04.03.2013

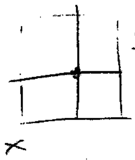
И.А. Панин

Категория Уайтхеда

В топологии:

$Ob(SW)$ = клеточные пространства с отмеч. точкой

$Hom_{SW}(X,Y) = \varinjlim [S^n \wedge X, S^n \wedge Y]$



$S^n \wedge S^m = S^{n+m}$

Т.к. S^n — когруппа в гомотопической категории $H_\bullet$ (абелева), то $[S^n\wedge X, S^n \wedge Y]$ — абелева группа при $n \geq 2$ и $Hom_{SW}(X,Y)$ — абелева группа →

$S^n \longrightarrow S^n \vee S^n$

$S^n \xrightarrow{\alpha} Z$

$S^n \xrightarrow{\beta} Z$ $\rightsquigarrow$ $S^n \longrightarrow S^n \vee S^n \xrightarrow{\alpha \vee \beta} Z \vee Z \longrightarrow Z$

Начиная с $H_\bullet^{\mathbb{A}^1}$, хотим аналогично построить $SW(k)$

В категории клеточных пространств с отмеченной точкой есть функтор надстройки: $X \longmapsto^{\Sigma} S^1 \wedge X$

Наша цель: желаем построить категорию SW вместе с функтором $H_\bullet \longrightarrow SW$ так что функтор надстройки продолжается на SW, обратим там (т.е., становится авто-эквивалентностью SW):

$\Sigma^{-1} \circ \Sigma = id$

Выше описан образ категории $H_\bullet$ в SW. Как добиться обратимости Σ?

Пусть $(\mathcal{C}, \wedge, \mathbb{1})$ — симметрическая моноидальная категория — например, $(H_\bullet, \wedge, S^0)$.

$T \in Ob(\mathcal{C})$ (например, $T = S^1$)

Обозначим $\mathcal{C}[T^{-1}]$ категорию:

$Ob(\mathcal{C}[T^{-1}]) = (X, n)$, где $X \in Ob\,\mathcal{C}$, $n \in \mathbb{Z}$

$Hom_{\mathcal{C}[T^{-1}]}((X,n),(X',n')) = \varinjlim_m Hom_{\mathcal{C}}(T^{\wedge(m+n)} \wedge X, T^{\wedge(m+n')}\wedge X')$

Композиция:

$T^{\wedge(N-m)}\left(T^{\wedge(m+n)} \wedge X \xrightarrow{\alpha} T^{\wedge(m+n')} \wedge X'\right)$ ← можно считать, что $N \geq m$

$T^{\wedge(N+n')} \wedge X' \xrightarrow{\beta} T^{\wedge(N+n'')} \wedge X''$

$\rightsquigarrow \beta \circ T^{\wedge(N-m)}(\alpha)$

Есть функтор $\mathcal{C} \xrightarrow{\Sigma^\infty_T} \mathcal{C}[T^{-1}]$

$$X \longmapsto (X,0)$$

Следующий этап — задать моноидальную структуру на $\mathcal{C}[T^{-1}]$ так, чтоб функтор Σ^∞_T стал симметрическим моноидальным и объект $(T,0)$ стал обратимым в $\mathcal{C}[T^{-1}]$: $(T,0)\wedge ? \xrightarrow{\sim} (\mathbb{1},0)$

$\boxed{\text{Замечание}}$ Группа автоморфизмов обратимого объекта в симметрической моноидальной категории абелева

$$\operatorname{aut}(T\wedge T\wedge T) \longleftarrow S^3 \supset A^3 = [S^3, S^3]$$

$$\mathrm{id} \longleftarrow \text{циклическая}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть $(\mathcal{C},\wedge,\mathbb{1})$ — как выше, $T \in Ob(\mathcal{C})$, и $\sigma_3 \in S_3$ действует на $T\wedge T\wedge T$ тождественно в $\mathcal{C}[T^{-1}]$.
Тогда существует симметрическая моноидальная структура $\wedge$ на $\mathcal{C}[T^{-1}]$ такая, что $(X,n)\wedge(Y,m) = (X\wedge Y, n+m)$
Канонический функтор $\mathcal{C} \xrightarrow[\Sigma^\infty_T]{} \mathcal{C}[T^{-1}]$ является симметрическим моноидальным,

$$X \longmapsto (X,0)$$

и объект $T=(T,0)$ обратим в $\mathcal{C}[T^{-1}]$ с каноническим обратным $T^{-1} = (\mathbb{1},-1)$

