12.11.2012

И. А. Панин

$X \in Sm/k$

Определение E/X – векторное расслоение

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ Spc}}{Th_X(E)} = E/(E - s(X)), \quad \text{где} \quad s : X \hookrightarrow E \text{ – нулевое сечение}$$

пространство Тома – с отмеченной точкой $* = E-s(X)/E-s(X)$

В частности, $Th(\mathbb{A}^n) := \mathbb{A}^n/(\mathbb{A}^n - \{0\})$

Лемма $Th_X(E) \wedge Th_Y(F) \cong Th_{X\times Y}(E\times F)$

Определение $(S,s), (T,t) \in Spc_\bullet$

$$\rightsquigarrow (S,s)\wedge(T,t) \overset{def}{=} S\times T/(S\times\{t\} \vee \{s\}\times T).$$

Д-во Леммы

$$E - X \hookrightarrow E$$

$$\begin{tikzcd}
F-y \arrow[d, hook] & (F-y)\times(E-X) \arrow[r, hook] \arrow[d] & (F-y)\times E \arrow[rr] \arrow[d, hook] & & (F-y)\times Th(E) \arrow[dd] & \\
F & F\times(E-X) \arrow[r, hook] \arrow[d] & (F\times E - y\times X) \arrow[dr, hook] & & & \\
 & Th(F)\times(E-X) \arrow[rrr, bend right] & & F\times E & \bigcirc \arrow[r] \arrow[d] & Th F\times Th E \\
 & & & & Th(F\times E) &
\end{tikzcd}$$

Пример $Th(\mathbb{A}^1)\wedge Th(\mathbb{A}^1) \overset{?}{=} Th(\mathbb{A}^2)$

$$Th(\mathbb{A}^2) = \mathbb{A}^2/\big((\mathbb{A}^1-\{0\})\times\mathbb{A}^1 \underset{(\mathbb{A}^1-\{0\})\times(\mathbb{A}^1-\{0\})}{\cup} \mathbb{A}^1\times(\mathbb{A}^1\setminus\{0\})\big)$$

$$Th(\mathbb{A}^1)\wedge Th(\mathbb{A}^1) = \left(\frac{\mathbb{A}^1}{\mathbb{A}^1-\{0\}}\times\frac{\mathbb{A}^1}{\mathbb{A}^1-\{0\}}\right)\Big/\left(pt\times\frac{\mathbb{A}^1}{\mathbb{A}^1-\{0\}} \vee \frac{\mathbb{A}^1}{\mathbb{A}^1-\{0\}}\times pt\right) =$$

$$(X,U)\times(Y,V) := (X\times Y, X\times V\cup U\times Y)$$

$$(X/U)\wedge(Y/V) = X\times Y/(X\times V\cup U\times Y)$$

Забегая вперед

$\boxed{\text{Определение}}$ <u>S^2-спектр</u> — это набор пунктированных CW-пространств $X_0, X_1, \dots, X_n$ и набор связующих отображений

$$S^2 \wedge X_i \longrightarrow X_{i+1}$$

тавтологические расслоения

$$\begin{array}{cccc} \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \\ | & | & | & \\ pt & Gr(1,\infty) & Gr(2,\infty) & \dots \\ & & & \\ S^0 & Th(\tau_1) & Th(\tau_2) & \dots\ Th(\tau_n) \end{array}$$

$$Th^{top}_B(E) = D(E)/S(E)$$

диски, сферы

$$\begin{array}{c} S^2 \wedge Th_{Gr(n,\infty)}(\tau_n) \\ \| \\ Th_{pt}(\mathbb{C}) \wedge Th_{Gr(n,\infty)}(\tau_n) \\ \| \\ Th_{pt\times Gr(n,\infty)}(\mathbb{C}\times\tau_n) \hookrightarrow Th_{pt\times Gr(n+1,\infty)}(\tau_{n+1}) \end{array}$$

$$\mathbb{C}\times\tau_n = \tau_{n+1}|_{Gr(n,\infty)} \longleftarrow\!\shortmid\ \tau_{n+1}$$

$\rightsquigarrow$ получается спектр комплексных кобордизмов MU

Теперь опишем спектр алгебраических кобордизмов.

$$S^2 \longmapsto T = Th(\mathbb{A}^1) = \mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1 - 0$$

$$\tau_n \qquad \bigcup_{N\geq n} \tau_{n,N}$$

$$pt \qquad Gr(1,\infty) \qquad Gr(2,\infty) \quad \dots \quad Gr(n,\infty) = \bigcup_{N\geq n} Gr(n,N)$$

$$pt \sqcup pt = S^0 \qquad Th(\tau_1) \qquad Th(\tau_2) \quad \dots \quad Th(\tau_n) = \bigcup_{N\geq n} Th(\tau_{n,N})$$

$$T \wedge Th(\tau_n) = Th_{pt}(\mathbb{A}^1) \wedge Th_{Gr(n,\infty)}(\tau_n)$$

$$\| $$

$$Th_{pt\times Gr(n,\infty)}(\mathbb{A}^1 \times \tau_n) = Th_{Gr(n,\infty)}(\tau_{1+n}|_{Gr(n,\infty)})$$

$$\downarrow$$

$$\xrightarrow{\ \sigma_n\ } Th_{Gr(1+n,\infty)}(\tau_{1+n})$$

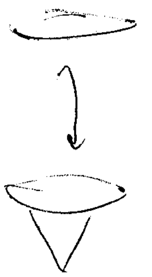
Этот набор пространств вместе с набором σ_n называется MGL

