18.02.2013

И.А. Панин

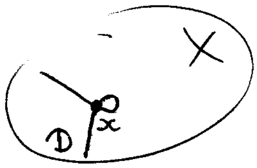
Гипотеза Гротендика – Серра

арифметическая часть

геометрическая часть – методы общего положения

Как перенести на конечные поля?

X/k $\quad$ k – бесконечно



G/k – простая

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[d] \\ X \end{tikzcd}$$

$\mathcal{G}$ – главное G-расслоение

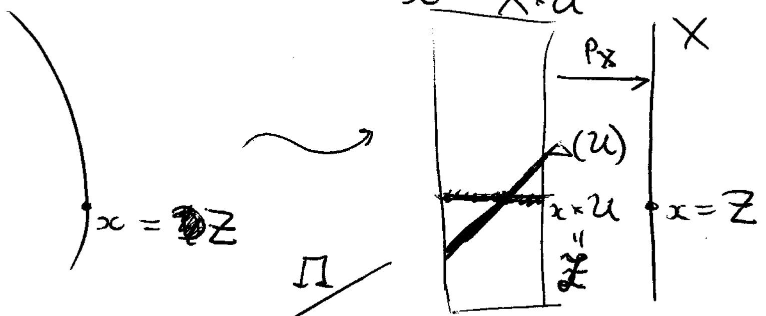
Известно, что $\mathcal{G}|_{X-D}$ тривиально

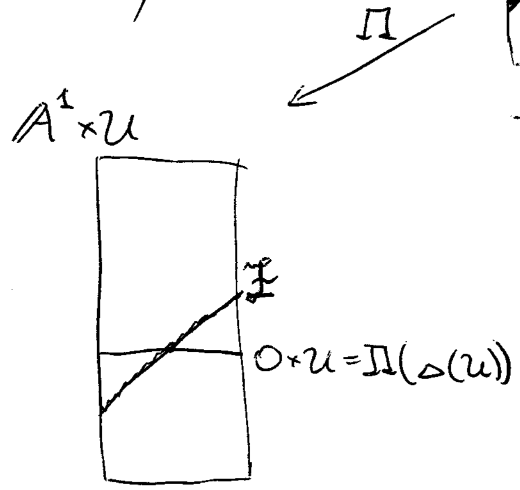
$\Downarrow$?

$\exists\, \mathcal{U}: x\in\mathcal{U}\subset X$ т.ч. $\mathcal{G}|_{\mathcal{U}}$ тривиально

Простая ситуация: $\dim X = 1$

$\mathcal{X} = X\times\mathcal{U}$





$\mathcal{U} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$

Π этален в $x\times x$

$\Downarrow$

① Π конечен и сюръективен $\Rightarrow$ Π – плоский

② На $\mathbb{A}^1\times\mathcal{U}$ строилось главное G-расслоение с таким свойством

а) $\mathcal{G}_t|_{\mathbb{A}^1\times\mathcal{U}-\mathcal{Z}}$ – тривиально

б) $\mathcal{G}_t|_{0\times\mathcal{U}}$ – исходное $(=\mathcal{G}|_{\mathcal{U}})$

Здесь правильно написать так!

элементарный квадрат Нисневича

$$\begin{tikzcd} {'\mathcal{X}^0} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{X}^0 \arrow[d] & \mathcal{Z} \arrow[l, hook'] \arrow[d, equal] \\ \mathbb{A}^1\times\mathcal{U}\setminus\mathcal{Z} \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^1\times\mathcal{U} & \mathcal{Z} \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{X}\supset\mathcal{X}^0 = \{x'\in\mathcal{X} \mid \Pi$ этален в $x'\}$

(может, выкинуть еще что-то, чтобы прообраз $\mathcal{Z}$ равнялся $\mathcal{Z}$)

$\mathcal{I}_t$ сидит над $\mathbb{A}^1 \times \mathcal{U}$

pull-back его на $\mathfrak{X}^0$ – это $p_x^*(\mathcal{I})$

Из этого следует в).