Если $\mathcal{C} = H_\bullet$, $\mathbb{1} = S^0$, $T = S^1$, то $T^{-1} = (S^0,-1)$

Итак, возьмем $(\mathcal{C},\wedge,\mathbb{1}) = (H_\bullet, \wedge, S^0)$, $T = S^1$

$$\rightsquigarrow H_\bullet[S^{-1}] =: SW$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ σ_3 действует на $S^1\wedge S^1\wedge S^1$ тождественно в $H_\bullet$

Док-во: $S^1\wedge S^1\wedge S^1 = S^3$, четная перестановка координат σ_3 сохраняет ориентацию $\rightarrow$ гомотопна тождественной

$\boxed{\text{Следствие 1}}$ На $H_\bullet[S^{-1}]$ имеется требуемая симм. моноид. структура

$\boxed{\text{Следствие 2}}$ Функтор $(X,n) \longmapsto (S^1,0)\wedge(X,n) = (S^1\wedge X, n)$

обратим в $H_\bullet[S^{-1}]$

Док-во $(S^0,-1)\wedge(S^1,0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{1},0)$

$$(X,n) \longrightarrow (S^1,0)\wedge(X,n) \longrightarrow (S^0,-1)\wedge(S^1,0)\wedge(X,n) \cong (\mathbb{1},0)\wedge(X,n) = (X,n)$$

Обратный к $(X,n) \longmapsto (S^1\wedge X, n)$ — это $(X,n) \longmapsto (X,n-1)$

Исходный функтор это $(X,n) \longmapsto (X,n+1)$

Применим конструкцию к $H_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)$, $T := \mathbb{A}^1/(\mathbb{A}^1 - 0)$

$\cong_{H_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)} (\mathbb{P}^1, \infty)$ — не нужно

$$T \underset{H_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)}{\cong} S^1_s \wedge \mathbb{G}_m$$

(⇒ при обращении $X \longmapsto T \wedge X$ мы обратим и $S^1_s \wedge -$, и $\mathbb{G}_m \wedge -$)

$\boxed{\text{Лемма}}$ $T \wedge T \wedge T$ $\quad \sigma_3 \in S^3$ действует тривиально в $H_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)$

Док-во: $(\mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1-0) \wedge (\mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1-0) = (\mathbb{A}^2/\mathbb{A}^2-0)$

$$= \frac{\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1}{(\mathbb{A}^1-0)\times\mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^1 \times (\mathbb{A}^1-0)}$$

Более общо:
$Th_{X\times Y}(E \times F) = Th_X(E) \times Th_X(F)$

$$(\mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1-0)^{\wedge 3} \cong \mathbb{A}^3/\mathbb{A}^3-0$$

здесь действие σ_3 выглядит как перестановка координат: $\sigma_3 \in SL_3(k) = E_3(k)$

$\rightsquigarrow \alpha = \prod_{r=1}^{n} t_{i_r j_r}(\lambda_r)$

$\alpha(t) := \prod_{r=1}^{n} t_{i_r j_r}(t \cdot \lambda_r) \in SL_3(k[t])$ $\qquad \alpha(0) = E$, $\alpha(1) = \alpha$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $SW(k) = (H_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k))[T^{-1}]$

Здесь есть $\wedge$, $(S^0, 0) = \mathbb{1}$

Функтор $H_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k) \longrightarrow SW(k)$ — симметрический моноидальный

Функтор $(X,n) \longmapsto (T,0) \wedge (X,n) = (T \wedge X, n)$

равен (изоморфен) функтору $(X,n) \longmapsto (X, n+1)$

Обратный функтор: $(X,n) \longmapsto (X, n-1)$

$SW(k)$ — аддитивна? $\qquad S^2_s \in SW(k)$

$S^2_s \in SW_{(simpl)} \longrightarrow SW(k) \xrightarrow{\Gamma(pt,-)} H_\bullet(SSets)$

$= S^1_s \wedge S^1_s$, SW: $\quad Y_\bullet \longmapsto$ пост. пучок $Y_\bullet$