<u>T-спектр алгебраических кобордизмов</u>

$\boxed{\text{Лемма}}$ T канонически изоморфна в $H_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)$
$\cong$
$S^1_s \wedge (\mathbb{G}_m, \{1\})$, где $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 - \{0\}$, $S^1_s = \mathbb{A}^1/\{0,1\}$

Док-во

Пусть $\mathcal{X}$ — копредел в $Spc_\bullet$ следующей диаграммы:



$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{G}_m,\{1\}) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & (\mathbb{A}^1,\{1\}) \arrow[d] \\
\Delta^1_k \wedge (\mathbb{G}_m,\{1\}) \arrow[r] & \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Подлемма}}$ $(X,x) \in Spc_\bullet$

$$\begin{tikzcd}
(\Delta^0_k, \Delta^0_k) \wedge (X,x) \arrow[d, hook] \\
(\Delta^1_k, \Delta^0_k) \wedge (X,x)
\end{tikzcd}$$

это $\mathbb{A}^1$-эквивалентность

Док-во: $(\Delta^0_k, \Delta^0_k) \to (\Delta^1_k, \Delta^0_k)$ $\mathbb{A}^1$-эквивалентность

почему?

(X,x) - кофибрантный объект, т.к. $x \hookrightarrow X$ инъективно

$\rightsquigarrow$ все доказано $\square$

T - копредел

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_m,\{1\} \arrow[r, hook] \arrow[d] & (\mathbb{A}^1,\{1\}) \arrow[d] \\
(*,*) \arrow[r, hook] & T
\end{tikzcd}$$

Аналогично: если $\mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet$ — квази-изоморфизм комплексов R-модулей и P — проективный R-модуль, то $\mathcal{F}^\bullet \otimes P \to \mathcal{G}^\bullet \otimes P$ — квазиизоморфизм

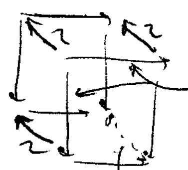
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_m \arrow[rr, hook] \arrow[dd] & & \mathbb{A}^1 \arrow[dd] & \\
& (\mathbb{G}_m,\{1\}) \arrow[ul, "id"] \arrow[rr, hook] \arrow[dd, hook] & & (\mathbb{A}^1,\{1\}) \arrow[ul, "id"'] \arrow[dd, hook] \\
* \arrow[rr] & & T & \\
& \Delta^1_k \wedge (\mathbb{G}_m,\{1\}) \arrow[ul] \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathcal{X} \arrow[ul, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, dashed, "\alpha"] \\
& (*,*) \arrow[rr, hook] & & T
\end{tikzcd}$$

$(\Delta^0, \Delta^0) \wedge (\mathbb{G}_m,\{1\})$ $\overset{\shortparallel}{*}$ id

$\mathbb{A}^1$-эквивалентность по подлемме + „два-из-трех"

Утверждение: α — $\mathbb{A}^1$-эквивалентность

Вообще, если есть морфизм пушаутов



+ если хотя бы одна из — корасслоение

$\Rightarrow$ тоже слабая экв-сть

С другой стороны:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_m \arrow[rr] \arrow[dd] & & * & \\
& (\mathbb{G}_m,\{1\}) \arrow[ul, "id"] \arrow[rr] \arrow[dd, hook] & & (\mathbb{A}^1,\{1\}) \arrow[ul, "\mathbb{A}^1\text{-экв-сть}"'] \arrow[dd, hook] \\
\Delta^1_k \wedge (\mathbb{G}_m,\{1\}) \arrow[rr, dashed] & & S^1_s \wedge (\mathbb{G}_m,1) & \\
& \Delta^1_k \wedge (\mathbb{G}_m,\{1\}) \arrow[ul, "id"] \arrow[rr] & & \mathcal{X} \arrow[ul, dashed, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow \beta$ — $\mathbb{A}^1$-экв-сть.

ибо

$$\begin{tikzcd}
(Y,y) \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\
(\Delta^1_k, \Delta^0_k) \wedge (Y,y) \arrow[r] & S^1_s \wedge (Y,y)
\end{tikzcd}$$

пушаут

«конус»

$S^n_s := (S^1_s)^{\wedge n} = S^{n,0}$ $\qquad S^1_s = S^{1,0}$

$S^n_t := (\mathbb{G}_m, 1)^{\wedge n} \simeq S^{n,n}$ $\qquad S^1_t = S^{1,1}$ $\Big) \Rightarrow H^{2,1}(U,\mathbb{Z}) = CH^1(U)$

$T^n := T^{\wedge n} = S^{2n,n}$

$S^{p,q} := S^{p-q}_s \wedge S^q_t \quad (p \geq q \geq 0)$

p — когомологический индекс

q — вес (подкрутка)

$\boxed{\text{Лемма}}$ $(\mathbb{P}^1, \infty) \cong T$ в $H^{\mathbb{A}^1}_\bullet(k)$

$$\begin{tikzcd} & & (\mathbb{P}^1,\infty) \arrow[d, "\wr"] & \\ T = \mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1-\{0\} \arrow[urr, dashed, leftrightarrow] \arrow[rr, "\sim"'] & & \mathbb{P}^1/\mathbb{P}^1-\{0\} & \mathbb{A}^1\text{-эквивалентность} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$\mathbb{P}^1 \hookleftarrow \{\infty\}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\mathbb{P}^1 \hookleftarrow \mathbb{P}^1-\{0\}$

изоморфизм пучков (вырезание)

$\boxed{\text{Замечание}}$ $(\mathbb{P}^1,\infty)(\mathbb{C}) = (S^2,\infty)$

$(\mathbb{P}^1,\infty)(\mathbb{R}) = (S^1,\infty)$

$S^{p,q}(\mathbb{C}) = S^p$

$S^{p,q}(\mathbb{R}) = S^{p-q}$