29.10.2012

И.А.Панин

Напомним, что $Spc = Spc(k) = Sh_{Nis}(Sm/k)$

Мы определили <u>почти расслоенные пространства</u>

— это такое $X \in Spc$, что $\forall\ V \xhookrightarrow[\text{откр. по Зарисскому}]{} U$

$$\begin{tikzcd} Sing_*(X)(U) \arrow[d] \\ Sing_*(X)(V) \end{tikzcd}$$

— расслоение Кана

В частности, в условие почти расслоенности входит

$\emptyset \hookrightarrow U \rightsquigarrow Sing_*(X)(U) \longrightarrow Sing_*(X)(\emptyset) = *$

— расслоение Кана

$\rightsquigarrow Sing_*(X)(U)$ — расслоенное симплициальное множество

Далее мы описали конструкцию, которая по $X \in Spc$ строит пространство $Ex^\infty(X)$ — почти расслоенное — вместе со стрелкой

$X \longrightarrow Ex^\infty(X)$

$\boxed{\text{Определение}}$ $i \geq 0$

$U \longmapsto \pi_{i,U}^{\mathbb{A}^1}(X, x) = \cancel{\pi_i(Ex^\infty(X)(U)}$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "x"] \arrow[rd, dashed] & X \arrow[d] \\ & Ex^\infty(X) = Sing_0(Ex^\infty(X)) \end{tikzcd}$$

на самом деле: $\pi_i(Sing_*(Ex^\infty(X))(U), x)$

$\mathcal{Y} = Spc \rightsquigarrow \mathcal{Y} = Sing_0(\mathcal{Y})$

(поскольку $Sing_0(\mathcal{Y})(U) = Mor(\Delta^0 \times U, \mathcal{Y}) = Mor(U, \mathcal{Y}) = \mathcal{Y}(U)$)

$\boxed{\text{Опр.}}$ $f: X \longrightarrow \mathcal{Y}$ — <u>слабая $\mathbb{A}^1$-эквивалентность</u>, если $\forall U \in Sm/k$

$\forall x: U \longrightarrow X \quad \forall i \geq 0 \quad \pi_{i,U}^{\mathbb{A}^1}(X, x) \longrightarrow \pi_{i,U}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y}, f(x))$ — изоморфизм

Пусть W — класс $\mathbb{A}^1$-эквивалентностей в Spc

C — класс всех мономорфизмов в Spc

F — класс тех $f: \mathcal{Y} \longrightarrow X$, которые имеют right lifting property по отношению ко всем $i: i \in W \cap C$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"'] & \mathcal{Y} \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] \arrow[ru, dashed] & X \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (C, W, F) — модельная структура на Spc.

Определение $H^{\mathbb{A}^1}(k) := Spc[W^{-1}]$

Определение — Напоминание

Если (C, W, F) — модельная структура на $\mathcal{C}$, то
объект X называется <u>корасслоенным</u>, если $\varnothing \longrightarrow X$ — корасслоение
объект Y называется <u>расслоенным</u>, если $Y \longrightarrow *$ — расслоение
(пишем просто $X \in C$ и $Y \in F$)

Отступление Пусть $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ — морфизм в Spc

$X \in Spc$. Желаем сказать, что такое росток X на многообразии U в точке $u \in \mathcal{U}$. Пусть сначала u — замкнутая точка.

Рассматриваем $\{(U', \pi', s') \mid \pi' \circ s' = i\}$
+ π' — этален

$$\begin{tikzcd}
 & U' \arrow[d, "\pi'"'] & \\
 & U & u \arrow[l, "i"] \arrow[ul, "s'"'] \arrow[dl] \\
 & U'' \arrow[u] \arrow[uu, bend left=60, "\rho"] &
\end{tikzcd}$$

(U'', π'', s'') $\longrightarrow$ это $\rho : U'' \longrightarrow U'$ т.ч. $\pi' \circ \rho = \pi''$, $\rho \circ s'' = s'$

получили категорию $Neib_{\mathcal{U}}(u)$

Лемма $\forall (U', \pi', s') \in Neib_{\mathcal{U}}(u)$
$(U'', \pi'', s'') \in$
$\exists (\mathcal{U}''', \pi''', s''')$ и морфизмы

