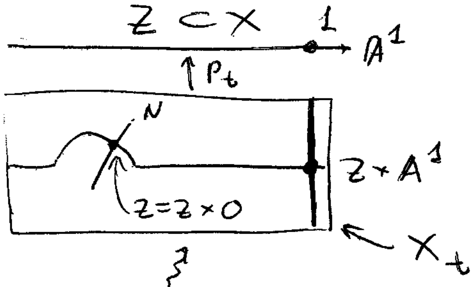
И.А. Панин



(X, Z)

$N = N_{X/Z}$ — нормальное расслоение

① $p_t^{-1}(1) = X$
$$\begin{tikzcd} X \\ Z \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

② $p_t^{-1}(0) = N$
$$\begin{tikzcd} N \\ Z \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, hook] & X_t & X \arrow[l, hook'] \\
Z \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] \arrow[ur, phantom, "\square"] & Z \times \mathbb{A}^1 \arrow[u, hook] \arrow[ur, phantom, "\square"] & Z \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Деформация к нормальному расслоению (Вердье)

$$\rightarrow \frac{N}{N - Z} \hookrightarrow \frac{X_t}{X_t - Z \times \mathbb{A}^1} \longleftrightarrow \frac{X}{X - Z}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$: Это изоморфизмы в $H_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)$

Свойства этой конструкции

а) $U \hookrightarrow X$ — открытое $\rightsquigarrow (U, U \cap Z) \longmapsto U_t$

Тогда $U_t \cap V_t = (U \cap V)_t$

в) $U_t \cup V_t = (U \cup V)_t$

с)
$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} - \tilde{Z} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \tilde{X} \arrow[d] & \tilde{Z} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\wr"] \\
X - Z \arrow[r, hook] & X & Z \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$
— элементарный квадрат Нисневича

Тогда
$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_t - \tilde{Z} \times \mathbb{A}^1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & \tilde{X}_t \arrow[d] \\
X_t - Z \times \mathbb{A}^1 \arrow[r, hook] & X_t
\end{tikzcd}$$
— квадрат Нисневича

$X_t := (X \times \mathbb{A}^1)^{\wedge}_{Z \times 0}$

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ $X = Z\times\mathbb{A}^n$, $Z = Z\times\{0\} \hookrightarrow Z\times\mathbb{A}^n$

Тогда деформация к нормальному конусу постоянна:

$$\begin{tikzcd}
Z\times\mathbb{A}^n \arrow[r, hook, "x\,\mapsto\,(x{,}0)"] & X_t \arrow[r, phantom, "\cong"] & Z\times\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^1 & X = Z\times\mathbb{A}^n \arrow[l, hook', "(x{,}1)\,\leftarrow\!\!\shortmid\,x"'] \\
Z \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "z\,\mapsto\,(z{,}0)"] & Z_t = Z\times\mathbb{A}^1 \arrow[u, hook] \arrow[ur, hook, "(z{,}t)\,\mapsto\,(z{,}0{,}t)"] & & Z \arrow[u, hook] \arrow[ll, hook', "(z{,}1)\,\leftarrow\!\!\shortmid\,z"']
\end{tikzcd}$$

В частности,

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{N}{N-Z} \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, "\cong \text{ в } H_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)"'] & \boxed{\dfrac{N\times\mathbb{A}^1}{N\times\mathbb{A}^1 - Z\times\mathbb{A}^1}} \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] & \boxed{\dfrac{Z\times\mathbb{A}^n}{Z\times\mathbb{A}^n - Z\times 0}} \arrow[l, "i_1"'] \arrow[dl, "\cong \text{ в } H_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)"] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$=$}"] \\
 & \left(\dfrac{N}{N-Z}\right)\times\mathbb{A}^1 & \dfrac{N}{N-Z}
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Определение}}$ $U \xhookrightarrow{\text{откр.}} X$ называется <u>хорошим</u>, если существует диаграмма вида

$$(Z_U = Z\cap U) \qquad (U,\, U - Z_U) \xleftarrow{\;e\;} (T,\, T-S) \xrightarrow{\;f\;} (Z_U\times\mathbb{A}^n,\, Z_U\times\mathbb{A}^n - Z_U\times 0\}\,,$$

