И.А. Панин

см. статью Morel, Voevodsky в Publ. IHES, 1999 „unstable $\mathbb{A}^1$-homotopy theory"

$[S^i_s \wedge X_+, \mathbb{Z}\times \underbrace{Gr(\infty, 2\infty)}] \cong K_i^Q(X)$ – там доказано

$\boxed{X \in Sm/k}$ где $Gr := Gr(\infty, 2\infty) = \bigcup\limits_{n\geq 0} Gr(n, 2n)$

$$\mathbb{Z}\times Gr := \coprod_{n\in\mathbb{Z}} Gr$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{2n} & \hookrightarrow & \mathbb{A}^{2n+2} \\ \cup & & \cup \\ W & \longmapsto & (W \oplus e_{2n+1}\mathbb{A}^1) \end{array}$$

$\mathbb{G}_m := \mathbb{A}^1 - 0$

$$B\mathbb{G}_m = \underbrace{|n \longmapsto \underbrace{\mathbb{G}_m\times\dots\times\mathbb{G}_m}_{n}|}_{\text{симплициальное пространство}}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $B\mathbb{G}_m \cong \mathbb{P}^\infty$, в $H^{\mathbb{A}^1}(k)$

где $\mathbb{P}^\infty = \bigcup\limits_{n\geq 0}\mathbb{P}^n$

$\boxed{\text{Комментарий}}$ к теореме:

„Подставим" комплексные точки в этот изоморфизм:

$$BS^1 \cong \mathbb{CP}^\infty$$

„Подставим" вещественные точки:

$$B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{RP}^\infty$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $BGL_r \underset{\text{в } H^{\mathbb{A}^1}(k)}{\cong} Gr(r, \mathbb{A}^\infty)$

$BGL_r = |n \mapsto \underbrace{GL_r\times\dots\times GL_r}_{n}|$, $\quad Gr(r, \mathbb{A}^\infty) = \bigcup\limits_{s\geq r} Gr(r, \mathbb{A}^s)$

это тот же грассманиан

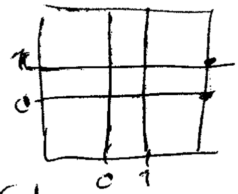
$\boxed{\text{Следствие}}$ $BGL \underset{\text{в } H^{\mathbb{A}^1}(k)}{\cong} Gr \cong \bigcup\limits_{r} Gr(r, 2r)$

$BGL = \bigcup\limits_{r\geq 0} BGL_r$, $\quad Gr = \bigcup\limits_{r\geq 0} Gr(r, \mathbb{A}^\infty)$

$\Rightarrow \mathbb{Z}\times BGL \cong \mathbb{Z}\times Gr \Rightarrow [S^1_s \wedge (X_+), \mathbb{Z}\times BGL] = K_i^Q(X)$

Напоминание: $S^1_s = \mathbb{A}^1/\{0,1\}$ — пространство с отмеченной точкой s

$\rightsquigarrow$ можно рассмотреть $\underbrace{(S^1, s)\wedge\ldots\wedge(S^1, s)}_{i \text{ раз}} =: S^i_s$

$S^2_s =$ 

Для любой замкнутой алгебраической подгруппы $G \hookrightarrow GL_n$ (то есть, для линейной группы) имеется классифицирующее пространство $(BG)_{et}$ группы G, которое обладает приятными свойствами:

1. $(BG)_{et}(\mathbb{C}) \simeq B(G(\mathbb{C}))$.

