22.10.2012

И.А. Панин

Напомним, что $Spc = Sh_{Nis}(Sm/k)$

X гладкое, если $\forall x \in X$ $\mathcal{O}_{X,x}$ регулярно (это если $\mathrm{char}\, k = 0$)

$d = \underset{\text{размерность Крулля}}{\dim}\, \mathcal{O}_{X,x}$; регулярность $\Leftrightarrow \overset{\text{макс. идеал}}{\mathfrak{m}_x}$ порождается ровно d элементами

Для того, чтобы определить гомотопическую категорию, нужно указать корасслоения, слабые эквивалентности и расслоения

$$X \xrightarrow{f} Y$$

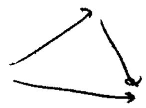
Co W Fib

— на самом деле, достаточно W — и потом рассмотреть $Spc[W^{-1}]$:

$$\begin{tikzcd}
Spc \arrow[d, "l"'] \arrow[dr, "\forall G:\ \forall w\in W\ G(w)\text{ — изоморфизм}"] & \\
Spc[W^{-1}] \arrow[r, dashed, "G'"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

$\exists !$ функтор: эта диаграмма коммутативна

В абстрактной категории $\mathcal{C}'$ можно взять систему морфизмов W'

т.ч.  — если какие-то 2 из W', то и третий из W'

В прошлый раз мы определили $\Delta^n_k = \{(x_0, \dots, x_n) \mid \sum x_i = 1\} \subset \mathbb{A}^{n+1}_k$

$\Delta^{n-1}_k \xhookrightarrow{d^i} \Delta^n_k$ — вложение в гиперплоскость $x_i = 0$

В топологии для пр-ва X есть $Sing_*(X)$ (симплициальное множество)

$Sing_n(X) = Map(\Delta^n_{top}, X)$

Аналог этого у нас:

$X \in Spc \rightsquigarrow Sing_*(X): \Delta^{op} \longrightarrow Spc$

где Δ — категория с объектами $[0], [1], [2], \dots,$ $[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$

$Mor_\Delta([m],[n]) = \left\{\begin{array}{l}\text{монотонные} \\ \text{отображения} \\ [m] \to [n]\end{array}\right\}$

Теперь положим

$\underbrace{Sing_n(X)}_{\in Spc}(U) = Mor_{Spc}(\Delta^n \times U, X)$

$\boxed{\text{Опр.}}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Sing}_n(X)(U) = \mathrm{Mor}_{Spc}(\Delta^n\times U, X) \arrow[d, "d_i"] \\
\mathrm{Sing}_{n-1}(X)(U) = \mathrm{Mor}_{Spc}(\Delta^{n-1}\times U, X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Delta^n\times U \arrow[r, "f"] & X \\
\Delta^{n-1}\times U \arrow[u, "d^i"] \arrow[ur, "f\circ d_i = d_i(f)"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\rightsquigarrow$ получаем $\mathrm{Sing}_*(X) : \Delta^{op} \longrightarrow Spc$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $\forall\, U \in Sm/_k$ $\quad \mathrm{Sing}_*(X)(U)$ — симплициальное множество

$\boxed{\text{Замечание}}$ Если мы берем симплициальное множество Y

$$\pi_i(Y, y) = [(S^i_{\text{симпл}}, s), (Y, y)]$$

гомотопич. классы отображений

s — отмеченная точка

как в гомологической алгебре?

$$\pi_i \longleftrightarrow \mathrm{Hom}^i_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, A)$$

нужно заменить A на инъективную резольвенту (т.е., расслоенный объект)

$$= \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, A)$$

$$A \xrightarrow{\sim} I^\bullet \rightsquigarrow H^i(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, I^\bullet))$$

правильное понимание Hom^i

в симплициальной науке так же:

$S^i_{\text{симп}}$ — корасслоенный объект, а Y нужно заменить на расслоенный

Пусть $\mathcal{C}$ — категория

$$\mathrm{Co}(\mathcal{C}) \qquad W(\mathcal{C}) \qquad \mathrm{Fib}(\mathcal{C})$$

$$\varnothing \rightarrowtail X \qquad\qquad X \twoheadrightarrow *$$

Возьмем полную категорию в $\mathcal{C}$, состоящую из корасслоенных объектов.