$\rightsquigarrow S^2_s$ — когруппа в $SW(k)$ $\qquad \Delta^1_s \longmapsto |\Delta^1_s| = \Delta^1$

$SSets \underset{|\cdot|}{\overset{Sing_*}{\rightleftarrows}} CW \rightsquigarrow H_0(SSets) \rightleftarrows H_0(CW)$

взаимно обратные эквивалентности

$S^n_s = S^1_s \wedge \ldots \wedge S^1_s$, $\quad |\cdot|$ коммутирует с конечными "$\times$" и с "$\vee$"

$S^1_s = \Delta^1_s / \partial\Delta^1_s$ $\qquad \Delta^0_s \longmapsto \Delta^0$, $\Delta^1_s \longmapsto \Delta^1$ $\rightsquigarrow |S^1_s| = S^1$

S^2 — абелева когруппа в $Ho(\mathbf{C}W)$

$\rightsquigarrow S^2_s$ — абелева когруппа в $Ho(SSets)$

$\rightsquigarrow S^2_s \in SW(k)$ — абелева когруппа

$\boxed{\text{Следствие}}$ $[T^{\wedge n}\wedge X, T^{\wedge m}\wedge Y]$ — абелева группа при $n, m \geq 2$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $SW(k)$ аддитивная категория

Кроме того, есть функтор сдвига $(X, n) \xmapsto{\text{"}T\wedge\text{"}} (X, n+1)$

$(X, n) \xmapsto{\text{"}T^{-1}\wedge\text{"}} (X, n-1)$

$\boxed{\text{Вопрос}}$ $SW(k)$ — триангулированная?

Желаем задать семейство выделенных треугольников

$X[1] = X \wedge S^1_s$ — функтор сдвига

справа! а Hom был $\varinjlim$ по левым надстройкам

Пусть $f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ — морфизм пунктированных мотивных пространств

$$\begin{tikzcd}
(X, x) \arrow[r] \arrow[d] & (X, x)\wedge \Delta^1_s \arrow[d] \\
(Y, y) \arrow[r, "\eta_f"] & ? = \mathrm{Cone}(f)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X, x) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & (Y, y) \arrow[d] \\
(X', x') \arrow[r, "f'"] & (Y', y')
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
(Y, y) \arrow[r, "\eta_f"] \arrow[d] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[d] \\
(Y', y') \arrow[r, "\eta_{f'}"] & \mathrm{Cone}(f')
\end{tikzcd}$$

(взятие конуса функториально)

В частности, $\forall f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ имеем

в $\Delta^{op}Shv_\bullet$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cone}(f) \arrow[d] \\
\mathrm{Cone}((X, x) \to (pt, pt)) = (X, x)\wedge S^1_s
\end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow (X, x) \xrightarrow{f} (Y, y) \xrightarrow{\eta_f} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{\varepsilon_f} (X, x)\wedge S^1_s = (X, x)[1]$$

— корасслоенная последовательность в $SW(k)$ для f

Определение Последовательность морфизмов вида
$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A[1]$$
в $SW(k)$ называется выделенным треугольником, если существует морфизм $f:(X,x)\longrightarrow(Y,y)$, $n\in\mathbb{Z}$ и изоморфизмы
$$\varphi_1: T^{\wedge n}\wedge(X,x)\longrightarrow A$$
$$\varphi_2: T^{\wedge n}\wedge(Y,y)\longrightarrow B$$
$$\varphi_3: T^{\wedge n}\wedge \mathrm{Cone}(f)\longrightarrow C \quad \text{в } SW(k)$$
такие, что следующая диаграмма в $SW(k)$ коммутативна
$$\begin{tikzcd}
T^{\wedge n}\wedge(X,x) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & T^{\wedge n}\wedge(Y,y) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & T^{\wedge n}\wedge \mathrm{Cone}(f) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & (T^{\wedge n}\wedge(X,x))[1] \arrow[d, "\varphi_1[1]"] \\
A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & A[1]
\end{tikzcd}$$

Теорема Категория $SW(k)$ с функтором $X\longmapsto X\wedge S^1_s$ и классом выделенных треугольников является триангулированной категорией

$$[S^i\wedge X, Gr] = K^{-i}_{top}$$
$$[S^i_s\wedge X, Gr]_{H_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)} = K_i^{Q}(X)$$