гомотопич. экв-сть

2. $(BG)_{et}(\mathbb{R}) \simeq B(G(\mathbb{R}))$

3. $\exists$ „явная" геометрическая конструкция BG как $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$, где X_i — гладкие многообразия, I — направленная система индексов и для $j>i$ $X_i \hookrightarrow X_j$

$\boxed{k=\mathbb{C}}$ Есть функтор $Spc/_{\mathbb{C}} \longrightarrow CW$ — „геометрическая реализация"

$$\Delta^n_{\mathbb{C}} \longmapsto \Delta^n_{top}$$

$$\begin{array}{c} U \longmapsto U(\mathbb{C})_{top} \\ \Uparrow \\ Sm/\mathbb{C} \end{array}$$

согласуется с индуктивными пределами хороших (корасслоенных) объектов

$$\bigcup_{i\in I} X_i \longmapsto \bigcup_{i\in I} X_i(\mathbb{C})_{top}$$

$\rightsquigarrow$ поэтому равенства (1) и (2) выше почти тавтологичны

Итак, мы построили $Spc(k)$ и $H^{\mathbb{A}^1}(k)$ вместе с функтором $Spc(k) \longrightarrow H^{\mathbb{A}^1}(k)$.

Теперь желаем рассмотреть $Spc_\bullet(k)$ и

$$\begin{array}{c} Spc_\bullet(k) \\ \downarrow \\ H^{\mathbb{A}^1}_\bullet(k) \end{array}$$

$pt = Spec(k) \in Spc$

$\boxed{\text{Определение}}$ Пунктированное мотивное пространство — это пара (X, x), $X \in Spc$, $x: pt \to X$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$, $0 \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ — отмеченная точка,

а $\{\pm i\} = (t^2+1) \trianglelefteq \mathbb{R}[t]$ — не отмеченная точка

Имеется забывающий функтор
$$\begin{aligned} Spc_\bullet &\xrightarrow{For} Spc \\ (X,x) &\longmapsto X \end{aligned}$$

и функтор $+ : Spc \longrightarrow Spc_\bullet$ — левый сопряженный к For
$$Y \longmapsto (Y \amalg pt, pt)$$

Определим модельную структуру на $Spc_\bullet$:

$$C_\bullet = Cof(Spc_\bullet) = \left\{ f : (Y,y) \longrightarrow (X,x) \,\middle|\, (For(f) : Y \longrightarrow X) \in Cof, \text{ т.е } Y \to X \text{ — мономорфизм} \right\}$$

$$F_\bullet = Fib(Spc_\bullet) = \{ f : (Y,y) \longrightarrow (X,x) \mid (For(f) : Y \longrightarrow X) \in Fib \}$$

$$W_\bullet = W(Spc_\bullet) = \{ f \mid For(f) \text{ — } \mathbb{A}^1\text{-слабая эквивалентность} \}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (простая). $(C_\bullet, W_\bullet, F_\bullet)$ — модельная структура на $Spc_\bullet$

$\boxed{\text{Определение}}$ $H^{\mathbb{A}^1}_\bullet(k) = Spc_\bullet[W_\bullet^{-1}]$

$\boxed{\text{Определение}}$ $(X,x) \in Spc_\bullet$

$U \longmapsto \pi_i^{\mathbb{A}^1}(X,x)(U)$ — предпучок на Sm/k

$x : pt \longrightarrow X$ $\rightsquigarrow$ в каждом $X(U)$ есть отмеченная точка:

$$\rightsquigarrow \begin{array}{ccc} Mor(U,x) & \longrightarrow & Mor(U,X) \\ \| & & \| \\ * & & X(U) \end{array}$$

Обозначим этот предпучок через $\underline{\pi}_i^{\mathbb{A}^1}(X,x)$

$\boxed{\text{Определение}}$ $a\underline{\pi}_i^{\mathbb{A}^1}(X,x)$ — ассоциированный с ним пучок Нисневича

Заметим, что канонический морфизм
$$\underline{\pi}_i^{\mathbb{A}^1}(X,x) \longrightarrow a\underline{\pi}_i^{\mathbb{A}^1}(X,x) \text{ — биекция на ростках}$$

~~Определение~~ $\boxed{\text{Разговор про } \pi_0}$

Имеется функтор $\pi_0 : Spc \longrightarrow PreSets(Sm/k)$

$X \in Spc$, $U \in Sm/k$ $\rightsquigarrow$ $U \longmapsto \pi_0(Sing_*(Ex^\infty(X))(U))$

Определение $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(X)$ — описанный выше предпучок множеств

$a\pi_0^{\mathbb{A}^1}(X)$ — ассоциированный с ним пучок Нисневича

Определение $X \in Spc$ называется $\mathbb{A}^1$-<u>связным</u>, если $a\pi_0^{\mathbb{A}^1}(X)$ — постоянный пучок pt.