действительно, при ограничении $\mathcal{I}_t$ на диагональ получаем то, что нужно

$$\text{диагональ} \cong \text{прообраз } 0 \times \mathcal{U}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{Z} \arrow[d] & & \\
\mathbb{A}^1 \times \mathcal{U} & \mathfrak{X}^0 \arrow[l] \arrow[r, hook] & \mathfrak{X} \arrow[r, "p_x"] & X \\
\mathbb{A}^1 \times \mathcal{U} - \mathcal{Z} \arrow[u, phantom, "\bigcup"] \arrow[ur, phantom, "\text{Нисн.}"] & \mathfrak{X}^0 - \mathcal{Z} \arrow[u, phantom, "\bigcup"] \arrow[l] \arrow[r, hook] & \mathfrak{X} - \mathcal{Z} \arrow[u, phantom, "\bigcup"] \arrow[r] & X - Z \arrow[u, phantom, "\bigcup"]
\end{tikzcd}$$

вырезание по Зарискому

– отсюда следует:

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{\mathbb{A}^1 \times \mathcal{U}}{\mathbb{A}^1 \times \mathcal{U} - \mathcal{Z}} & \dfrac{\mathfrak{X}^0}{\mathfrak{X}^0 - \mathcal{Z}} \arrow[l, "\Pi", "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & \dfrac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{X} - \mathcal{Z}} \arrow[r] & \dfrac{X}{X - Z} \\
\mathbb{A}^1 \times \mathcal{U} \arrow[u] & \mathcal{U} \arrow[l, "i_1"'] & & \\
\mathcal{U} \arrow[u, "i_0"] & & &
\end{tikzcd}$$

построили морфизм в категории $H_s(k)$

(симплициальные объекты в пучках Нисневича + локализация по w.e. – если морфизм – w.e. на слоях над (гензелевыми кольцами))

Условие: $\mathcal{I}|_{X-Z}$ – тривиально

Отсюда $\mathcal{I}$ локально тривиально в топологии Нисневича

$$BG \in M_\bullet(k)$$

Теорема (Morel–Voevodsky): [redacted]

$$Mor_{H_s(k)}(\mathcal{X}, BG) = \left\{ \begin{array}{l} \text{классы изоморфизма главных} \\ \text{Нисневич } G\text{-расслоений над } \mathcal{X} \end{array} \right\}$$

($\forall$ мотивного пространства $\mathcal{X}$)

$\mathcal{H} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{H} \xleftarrow{\sim} \mathcal{H} \times G$ – определение ~~[illegible]~~ как-то так выглядит

Зафиксируем тривиализацию [redacted] $\mathcal{I}$ над $X - Z$:

$$\frac{X}{X-Z} \xrightarrow{\ f\ } BG \qquad\qquad f \in \mathrm{Mor}\left(\frac{X}{X-Z}, BG\right)$$

$$\updownarrow$$

$$\left(\mathcal{Y},\ \Theta : X-Z \xrightarrow{\text{сечение}} \mathcal{Y}\right)$$

Суть того, что происходит (далее рассуждения нестрогие):

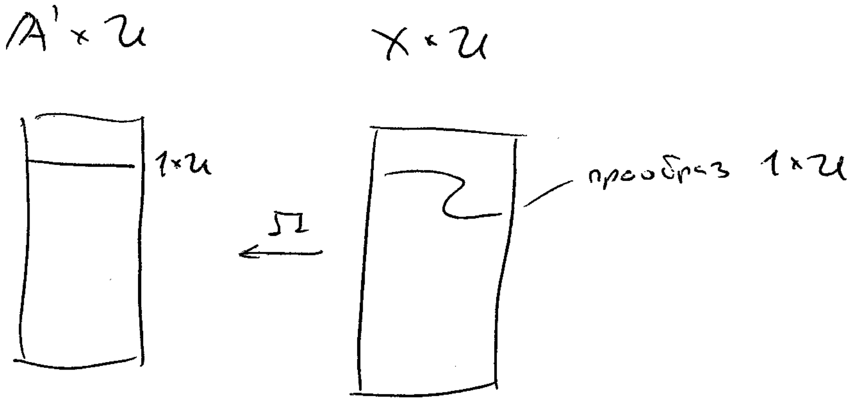
$\rightsquigarrow$ получаем морфизм (посредством композиции)

$$\frac{\mathbb{A}^1 \times U}{\mathbb{A}^1 \times U - \mathcal{Z}} \longrightarrow BG$$