где e, f — этальные, и e, f задают элементарные квадраты Нисневича

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "e"'] & S \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] \arrow[dl, "e|"'] \arrow[dr, "\cdot f"] & T \arrow[dr, "f"] & \\
U & Z_U \arrow[l, hook'] & & Z_U\times 0 \arrow[r, hook] & Z_U\times\mathbb{A}^n
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Утв. 1}}$ Если $\underset{X}{\overset{U}{\cap}}$ — хорошее, то

$$\begin{tikzcd}
 & \dfrac{U_t}{U_t - Z} \arrow[r, hook, "\sim"' , "\text{в } H_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)"'] & \dfrac{U}{U-Z_U} \\
\dfrac{N_U}{N_U - Z_U} \arrow[ur, "\sim \text{ в } H_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Утв. 2}}$ Если $U\subset X$ хорошее, то $\forall\, V \underset{\text{откр.}}{\subseteq} U$ — V — тоже хорошее

$\boxed{\text{Утв. 3}}$ $U \hookrightarrow X$ хорошее и $V \underset{\text{откр.}}{\subset} X$ таково, что

$$\frac{V_t}{V_t - Z_V\times\mathbb{A}^1} \cong \frac{V}{V - Z_V}$$

; тогда то же самое верно и для $U\times V$

$\boxed{\text{Утв. 4}}$ $\forall x\in X\ \exists U : x\in U\subset X$ — хорошая окрестность.

Д-во Теоремы: (Утв 4) $\Rightarrow \exists$ открытое по Зарисскому покрытие

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \; : \; U_i \text{ — хорошие}$$

$$(U_1 \hookrightarrow Z_{U_1}) \rightsquigarrow (T \hookrightarrow S) \rightsquigarrow \overset{\text{другие}}{(S \hookrightarrow T)} \rightsquigarrow (Z_{U_1} \times 0 \hookrightarrow Z_{U_1} \times \mathbb{A}^n)$$

— так доказывается Утв. 1 — т.е. для одного хорошего

Начинаем добавлять хорошие множества:

для U_1, U_2 знаем, для $U_1 \cap U_2$ — тоже (оно $\subset U_1 \Rightarrow$ хорошее по Утв. 2)

$\rightsquigarrow$ по Утв. 3 для $U_1 \cap U_2$ утв. верно

$$\underbrace{(U_1 \cup U_2)}_{V} \longrightarrow (\underbrace{U_1 \cup U_2}_{V} \cup \underbrace{U_3}_{U})$$

Утв. 3 $\nearrow$ верно и для $U_1 \cup U_2 \cup U_3$

$\rightarrow$ индукция

Наши конструкции естественны по отношению к окрестностям Нисневича

$\rightsquigarrow$ поэтому Утв. 1 сводится к Лемме 1.

Утв. 2:

$$(U, U - Z_U) \xleftarrow{e} (T, T - S) \xrightarrow{f} (Z_U \times \mathbb{A}^n, Z_U \times \mathbb{A}^n - Z_U \times \{0\})$$

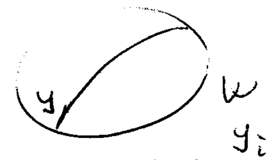
$$V \subset U \qquad V \longleftarrow T_{new} \longrightarrow Z_V \times \mathbb{A}^n$$

$T_{new} := e^{-1}(V) \cap f^{-1}(Z_V \times \mathbb{A}^n)$

$S_{new} := e^{-1}(Z_V)$

$$\begin{tikzcd}
Z_V \arrow[d, hook] & e^{-1}(Z_V) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & Z_V \times \{0\} \arrow[d, hook] \\
Z_U & S \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & Z_U \times \{0\}
\end{tikzcd}$$

Утв. 3 — Майер-Вьеторис:



$Y_i := W_i \cap Y$

$W_1 \cup W_2 = W$

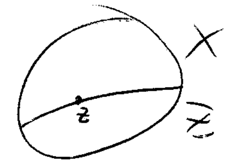
$W_1 \cap W_2 = W_{12}$

$$\begin{tikzcd}
W_{12}/(W_{12} - Y_{12}) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & W_1/(W_1 - Y_1) \arrow[d, hook] \\
W_2/(W_2 - Y_2) \arrow[r, hook] & W/(W - Y)
\end{tikzcd}$$