$X \in \mathrm{Co}(\mathcal{C})$

$Y \in \mathrm{Co}(\mathcal{C})$

$$
\begin{tikzcd}
 & I \\
X \arrow[ur] & \\
 & Y \arrow[uu, "\wr w"']
\end{tikzcd}
$$

— такой домик представляет морфизм в $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$

симметричное:

X', Y' $\mathrm{Fib}(\mathcal{C})$ $\rightsquigarrow$

$$
\begin{tikzcd}
X'' \arrow[d, "w\wr"'] \arrow[dr] & \\
X' & Y'
\end{tikzcd}
$$

— такой домик представляет морфизм в $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$

$(Co\cap Fib)(\mathcal{C})$: любой морфизм представляет морфизм в $Ho(\mathcal{C})$

$A, B \in Co\cap Fib$

$\downarrow$

$$Mor_{Ho(\mathcal{C})}(A,B) = Mor_{\mathcal{C}}(A,B)/_{\text{"}\sim\text{"}}$$

порождено „наивными“ гомотопиями

(см. Квиллен, Гомотопическая алгебра)
Quillen, Homotopical algebra

стандартный симплициальный симплекс:

$$\Delta^n_s : \Delta^{op} \longrightarrow Sets.$$
$$[k] \longmapsto Map_{\Delta}([k],[n])$$

грани $d^i: \Delta^{n-1}_s \to \Delta^n_s$

граница

① $\bigcup_{i=0}^{n} d^i(\Delta^{n-1}_s) =: \partial(\Delta^n_s)$ — симплициальное подмн-во

② $\Lambda^n_k \xhookrightarrow{i^n_k} \Delta^n_s := \bigcup_{i\neq k} d^i(\Delta^{n-1}_s) \xhookrightarrow{i^n_k} \Delta^n_s$

Пусть $Y \in SSet$. Хотим построить

$$Y \longrightarrow Ex^{\infty}(Y)$$

оно будет расслоенным

$$A_Y := \left\{ \begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r, hook, "i^n_k"] \arrow[dr, "f"'] & \Delta^n \\ & Y \end{tikzcd} \right\}$$

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\alpha\in A_Y} \Lambda^n_k \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, hook, "i^n_k"] & Y \arrow[d, hook] \\ \coprod_{A_Y} \Delta^n_k \arrow[r] & Ex^1(Y) \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $Ex^{\infty}(Y) = (Ex^1 \circ Ex^1 \circ \ldots \circ Ex^1)(Y)$ // точнее: $Ex^r(Y) = (\underbrace{Ex^1 \circ \ldots \circ Ex^1}_{r})(Y)$

правильно: $Ex^{\infty}(Y) \overset{\mathbb{N}}{:=} \underset{\overrightarrow{r}}{colim}\, Ex^r(Y)$

$\boxed{\text{Замечание}}$

$$\begin{tikzcd} \Delta^n_k \arrow[r, "\forall g"] \arrow[d, hook, "i^n_k"] & Ex^{\infty}(Y) \arrow[d] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{g}"] & * \end{tikzcd}$$

Определение расслоенного в SSets:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\forall"] \arrow[d, "\text{слаб. экв.}"'] & \tilde{Z} \arrow[d] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & Z \end{tikzcd}$$

если на геометрических реализациях это слабая эквивалентность

расслоение Кана: достаточно проверять случай $\Delta^n_k \hookrightarrow \Delta^n$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пространство $X \in Spc$ называется <u>почти расслоенным</u>, если $\forall j: V \hookrightarrow U$ гладких многообразий

открытое вложение

соответствующий морфизм симплициальных множеств

$$Sing_*(X)(U) \longrightarrow Sing_*(X)(V)$$

является <u>расслоением Кана</u>

$\boxed{\text{Цель}}$ $\forall Y \in Spc$ построить стрелку

$$Y \longrightarrow Ex^{\infty}(Y),$$

где $Ex^{\infty}(Y)$ — почти расслоенный

$j: V \hookrightarrow U$, $U, V \in Sm/_k$

$i^n_k: \Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n$ (в Δ^{op}-Spc)

над полем k

$$A_Y = \left\{ \begin{array}{c} \Lambda^n_k \\ \downarrow \\ \Delta^n \end{array} ; j: V \hookrightarrow U, f: U \times |\Lambda^n_k| \bigcup_{V \times |\Lambda^n_k|} V \times |\Delta^n| \longrightarrow Y \right\}$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Δ^{op}-$Spc \xrightarrow{|\cdot|} Spc$

$$\Delta^n \longmapsto h^{\Delta^n} = \Delta^n$$

За счет наличия всех копределов в Spc этот функтор продолжается на весь Δ^{op}-Spc