в $H_s(k)$. Получаем

$\rightsquigarrow$ 1 $\mathcal{Y}_t$ над $\mathbb{A}^1 \times U$

2 тривиализация $\mathcal{Y}_t \big|_{\mathbb{A}^1 \times U \setminus \mathcal{Z}}$



$\rightsquigarrow$ отображение

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr] \arrow[dr, "i_1"'] & & BG \\ & \mathbb{A}^1 \times U \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

— в точку

Посмотрим на

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr] \arrow[dr, "i_0"'] & & BG \\ & \mathbb{A}^1 \times U \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

. Разложим его:

$$U \xrightarrow{id} 0 \times U \simeq \Delta(U) = o(U) \to U \to BG$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[dr, "i_1"] \arrow[rrrrrr, bend left] & & & & & & \\
& \mathbb{A}^1\times\mathcal{U} \arrow[r] & \frac{\mathbb{A}^1\times\mathcal{U}}{\mathbb{A}^1\times\mathcal{U}-\mathcal{Z}} & \frac{\mathcal{X}^\circ}{\mathcal{X}^\circ\setminus\mathcal{Z}} \arrow[l, "\Pi"', "\sim"] \arrow[r, "\sim"] & \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{X}-\mathcal{Z}} \arrow[r] & \frac{X}{X-Z} \arrow[r] & BG \\
\mathcal{U} \arrow[ur, "i_0"] \arrow[rr] & & 0\times\mathcal{U} \arrow[u] & \Delta(\mathcal{U}) \arrow[l, "\sim"] \arrow[u] \arrow[r, equal] & \Delta(\mathcal{U}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{U} \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Поэтому $\mathcal{J}_t|_{1\times\mathcal{U}}$ тривиально и $\mathcal{J}_t|_{0\times\mathcal{U}} = \mathcal{J}|_{\mathcal{U}}$

На этом геометрическая часть заканчивается.

Решение задачи Grothendieck – Serre состоит

① геометрическая часть: построение $[f] \in H_s(k)$

$$\frac{\mathbb{A}^1\times\mathcal{U}}{\mathbb{A}^1\times\mathcal{U}\setminus\mathcal{Y}} \xrightarrow{f} \frac{X}{X-Z} \text{ в } M_\bullet(k)$$

Вавилов – Ставрова – Панин: $\mathcal{J}_t$ оказался тривиальным

Федоров – Панин: $\mathcal{J}_t|_{t_0\times\mathcal{U}}$ не зависит от $t_0\in k$

Но неверно, что $\mathcal{J}_t$ пришел с $\mathcal{U}$

a) $f|_{1\times\mathcal{U}}$ – морфизм в точку

b) $f|_{0\times\mathcal{U}}$ равен композиции

$$\mathcal{U} \hookrightarrow X \longrightarrow \frac{X}{X-Z}$$

c)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\text{конечный сюръективный}"'] & \mathbb{A}^1\times\mathcal{U} \arrow[d] \\
& \mathcal{U}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] & Z \arrow[l, hook'] \arrow[d, equal] \\
\mathcal{U} \arrow[r] & X & Z \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

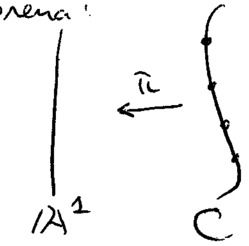
$\rightsquigarrow$ $X'/\mathcal{U}' \xrightarrow{\sim} X/\mathcal{U}$ – изоморфизм

② Если есть $(P_t, \alpha : \mathbb{A}^1\times\mathcal{U}\setminus\mathcal{Y} \longrightarrow P_t)$, то $P_t|_{0\times\mathcal{U}} = P_t|_{1\times\mathcal{U}}$.

$$\begin{tikzcd}
P_t \arrow[d] \\
\mathbb{A}^1\times\mathcal{U}
\end{tikzcd}$$

Чтобы построить f, применяются методы общего положения.

