — это морфизм пространств, уважающий точку

Мы получили категории

Spc — категория мотивных пространств

$Spc_\bullet$ — категория мотивных пространств с отмеченный точкой

Есть функторы $Spc_\bullet \longrightarrow Spc$ — забывающий — и

$$Spc \longrightarrow Spc_\bullet$$
$$X \longmapsto X_+ : \quad X_+(U) = X(U)_+ = X(U) \amalg \{+\}$$

$$Sm/k \xrightarrow{h} Spc$$
$$X \longmapsto h^X : h^X(U) = Map_k(U, X)$$

h — полное вложение, i.e. $Map_k(X,Y) = Map_{Spc}(h^X, h^Y)$

Поэтому для $X \in Sm/k$ будем писать X вместо $h^X \in Spc$

$\boxed{\text{Лемма}}\boxed{1}$ $PreSh(Sm/k) \underset{i}{\overset{a_{Nis}}{\rightleftarrows}} Sh_{Nis}(Sm/k)$
$$\| $$
$$Spc$$

$$Mor_{PreSh}(\mathcal{F}, i(\mathcal{G})) = Mor_{Sh_{Nis}}(a_{Nis}(\mathcal{F}), \mathcal{G})$$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $PreSh^{Ab}(Sm/k) \supset PreSh_{Nis}^{locNull}(Sm/k)$

$ker(f) \to \mathcal{F} \xrightarrow[\uparrow]{f} \mathcal{G} \to coker(f)$ превращается в изоморфизм $\Updownarrow$ $ker(f)$ и $coker(f)$ переходят в 0 $\Updownarrow$ f — слабая эквивалентность

$$i \uparrow \downarrow a_{Nis} \qquad \swarrow 0$$

$Sh^{Ab}_{Nis}(Sm/k)$ — локализация $PreSh^{Ab}(Sm/k)$ по подкатегории $PreSh_{Nis}^{locNull}(Sm/k)$

a_{Nis} — локализующий функтор

$Spc \supset W$ — слаб. экв-сти

— похожая локализация

$$Spc \to Ho^{\mathbb{A}^1}(k)$$

$\boxed{\text{Лемма}}\boxed{2}$ В категории $Spc = Sh_{Nis}(Sm/k)$ имеются все пределы (обратные пределы) и копределы (прямые пределы), причем функтор a_{Nis} коммутирует со взятием пределов и копределов: $a_{Nis}(\underleftarrow{\lim}(?)) = \underrightarrow{\lim}(a_{Nis}(?))$

$$a_{Nis}(\underrightarrow{\lim}(?)) = \underleftarrow{\lim}(a_{Nis}(?))$$

- в определении a_{Nis} участвуют обратные пределы, поэтому a_{Nis} коммутирует с $\underleftarrow{\lim}$
- как определить $a_{Nis}(\underrightarrow{\lim} \mathcal{F}_i)$? Надо взять $\underrightarrow{\lim}$ в $PreSh$ и отпучковать

а в категории $PreSh$ пределы берутся поточечно.

Зачем нужна Лемма 2?
– чтобы задать какую-нибудь модельную структуру на Spc.

$X \in Spc \rightsquigarrow \forall U \in Sm/k$ есть $X(U)$ – точки X над U

$\boxed{\text{Определение}}$ $X \in Spc$. Сопоставим X симплициальный объект в категории пучков, т.е., в Spc

Δ: $Ob(\Delta) = \{[n]\}_{n\geq 0}$ $\quad [n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$

$Mor_{\Delta}([m],[n]) = \{$отображения $[m] \to [n]$, уважающие порядок$\}$ = неубывающие

<u>Симплициальный объект</u> в категории C = функтор $\Delta^{op} \to C$

$SSets = Func(\Delta^{op}, Sets)$

$F \rightsquigarrow F_m := F([m])$ – <u>множество m-симплексов</u>

$\varphi: [m] \to [n] \rightsquigarrow F_n \xrightarrow[\varphi^*]{F(\varphi)} F_m$

Например, $[n-1] \overset{\partial_i}{\hookrightarrow} [n] \rightsquigarrow F_{n-1} \xleftarrow{d_i = \partial_i^*} F_n$ – грань

$\boxed{\text{Определение}}$ $\Delta^n_k := \{(x_0, \dots, x_n) \mid \sum x_i = 1\} \subset \mathbb{A}^{n+1}$

<u>Косимплициальный объект</u> в категории C = функтор $\Delta \to C$

$\boxed{\text{Пример}}$ $\Delta^\bullet_k: \Delta \to Sm/k \hookrightarrow Spc$

$$\begin{tikzcd} {[n]} \arrow[r, mapsto] & \Delta^n_k \\ {[n-1]} \arrow[u, hook, "\partial^i"] \arrow[r, mapsto] & \Delta^{n-1}_k \arrow[u] \end{tikzcd}$$
– вложение в гиперплоскость $\{x_i = 0\}$

Наконец, сопоставим каждому $U \in Sm/k$ симплициальное мн-во

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, mapsto] & Mor_{Spc}(\Delta^n_k \times U, X) \arrow[d, "d_i"] \\ & Mor_{Spc}(\Delta^{n-1}_k \times U, X) \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} \Delta^n_k \times U \arrow[r, "\text{в } Spc"] & X \\ \Delta^{n-1}_k \times U \arrow[u, hook, "\partial^i \times id"] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Получаем функтор

$$\Delta^{op} \xrightarrow{Sing(X)} Spc$$

$[n] \longmapsto Sing_n(X)$: $U \longmapsto Mor_{Spc}(\Delta^n_k \times U, X)$ – пучок!

$\| $ – л. Йонеды

$X(\Delta^n \times U)$

$Y \in Sm(k)$

$\boxed{\text{Лемма}}$ Пусть X — пучок множеств в топологии Нисневича. Тогда $\forall Y \in Sm(k)$ предпучок $\underline{U \longmapsto X(Y \times U)}$ является пучком

$\underline{Hom}(Y, X)$:

$$Map(U, \underline{Hom}(Y,X)) = Map(Y \times U, X)$$
$$(\underline{Hom}(Y,X))(U) \qquad X(Y \times U)$$

$\boxed{\text{Док-во}}$ Пусть

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, hook] \arrow[d] & S' \arrow[d, "\pi"] \\ V \arrow[r, hook, "i"] & S \end{tikzcd}$$

— элементарный квадрат Нисневича

Нам достаточно проверить, что квадрат

$$\begin{tikzcd} X(Y \times V') & X(Y \times S') \arrow[l] \\ X(Y \times V) \arrow[u] & X(Y \times S) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

декартов

Но он возникает из применения X к элементарному квадрату Нисневича

$$\begin{tikzcd} Y \times V' \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \times S' \arrow[d] \\ Y \times V \arrow[r, hook] & Y \times S \end{tikzcd}$$

$\to$ он действительно декартов

$\square$

т.е. $Sing_n(X) = \underline{Hom}(\Delta^n_k, X)$