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathcal{U}''', \pi''', s''') \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(U'', \pi'', s'') & & (\mathcal{U}', \pi', s')
\end{tikzcd}$$

<u>Док-во:</u> $\mathcal{U}''' := \mathcal{U}'' \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}'$ $\quad u \hookrightarrow U'' \times U''$, $\;= (s'', s')$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U}''' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{U}'' & & \mathcal{U}'
\end{tikzcd}$$

Определение $\varprojlim\limits_{\substack{\alpha = (U', \pi', s') \\ \in Neib_U(u)}} \mathcal{U}' =: U^h_u$ — <u>гензелизация</u> U в точке u

$U^h_u = Spec\left(k[\mathcal{U}]^h_u\right)$

$$\begin{tikzcd}
k[\mathcal{U}'] \arrow[dr] & \\
k[\mathcal{U}] \arrow[u] \arrow[r] & k(u)
\end{tikzcd}$$

$\longrightarrow \varinjlim k[\mathcal{U}'] =: k[\mathcal{U}]^h_u$ — локальное нетерово кольцо с полем вычетов $k(u)$

Замечание $x \in \mathcal{U}$ — замкнутая точка (неприводимо)

$\rightsquigarrow k[U]^h_x$ как k-алгебра зависит только от k-алгебры $k(x)$
и имеет размерность $\dim U$

$\rightsquigarrow U$ можно заменить на $\mathbb{A}^d_{k(x)}$, а точку x на $(0,0,\dots,0) \in \mathbb{A}^d_{k(x)}$

то есть, $k[U]^h_x \cong k(x)[t_1,\dots,t_d]^h_{(0,0,\dots,0)}$

// гензелизация — это алгебраический аналог пополнения
// в отличие от пополнения, гензелизация коммутирует с локализацией

Пусть $\eta \in \mathcal{U}$ — общая точка: $k[U] \hookrightarrow k(\mathcal{U})$

$$\mathcal{U} \xleftarrow{\eta} \mathrm{Spec}(k(U))$$

Как построить U^h_u для какой-нибудь u?

① заменить (U, u) на $(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{U,u}), u)$

② взять $(\mathcal{O}_{U,u})^h_u$

Проделаем это для $u = \eta$:

① $(U,\eta) \rightsquigarrow (\mathrm{Spec}(k(U)), \overset{\mathrm{id}}{\mathrm{Spec}}(k(U)))$

② $k(U) \xrightarrow{\sim} k(U)$; $\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} k(U)' \arrow[dr] & \\ k(U) \arrow[u] \arrow[r, "\sim"'] & k(U) \end{tikzcd}$$

$k(U)' = \coprod k(U)_i$ — сепарабельная алгебра, где $k(U)_i / k(U)$ — конечное сепарабельное расширение полей

это должна быть проекция на один сомножитель

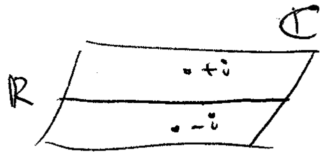
Покажем, что $U^h_\eta = \mathrm{Spec}(k(U))$

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} k(U)_i \arrow[r] & k(U) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ k(U) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, bend left] & k(U) \end{tikzcd}$$

т.е.
$$\begin{tikzcd} k(U) \arrow[dr] & \\ k(U) \arrow[u] \arrow[r] & k(U) \end{tikzcd}$$
— финальный объект.

$\Rightarrow k[U]^h_\eta = k(U)$

Пример $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$



$\{\pm i\} \leftarrow (t^2+1) \trianglelefteq \mathbb{R}[t]$

① Замкнутая точка x_1 с $\mathbb{R}(x_1) = \mathbb{R}$

② Замкнутая точка x_2 с $\mathbb{R}(x_2) = \mathbb{C}$

③ Общая точка $\eta \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ с $\mathbb{R}(\eta) = \mathbb{R}(t)$