Проблема:



C – кривая (гладкая, аффинная) над $\mathbb{F}_q$

$x_1,\dots,x_n \in C(\mathbb{F}_q)$. Найти конечный сюръективный морфизм π : ① π этален в $x_1,\dots,x_n$

② $\pi(x_i) \neq \pi(x_j)$ при $x_i \neq x_j$

<u>Ответ</u>: если $n > q$, то π не существует

Идея: усложнить конструкцию f: склеивать несколько кусков

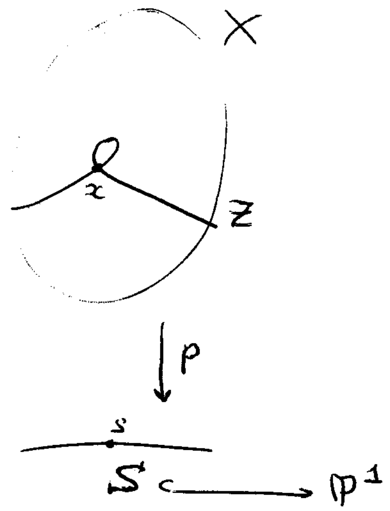
$$\begin{tikzcd} V \arrow[d] & C - \{x_1, \dots, x_n\} \arrow[l] \arrow[d] \\ \mathbb{A}^1 - \pi(x_1) & C - \{x_2, \dots, x_n\} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

— покрытие $\mathbb{A}^1$

(после этого нужно как-то клеить расслоения, но это уже не зависит от конечности поля)

<u>Кратко о построении f</u>

$\dim X = 2$



Уменьшая X, можно найти

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[drr, "p|_Z"'] & X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "p"] & \overline{X} \arrow[r, "\text{конечный}"] \arrow[d, "\overline{p}"] & \mathbb{P}^1 \times S \arrow[dl, bend left] \\ & & S & Y \arrow[ul, hook'] \arrow[l, "p_Y"'] \end{tikzcd}$$

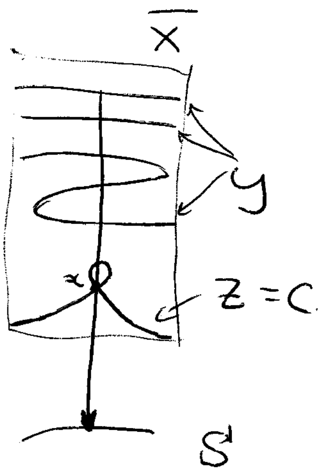
так, что

i) $\overline{p}$ — гладкий проективный морфизм с геометрически связными слоями (каждый слой — кривая)

ii) $S \underset{\text{открытое}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^1$ $(\dim S = 1)$