Теорема „Уайтхеда"

Пусть $f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ — морфизм в $Spc_\bullet$ $\mathbb{A}^1$-связных пространств

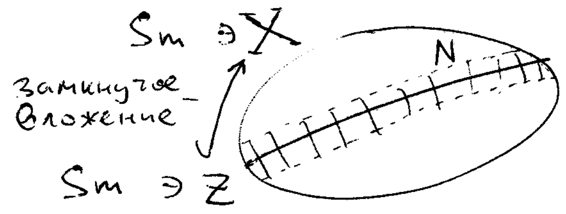
Тогда следующие условия эквивалентны:

1. f — $\mathbb{A}^1$-эквивалентность в $Spc_\bullet$
2. $\forall i \geq 0$ морфизм предпучков $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(X, x) \longrightarrow \pi_i^{\mathbb{A}^1}(Y, y)$ является изоморфизмом
3. $\forall i > 0$ морфизм пучков $a\pi_i^{\mathbb{A}^1}(X, x) \longrightarrow a\pi_i^{\mathbb{A}^1}(Y, y)$ является изоморфизмом.

Пример $\{x^3 + y^3 + z^3 = 0\} = E \subseteq \mathbb{P}^2_k$ в $H^{\mathbb{A}^1}(k)$, $k \subseteq \mathbb{R}$

$\rightarrow E(\mathbb{R}) =$  $\subseteq \mathbb{R}P^2$

$\rightarrow$ видимо, E не $\mathbb{A}^1$-связно



В дифференциальной топологии:

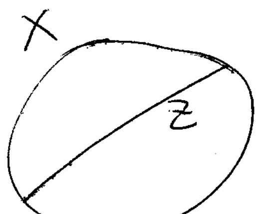
$$\frac{X}{X - \mathring{N}} = \frac{N}{\partial(N)}$$

В Spc:

$$\frac{X}{X - Z} \qquad \frac{N_{X/Z}}{N_{X/Z} - s(Z)} =: Th(N_{X/Z})$$

пространство Тома

где $s : Z \hookrightarrow N_{X/Z}$ — нулевое сечение



Теорема В $H^{\mathbb{A}^1}(k)$ имеется канонический изоморфизм

$$\frac{X}{X - Z} \cong \frac{N_{X/Z}}{N_{X/Z} - i(Z)}$$

$\boxed{\text{Одна конструкция}}$

(деформация к нормальному конусу)

Мы построим следующую диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^1 & 1 \arrow[l, hook'] \\
N_{X/Z} = N \arrow[u] \arrow[r, hook, "k_0"] & X_t \arrow[u, "p_t"] & X \arrow[u] \arrow[l, hook', "k_1"'] \\
Z \arrow[u, hook, "i_0 = s"] \arrow[r, hook, "j_0"] & Z_t \arrow[u, hook, "i_t"] & Z \arrow[u, hook, "i_1 = i"'] \arrow[l, hook', "j_1"']
\end{tikzcd}
$$

все квадраты декартовы

i — исходное вложение

$$
\frac{N}{N-Z} \xhookrightarrow{\overline{k_0}} \frac{X_t}{X_t - Z_t} \xhookleftarrow{\overline{k_1}} \frac{X}{X-Z}
$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\overline{k_0}, \overline{k_1}$ — изоморфизмы в $H^{\mathbb{A}^1}(k)$