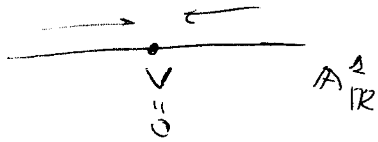
Гензелизации: $\mathcal{O}^h_{\mathbb{A}^1, x_1} \cong \mathbb{R}[t]^h_{(0)}$, $\mathcal{O}^h_{\mathbb{A}^1, x_2} \cong \mathbb{C}[t]^h_{(0)}$, $\mathcal{O}^h_{\mathbb{A}^1, \eta} \cong \mathbb{R}(t)$

в точке 0

<u>Общий случай</u> Пусть $Z \hookrightarrow U$ — неприводимое подмногообразие коразмерности r, $z \hookrightarrow Z$ — его общая точка. Тогда

$$\mathcal{O}^h_{U,z} \overset{k}{\cong} k(Z)[t_1,\dots,t_r]^h_{(0,0,\dots,0)}$$

$\boxed{\text{Замечание}}$



$\mathbb{R}(u) = \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} = \mathbb{R}(u) & \mathbb{R}[U] \arrow[l] \arrow[r] & \mathbb{R} \\ & \mathbb{R} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

это была бы ретракция

если в U есть вещ. точка

→ есть ретракция прямой на эту точку

→ ретракции быть не может

а для хензелизации ретракция есть:

Итак, пусть $\mathcal{F} \in Spc$. Хотим определить $\mathcal{F}_{U,u}$ для $U \in Sm/k$, $u \in U$ (схемная точка).

Положим $\mathcal{F}_{U,u} := \varinjlim\limits_{(U',u',s') \in Neib_U(u)} \mathcal{F}(U')$ (вульгарно — $\mathcal{F}_u$)

$\boxed{\text{Лемма}}$ $f: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ — морфизм в Spc. Тогда f изоморфизм $\Longleftrightarrow$ $\forall U \in Sm/k$ $\forall u \in U$

$f_{U,u}: \mathcal{F}_{U,u} \longrightarrow \mathcal{G}_{U,u}$ — биекция

Аналогично для мономорфизма, эпиморфизма.

Если $\mathcal{F} = h^Y$, то понятно, что такое $\mathcal{F}_{U,u}$.

Пусть теперь $f: X \longrightarrow Y$ — морфизм в Spc.

<u>Вопрос:</u> как в терминах ростков чего-то сказать, что f — $\mathbb{A}^1$-эквивалентность? $x: U \longrightarrow X$

Предпучки
$$U \longmapsto \pi^{\mathbb{A}^1}_{i,U}(X, x)$$
$$U \longmapsto \pi^{\mathbb{A}^1}_{i,U}(Y, f(x))$$
f_*

Хочется <u>ответ</u>: если f_* на ростках в топологии Нисневича — биекция $\forall i, \forall x$, то f — $\mathbb{A}^1$-эквивалентность

$$\begin{tikzcd}
 & U' \arrow[dl, "x\circ\pi'"'] \arrow[d, "\pi'"] & \\
X & U \arrow[l, "x"'] & u \arrow[l, hook'] \arrow[ul, "s'"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\pi_{i,u}^{\mathbb{A}^1}(X, x) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_{i,u'}^{\mathbb{A}^1}(X, x\circ\pi') \arrow[d, equal] \\
\pi_i(\mathrm{Sing}_*(Ex^\infty(X))(U), x) \arrow[r, "(s')^*"'] & \pi_i(\mathrm{Sing}_*(Ex^\infty(X))(U'), x\circ\pi')
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ переходим к $\underrightarrow{\lim}$:

$\pi_{i,U_u^h}^{\mathbb{A}^1}(X, x)$ – „росток" $\pi_i^{\mathbb{A}^1}$ в точке u

$$\pi_{i}^{\mathbb{A}^1}{}_{U_u^h}(X, x) \xrightarrow{f_*^{U,u}} \pi_{i,U_u^h}^{\mathbb{A}^1}(Y, f(x))$$

$\boxed{\text{Утверждение}}$ $f: X \longrightarrow Y$ – $\mathbb{A}^1$-эквивалентность, если $\forall\, U \in Sm/k$ $\forall\, x: U \longrightarrow X$ $\forall\, i$ $\forall\, u \in U$ $f_*^{U,u}$ – биекция