iii) p_Y — конечный этальный с непустыми слоями

iv) $p|_Z$ конечен

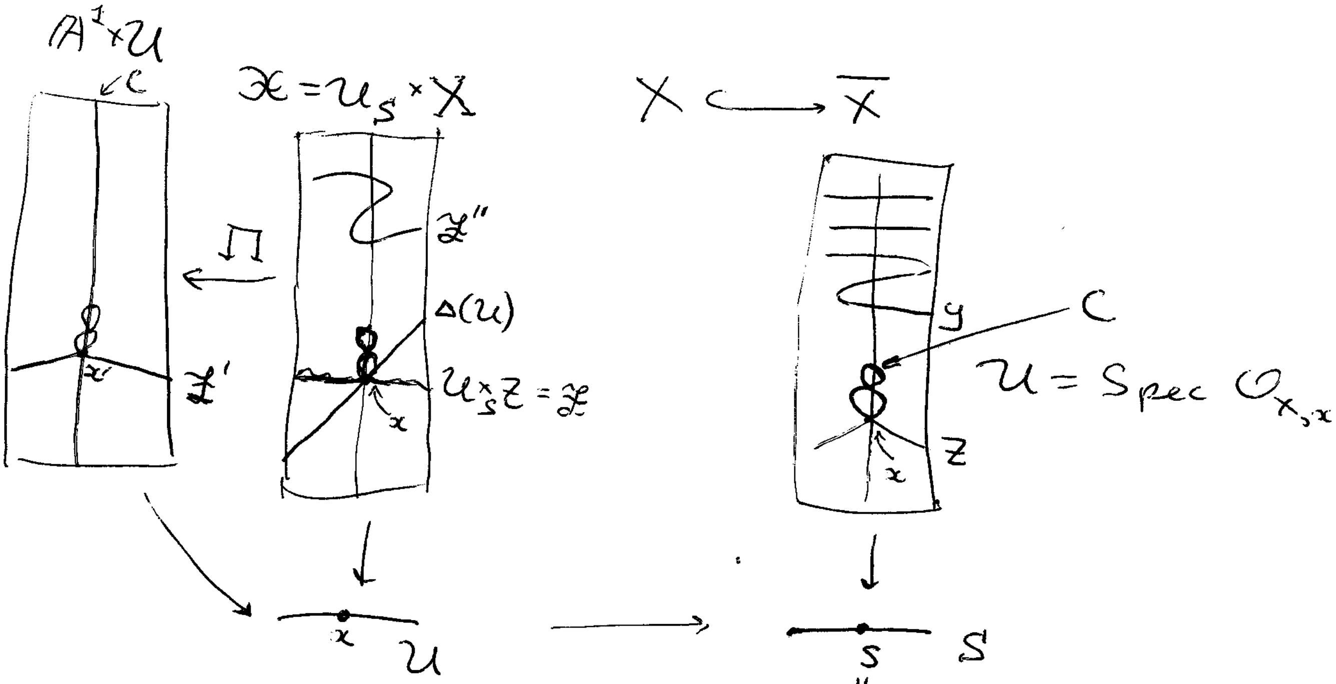


Картинка

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & \overline{X} \arrow[d] & Y \arrow[l, hook'] \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

называется „Окрестность Артина"

Что над конечным полем? Вариант теоремы Бертини: (кратное) гиперплоское сечение, проходящее через x и гладкое.



$\underset{p(x)}{\overset{s}{\shortparallel}}$ — k-рациональная

Над бесконечным полем $\mathcal{Z}$ вкладывался в $\mathbb{A}^1\times\mathcal{U}$ изоморфно

$k(x)=k=\mathbb{F}_q$ — пусть x рациональна

Проблема: (количество точек в $\mathcal{Z}\cap C$) $= n > q$

- тогда их нельзя положить на $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$

$\rightsquigarrow$ нельзя положить $\mathcal{Z}$ изоморфно.

может получиться, что $\mathcal{Z}\longrightarrow\mathcal{Z}'$ — иммерсия (локально сверху изо)

$\mathbb{P}^1\times\mathcal{U} \hookleftarrow \mathbb{A}^1\times\mathcal{U}$, $\infty\times\mathcal{U}$ $\qquad \mathcal{X}\hookrightarrow\overline{\mathcal{X}}\hookleftarrow \mathcal{Y}$

$\Downarrow$

Проблема: найти f

Вопрос: задает ли Π некоторое покрытие по Нисневичу для $\mathbb{A}^1\times\mathcal{U}$?

$$\begin{array}{ccccc} ? & \longrightarrow & \mathcal{X} & \longleftarrow & \mathcal{Z}-\{\underline{x}\} \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ \mathbb{A}^1\times\mathcal{U}\setminus\mathcal{Z}' & \longrightarrow & \mathbb{A}^1\times\mathcal{U}-x' & \hookleftarrow & \mathcal{Z}-z' \end{array}$$

Хочется: $k(\mathcal{Z}')\xrightarrow{\sim}k(\mathcal{Z})$

более сильно: $\mathcal{Z}'-z'\xleftarrow{\sim}\mathcal{Z}-\{x_1,\dots,x_n\}$

//смотрим пока что на двумерную ситуацию: $\dim\mathcal{X}=2$, а не 3

(может, нужно выкинуть дополнительные компоненты $\Pi^{-1}(\mathcal{Z}')$ и заменить $\mathcal{X}\longmapsto\mathcal{X}^0$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{X}-\{\underline{x}\} \arrow[d] & \mathcal{X}-\{x_2,\dots,x_n\} \arrow[l, hook'] \arrow[d] \arrow[r, leftrightarrow] & x_1 \arrow[d, equal] \\
\mathbb{A}^1\times U - x' \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^1\times U \arrow[r, leftrightarrow] & x'
\end{tikzcd}
$$

Возьмем маленькую окрестность x_1 (гензелизацию лок. кольца) — $\mathcal{X}^{oo}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{X}^{oo}-x_1 \arrow[d] \arrow[r, hook] & \mathcal{X}^{oo} \arrow[d] \arrow[r, leftrightarrow] & x_1 \arrow[d, equal] \\
\mathbb{A}^1\times U - x' \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^1\times U \arrow[r, leftrightarrow] & x'
\end{tikzcd}
$$

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{A}^1\times U\setminus Y'$, $\mathcal{X}^o$ и $\mathcal{X}^{oo}$ образуют покрытие по Нисневичу.

