$\boxed{18.03.2013}$

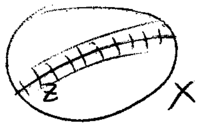
И.А. Панин

① X — гладкое над k, $X = U \cup V$

Тогда в $SW(k)$ есть выделенный треугольник

$$(U\cap V)_+ \longrightarrow U_+ \oplus V_+ \longrightarrow X_+ \longrightarrow (U\cap V)_+[1]$$

②



$$i: \underbrace{Z \hookrightarrow X}_{\text{гладкие}}, \quad N := N_{X/Z}$$

Тогда есть выделенный треугольник

$$(X-Z)_+ \longrightarrow X_+ \longrightarrow Th_X(N) \longrightarrow (X-Z)_+[1]$$

$$Th_X(N) = N/_{N-s(Z)}$$

①′

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ U \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

— элементарный квадрат Нисневича

$(*) \Rightarrow$

$$U'_+ \longrightarrow U_+ \oplus X'_+ \longrightarrow X_+ \longrightarrow U'_+[1]$$

— тогда (1) — частный случай этого для квадрата

$$\begin{tikzcd} U\cap V \arrow[r, hook] \arrow[d] & V \arrow[d] \arrow[r, leftrightarrow] & Z \arrow[d, equal] \\ U \arrow[r, hook] & X \arrow[r, leftrightarrow] & Z \end{tikzcd}$$

<u>Д-во</u> (1′): Диаграмма (*) кодекартова в категории мотивных пространств (т.е., в категории Sh_{Nis})

$\boxed{\text{Общая Лемма}}$

$$\begin{tikzcd} (A,a) \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "p"] & (X,x) \arrow[d, "p'"] \arrow[ddr, bend left] & \\ (Y,y) \arrow[r, "i'"] \arrow[drr, bend right] & (Z,z) & \\ & & (Y,y)\cup_{(A,a)}(X,x) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

— в $Spc_\bullet = M_\bullet(k)$

предположим, что это слабая эквивалентность в $H_\bullet(k)$ (симплиц., а не $\mathbb{A}^1$)

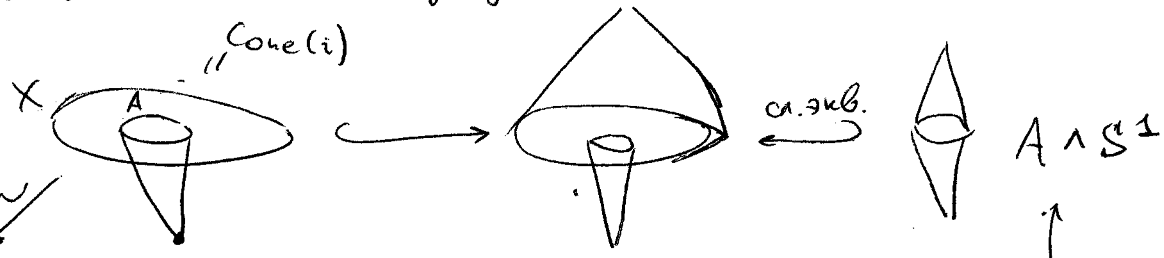
Тогда существует канонический морфизм

$$(Z,z) \longrightarrow (A,a)\wedge S^1_s \quad \text{в} \quad H_\bullet(k)$$

такой, что

$$(A,a) \longrightarrow (Y,y)\oplus(X,x) \longrightarrow (Z,z) \longrightarrow (A,a)[1]$$

является выделенным треугольником в $SW(k)$



$$X \xrightarrow{\sim} X/A = (pt,pt)\cup_{(A,a)}(X,x) \longrightarrow A\wedge S^1$$

(1') – следствие общей леммы;

(2') X – гладкое многообразие, $Z \hookrightarrow X$ – произвольное замкнутое

$$\begin{tikzcd}
\overset{\text{гладкое}}{X-Z} \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d] \arrow[r, squiggly, "\text{функтор } +"] & (X-Z)_+ \arrow[r, hook] \arrow[d] & X_+ \arrow[d] \\
pt \arrow[r] & (X/X-Z) & pt_+ \arrow[r] & (X/_{X-Z})_+
\end{tikzcd}$$

лемма

можно убрать эти +

$$(X-Z)_+ \longrightarrow \underbrace{pt_+}_{=S^0} \oplus X_+ \longrightarrow (X/X-Z) \longrightarrow (X-Z)_+[1]$$

выделенный треугольник в $SW(k)$

$$(X/X-Z) = Th_X(N)$$

Вообще, если в триангулированной категории есть

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & Z_1[1] \arrow[d, equal] \\
Z_1 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Z_1[1]
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad X_1 \to Y_1\oplus X_2 \to Y_2 \to X_1[1]$$

Если
$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ U \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$
— элементарный квадрат Нисневича, то

$$\begin{tikzcd} U'_+ \arrow[r, hook] \arrow[d] & X'_+ \arrow[r] \arrow[d] & X'/U' \arrow[d] \\ U_+ \arrow[r, hook] & X_+ \arrow[r] & X/U. \end{tikzcd}$$
— изоморфизм мотивных пространств