— Это кодекартов квадрат в категории мотивных пространств $(Spc_\bullet)$

$$\begin{tikzcd}
& W_{12} - Y \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & W_1 - Y \arrow[dl] \arrow[dd] \\
W_{12} \arrow[rr] \arrow[dd] & & W_1 \arrow[dd] & \\
& W_2 - Y \arrow[rr] \arrow[dl] & & W - Y \arrow[dl] \\
W_2 \arrow[rr] & & W &
\end{tikzcd}$$

Утв. 4



$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d, "{(f_1,f_2)}"] \\ O \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k \end{tikzcd}$$

$\Pi = (f_1, f_2)$ эталъно в z

$V = \mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k$ $m_z = (f_1, f_2)$

$I_Z = (f_1) \subset k[X]$

Пусть $k = \mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ эталъность – вопрос про частные произв. f_1 и f_2 (f_1, f_2 – лок. параметры) $\rightsquigarrow$ (f_1, f_2) эталъно в z и даже в окрест-ти z.

$Z \xrightarrow{f_2} \mathbb{A}^1_k$ – эталъно в z.

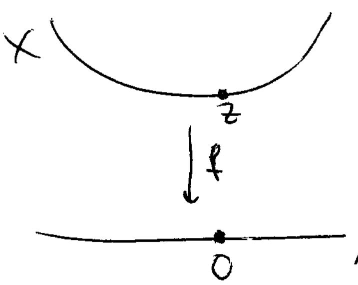
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "\Pi"] & X \times_V (\mathbb{A}^1 \times Z) \arrow[l, "\rho_1"'] \arrow[r, "\pi_1"] & \mathbb{A}^1 \times Z \arrow[dl, "\mathrm{id} \times f_2 =: \rho"'] & O \times Z \arrow[l] \arrow[dll, bend left, "{(0, f_2)}"] \\ Z \arrow[ur, hook] \arrow[rr, bend right, "{(0, f_2)}"] & & V & & \\ & & \mathbb{A}^1 \arrow[u, phantom, "\subset"] & & \end{tikzcd}$$

$$Z \times_{\mathbb{A}^1} Z = \Delta(Z) \sqcup ?$$ – определение неразветвленного накрытия

$$\begin{tikzcd} \Delta(Z) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sim"'] & X \times_V (\mathbb{A}^1 \times Z) - ? \arrow[d, "\rho_1"] \arrow[dr, "\Pi_1"] & \Delta(Z) \arrow[l, hook'] \arrow[dr, "\sim"] & \\ Z \arrow[r, hook] & X & \mathbb{A}^1 \times Z & O \times Z \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

$$\rho_1^{-1}(Z) = Z \times_V (\mathbb{A}^1 \times Z) = Z \times_V (O \times Z)$$

Простой случай:



$k(z) = k$

$(f) = m_z \subset k[X]$

$\mathbb{A}^1_k = \mathbb{A}^1_{k(z)}$

и если точка z не рациональна $\rightsquigarrow$ $X_{k(z)}$ эталъно

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec} k(z) = \Delta(z) \arrow[dl, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, bend left, "\mathrm{id}"] & \\ & X_{k(z)} \arrow[u, phantom, "\subset"] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ z \hookrightarrow X & & \operatorname{Spec} k(z) \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & X_{k(z)} \arrow[d] & \\ & X & \\ X_{k(z)} \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g", "\text{эт.}"'] & \Delta(z) \arrow[d] & \\ z \hookrightarrow X & \mathbb{A}^1_{k(z)} \hookleftarrow 0 & \end{tikzcd}$$

$\Delta(z)$ – рац. точка и выкинем $(Z \times_k Z - \Delta(Z))$

__Примеры__: $\mathbb{A}^1_k/\mathbb{A}^1_k - \{x\} \underset{H^{\mathbb{A}^1}(k)}{\cong} \mathbb{A}^1_{k(x)}/\mathbb{A}^1_{k(x)} \setminus 0$, $\mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1 - x - y \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1 - x \vee \mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1 - y$

$$\boxed{\eta \hookrightarrow \mathbb{A}^1 \longrightarrow \vee(\mathbb{A}^1_{k(x)}/\mathbb{A}^1_{k(x)} - 0)} \Rightarrow K_*(k(t)) \leftarrow K_*(\mathbb{A}^1_k) \leftarrow \underbrace{\bigoplus K_{*,\log}(\mathbb{A}^1_{k(x)})}_{= \bigoplus K_*(k(x))}$$