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{A}^1\times U\setminus Y')\coprod \mathcal{X}^{et} \arrow[d] \\
\mathbb{A}^1\times U
\end{tikzcd}
$$

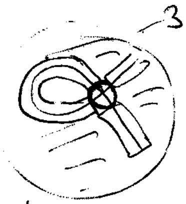
— то, где $\coprod$ этален

— более того, и это — покрытие по Нисневичу

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{X}^o - Y'' \arrow[d] \arrow[r, hook] & \mathcal{X}^o-\{\underline{x}\} \arrow[d] \arrow[r, leftrightarrow] & Y-\{\underline{x}\} \arrow[d, equal] \\
\mathbb{A}^1\times U\setminus Y' \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^1\times U - x' \arrow[r, leftrightarrow] & Y'-x'
\end{tikzcd}
$$

$\forall$ покрытие содержит покрытие стандВида. У нас оно такое:

3 куска



см. Morel–Voevodsky

т.е. такие покрытия — кофинальные

Теперь в терминах G-расслоений:

Есть $\mathcal{H}$ — расслоение на $\mathcal{X}$, $\mathcal{H}\big|_{\mathcal{X}\setminus Y}$ — тривиально

Задача: построить расслоение на $\mathbb{A}^1\times U$, тривиальное на $\mathbb{A}^1\times U\setminus Y'$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{H}^{ext}$ — расслоение на $\mathbb{A}^1\times U - x'$ т.ч. его сужение на $\mathcal{X}^o-\{\underline{x}\}$ совпадает с $\mathcal{H}$, а сужение на $\mathbb{A}^1\times U\setminus Y'$ тривиально

($\mathcal{H}^{ext}$ на $\mathbb{A}^1\times U - x'$) и ($\mathcal{H}\big|_{\mathcal{X}^{oo}}$ на $\mathcal{X}^{oo}$) совпадают на $\mathcal{X}^{oo}-x_1$

$\rightsquigarrow$ склеим в $\mathcal{H}^{ext}$ на $\mathbb{A}^1\times U$

Попытаемся формализовать эту ситуацию:

Пусть есть

$$\begin{tikzcd} \underline{t} = \{t_1,\dots,t_n\} \arrow[r, hook] & T' \arrow[d, "\Pi"] & \mathcal{Z}' \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ t' \arrow[r, hook] & T & \mathcal{Z} \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

T, T' — гладкие; $\dim T = \dim T'$

Нас интересует маленькая окрестность t' (и маленькая окрестность $t_1,\dots,t_n\}$. **Дано:**

① Π эталeн

② $k(t') \xrightarrow{\sim} k(t_i)$ $\forall i$

③ $\mathcal{Z} = \Pi^{-1}(\mathcal{Z}')$ (как схема?)

Хотим:

(?) $\mathcal{Z} - \{\underline{t}\} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}' - t'$

есть контрпример с несвязными кусками! может, нужно требовать неприводимость? — или то, что есть изоморфизм на общей точке!

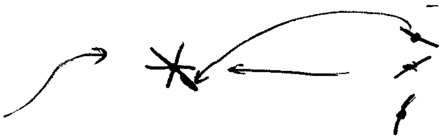
Почему это так? Сделаем строго плоскую замену базы

Пополним Z' в точке t':

$$\widehat{k[Z]}_{m_{Z'-k[Z]}} = \prod_i \widehat{k[Z]}_{m_{t_i}}$$

$$\uparrow$$

$$\widehat{k[Z']}_{m_{t'}}$$



— этальное + конечное + изоморфизм на полях вычетов

Почему две палочки не могут слиться в одну? (если была неприводимость)

K $\quad K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p = \prod \dots$

$\mathbb{Q}$ $\quad \hat{\mathbb{Q}}_p$