→ это <u>геометрическая реализация</u>

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, dashed, "\tilde{F}"] & C \\ A \arrow[u] \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

C — все копределы

левое расширение Кана

Каноническая диаграмма

$$\begin{tikzcd} \coprod\limits_{\alpha \in A_Y} U \times |\Lambda^n_k| \bigcup\limits_{V \times |\Lambda^n_k|} V \times |\Delta^n| \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, hook] \\ \coprod\limits_{\alpha \in A_Y} U \times |\Delta^n| \arrow[r] & Ex^{1}(Y) \end{tikzcd}$$

$V = \varnothing$, $U = *$

→ получим то же самое, что было для $SSets$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $Ex^{r}(Y) := \underbrace{(Ex^{1} \circ \ldots \circ Ex^{1})}_{r \text{ раз}}(Y)$, $Ex^{\infty}(Y) := \varinjlim Ex^{r}(Y)$

$\boxed{\text{Замечание}}$ Вернемся к случаю симплициальных множеств.

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^n_k \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & Ex^\infty(Y) \arrow[d] \\
\Delta^n \arrow[r, hook] \arrow[ur, dashed, "?"] & *
\end{tikzcd}$$

$Im(g) \subseteq Ex^r(Y)$

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d] & Ex^r(Y) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\Delta^n \arrow[r] \arrow[rr, dashed, bend right, "\exists \hat{g}"'] & * & Ex(Ex^r(Y))
\end{tikzcd}$$

$\exists \hat{g}$ – ее и возьмем

$\boxed{\text{Замечание}}$ По таким же причинам $Ex^\infty(Y)$ для $Y \in Spc$ является почти расслоенным объектом

Пусть $Y \in Spc$, $U \in Sm/k$. $y : U \longrightarrow Y \longrightarrow Ex^\infty(Y)$

т.е. $y \in Sing_0(Y)(U) \overset{def}{=\!=} Mor_{Spc}(\Delta^0 \times U, Y) = Mor_{Spc}(U, Y) = Y(U)$

$\boxed{\text{Определение}}$ Гомотопическая „группа" (симплиц. мн-во)

$$\pi^{\mathbb{A}^1}_{i,U}(Y, y) := \pi_i(Ex^\infty(Y)(U), y)$$

$= \pi_i$(геом. реализации)

$\boxed{\text{Опр.}}$ $f : X \longrightarrow Y$ – морфизм в Spc – называется <u>$\mathbb{A}^1$-слабой эквивалентностью</u>, если $\forall U \in Sm/k$ $\forall x \in Mor_{Spc}(U, X)$ $\forall i \geqslant 0$ отображение

$$\pi^{\mathbb{A}^1}_{i,U}(X, x) \longrightarrow \pi^{\mathbb{A}^1}_{i,U}(Y, f(x)) \quad \text{биективно}$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $H^{\mathbb{A}^1}(k)$ – $\mathbb{A}^1$-гомотопическая категория гладких k-многообразий – это категория $Spc[W^{-1}]$

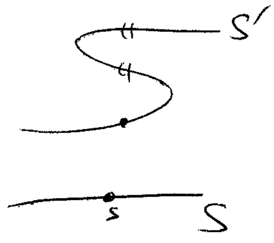
(W – $\mathbb{A}^1$-слабые эквивалентности)

Модельная структура (инъективная) на Spc:

$Co(Spc)$ = все инъективные морфизмы пространств (инъективные послойно)

$W(Spc)$ = $\mathbb{A}^1$-слабые эквивалентности

$Fib(Spc)$ – задаются свойством подъема



— окрестность Нисневича

→ можно определить слой пучка в точке:

$$\mathcal{O}^h_{S,s} = \varinjlim k[S']$$

Свойство подъёма

$$\begin{tikzcd}
\forall A \arrow[r, "\forall g"] \arrow[d, "\mathbb{A}^1\text{-экв.}"'] & \tilde{Z} \arrow[d] \\
\forall B \arrow[r, "\forall"] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{g}"] & Z
\end{tikzcd}
\quad \left(\tilde{Z} \to Z\right) \in \mathrm{Fib}(Spc)$$

$\Longleftrightarrow$ $\forall A, B$ и квадрата $\exists \tilde{g}$

Гомотопическая категория, построенная по этой модельной структуре, совпадает с $H^{\mathbb{A}^1}(k)$