25.02.2013

И. А. Панин

Новое определение мотивного пространства

Shv — категория пучков множеств на $(Sm/k)_{Nis}$

$\Delta^{op} Shv \qquad (\Delta^{op} \longrightarrow Shv)$

Опр. Пусть $f: X \longrightarrow Y$ — морфизм в $\Delta^{op} Shv$

① f называется слабой экв-стью (W_s) — симплициальной сл.

$\iff \forall U \in Sm/k \quad \forall u \in U$

морфизм $f_u : X(U_u^h) \longrightarrow Y(U_u^h)$ — слабая эквивалентность

где $U_u^h = Spec(\mathcal{O}^h_{U,u})$

$$U_u^h = \varprojlim_{\substack{\text{Нисн. окрестн.} \\ V \to U \\ \cup \quad \cup \\ u = u}} V$$

т.е.
$$\mathcal{O}^h_{U,u} = \lim_{\substack{V \to U \\ \cup \quad \cup \\ u = u}} k[V]$$

и $X(U_u^h) := \operatorname{colim} X(V)$

② f — корасслоение (C) $\iff$ мономорфизм

③ f — расслоение (F_s) $\iff$ f обладает right lifting property по отношению к корасслоениям слаб. экв.

$\forall i :$ $A \xrightarrow{i} B$ — слабая экв-сть

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (W_s, C, F_s) задает на $\Delta^{op} Shv$ структуру модельной категории (симплициальная модельная структура)

$$H_s(k) := \Delta^{op} Shv[W_s^{-1}]$$

— в абелевом контексте — аналог $D^-(Shv_{ab})$

Дальнейшая локализация:

$\boxed{\text{Опр.}}$ $X \in \Delta^{op} Shv$ называется $\mathbb{A}^1$-локальным, если $\forall$ симплициального пучка $Y \in \Delta^{op} Shv$ отображение

$$Hom_{H_s(k)}(Y, X) \longrightarrow Hom_{H_s(k)}(Y \times \mathbb{A}^1, X),$$

индуцированное проекцией $Y \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow Y$, биективно.

Морфизм $f: X \longrightarrow Y$ называется $\mathbb{A}^1$-эквивалентностью, если $\forall$ $\mathbb{A}^1$-локального симплициально расслоенного Z отображение

$$S(Y, Z) \longrightarrow S(X, Z)$$ — слабая эквивалентность симплициальных множеств

$\boxed{\text{Опр.}}$ $S(\mathcal{A}, \mathcal{B})_n := \mathrm{Hom}_{\Delta^{op}Shv}(\mathcal{A} \times \Delta^n, \mathcal{B})$

$$Sm/k \hookrightarrow Shv \hookrightarrow \Delta^{op}Shv$$

постоянные в симплициальном направлении пучки:

$$F \longmapsto ([n] \to F)$$

$U \in Sm/k$. Чему равно $S(U, \mathcal{B})$? Ответ: $\mathcal{B}(U)$ (лемма Йонеды)

В частности, для $\mathbb{A}^1$-эквивалентности ...

Морфизм $f: X \longrightarrow Y$ называется $\mathbb{A}^1$-расслоением, если f обладает right lifting property по отношению к $i: A \longrightarrow B$ таким, что i — мономорфизм и $\mathbb{A}^1$-слабая эквивалентность.

$\boxed{\text{Теорема}}$ $(W_{\mathbb{A}^1}, C, F_{\mathbb{A}^1})$ — модельная структура на $H_s(k)$

$\rightsquigarrow H_{\mathbb{A}^1}(k) :=$ $\Delta^{op}Shv[W_{\mathbb{A}^1}^{-1}]$

$\boxed{\text{Теорема}}$

$H_s(k) = \{$все симплициально расслоенные объекты в $\Delta^{op}Shv\}$

$[X, Y]_{H_s(k)} = \mathrm{Hom}_{\Delta^{op}Shv}(X, Y)/\sim$ — наивная гомотопность

$L_{\mathbb{A}^1}$ — фибрантная замена; i — вложение

$$\begin{tikzcd} H_s(k) \arrow[d, shift right, "L_{\mathbb{A}^1}"'] \\ H_{\mathbb{A}^1}(k) \arrow[u, shift right, "i"'] \end{tikzcd}$$

$H_{\mathbb{A}^1}(k) = \{$все $\mathbb{A}^1$-фибрантные объекты в $\Delta^{op}Shv\}$

$[X, Y]_{H_{\mathbb{A}^1}(k)} = \mathrm{Hom}_{\Delta^{op}Shv}(X, Y)/\sim$ — наивная гомотопность

$\exists$ два функтора:

$L_{\mathbb{A}^1}$ — функтор $\mathbb{A}^1$-локализации,

i — полное вложение (его образ состоит из $\mathbb{A}^1$-локальных объектов)

и $L_{\mathbb{A}^1}$ — левый сопряженный к i.

$$\rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{H_{\mathbb{A}^1}(k)}(L_{\mathbb{A}^1}(X), Y) = \mathrm{Hom}_{H_s(k)}(X, i(Y))$$

$\mathrm{Hom}_{\Delta^{op}Shv}(X, Y)/\sim$

$\Delta^1_s \in \Delta^{op}Shv$
$\cup$
$\Delta^{op}Sets$

X, Y: $\quad X \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} Y \quad$ $\alpha \sim \beta$, если $\exists H$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ \Delta^1_s \times X \arrow[r, "H"] & Y \\ X \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Если морфизм является симплициальной эквивалентностью, то и $\mathbb{A}^1$-эквивалентностью:

$$\begin{array}{c} (W_s, C, F_s) \\ \downarrow \quad \uparrow \\ (W_{\mathbb{A}^1}, C, F_{\mathbb{A}^1}) \end{array}$$

$H_s(k) \leftrightarrow$ аналог $D^-(Shv_{ab})$

$H_{\mathbb{A}^1}(k) \leftrightarrow$ полная подкатегория $A^\cdot \in D^-(Shv_{Ab})$ т.ч. $\forall i$

1) $\underline{\underline{h}}^i(A^\cdot)$ — гом. инв.

2) все $H^?(U, \underline{\underline{h}}^i(A^\cdot))$ — гом. инв.

Если X — $\mathbb{A}^1$-локальный, то

$$\mathrm{Hom}_{H_s(k)}(Y, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{H_s(k)}(Y \times \mathbb{A}^1, X)$$
$$\cong$$
$$\mathrm{Hom}(Y, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{A}^1, X))$$

$\rightsquigarrow$ по л. Йонеды $X \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{A}^1, X)$

Здесь $\underline{\mathrm{Hom}}(A, B)(U)_n = \mathrm{Hom}(A \times U \times \Delta^n, B)$

Связь со старым определением $H_{\mathbb{A}^1}$:

геометрическая реализация

$|-| : \Delta^{op} Shv \rightleftarrows Shv : Sing_*$

$Sing_*(F) \longleftarrow\!\shortmid F$

$$Sing_*(F)_n = \underline{\mathrm{Hom}}_{Shv}(\Delta^n, F)$$

$W'_{\mathbb{A}^1} \subset Mor(Shv)$ $\qquad C'_{\mathbb{A}^1}$ — мономорфизмы

$f \iff Sing_*(f) \in W_{\mathbb{A}^1}$ $\qquad F'_{\mathbb{A}^1}$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\Delta^{op} Shv \rightleftarrows Shv$ переводят w.e. в w.e.

$\rightsquigarrow$ и $H^{new}_{\mathbb{A}^1}(k) \rightleftarrows H^{old}_{\mathbb{A}^1}(k)$ — взаимно обратные экв-сти