$\downarrow$

$$\begin{tikzcd} (X'/U')[-1] \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & U'_+ \arrow[r] \arrow[d] & X'_+ \arrow[r] \arrow[d] & X'/U' \arrow[d, "\wr"] \\ (X/U)[-1] \arrow[r] & U_+ \arrow[r] & X_+ \arrow[r] & X/U \end{tikzcd}$$

Недостаток $SW(k)$: там нет бесконечных прямых сумм

Например, $\bigoplus_{i\geq 0} T^{-i}$ не существует

$\pi_i\left(\bigoplus_n S^{-n}\right) \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

$(X,x) \longmapsto T\wedge(X,x)$

$T = \mathbb{A}^1/(\mathbb{A}^1 - 0)$

или

$T' := (\mathbb{P}^1, \infty)$

Хотим построить $H[[T^{-1}]]$ вместе с функтором

$$H \xrightarrow{\Sigma_T^\infty} H[[T^{-1}]]$$

① функтор $(X,x) \longmapsto (X,x)^{\wedge T}$ продолжается на категорию $H[[T^{-1}]]$ и становится там автоэквивалентностью.

② Категория $H[[T^{-1}]]$ имеет все копроизведения, и

$$\Sigma_T^\infty\left(\bigvee_\alpha (X_\alpha, x_\alpha)\right) = \bigoplus \Sigma_T^\infty (X_\alpha, x_\alpha)$$

Народу неизвестны конструкции $H[[T^{-1}]]$, стартующие прямо с H

Опр. <u>T-спектр</u> E — это последовательность

$(E_0, E_1, \dots, E_n, \dots)$, $E_i \in Spc_\bullet$ $\qquad E = (\mathbb{E}, \{e_i\})$

и отображений $e_i : T \wedge E_i \longrightarrow E_{i+1}$

Морфизм $(\mathbb{E}, \{e_i\}) \longrightarrow (\mathbb{F}, \{f_i\})$ - это набор

$\mathbb{E}_i \xrightarrow{\varphi_i} F_i$ т.ч.

$$\forall i \quad \begin{tikzcd} T \wedge E_i \arrow[r] \arrow[d] & T \wedge F_i \arrow[d] \\ E_{i+1} \arrow[r] & F_{i+1} \end{tikzcd}$$

— [строго] коммутативны

$Sp(Spc_\bullet, T)$ - категория T-спектров

Опр. Spc_*^{ft} — наименьшая подкатегория такая, что

$\bigcap$

Spc_*

① $X \in Sm/_k \rightsquigarrow X \in Spc^{ft}$

② $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r, tail] & Y' \end{tikzcd}$$

Если $A, X, Y \in Spc^{ft}$, то $Y' \in Spc^{ft}$

Аналогично,

$Spc_\bullet^{ft}$ — наименьшая такая, что

$\bigcap$

$Spc_\bullet$

① $X_+ \in Spc^{ft}$

② $A, X, Y \in Spc_\bullet^{ft} \rightsquigarrow Y' \in Spc_\bullet^{ft}$

$(E, \{e_i\}) \rightsquigarrow \forall n \in \mathbb{Z} \qquad E^n : Spc_\bullet^{ft} \longrightarrow Sets$

$$E^n(X,x) = \varinjlim_i Hom_{H_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)}(T^{\wedge i} \wedge (X,x), E_{i+n})$$

$$\swarrow$$

$$Hom(T^{1+i} \wedge (X,x), T \wedge E_{i+n})$$

$$\searrow$$

$$Hom(T^{1+i} \wedge (X,x), E_{1+i+n})$$

<u>Опр.</u> $E \xrightarrow{\varphi} F$ — <u>стабильно слабая эквивалентность</u>, если

$\forall n \in \mathbb{Z} \quad E^n \longrightarrow F^n$ — изоморфизм функторов

(аналогу компактно порожденных пр-в: $E^n(X) \xrightarrow{\sim} F^n(X)$)

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\mathrm{Hom}_{Spc}(X, \varinjlim_{\alpha} Y_\alpha) = \varinjlim \mathrm{Hom}_{Spc}(X, Y_\alpha) \quad \forall X \in Spc^{ft}$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $H[[T^{-1}]] = Sp(Spc_\bullet, T)[W^{-1}_{\text{stable w.e.}}]$

стабильно слабые эквивалентности

$(X, x) \in Spc_\bullet$

$(X, T\wedge X, T\wedge T\wedge X, \ldots)$

$$T\wedge(T^{\wedge i}\wedge X) \xrightarrow[\text{id}]{e_i} T^{\wedge(1+i)}\wedge X.$$

$$\Sigma^\infty_T(X, x) := ((X, T\wedge X, \ldots), e_i = \mathrm{id})$$

Теперь функтор $(X, x) \longmapsto (X, x)\wedge T$ продолжается легко, автоэквивалентность — несложно;

$$\Big(\bigvee_{\alpha\in A}(E^\alpha)\Big)_n = \bigvee_{\alpha\in A} E^\alpha_n,$$

$$\begin{tikzcd}
T\wedge(\vee E^\alpha)_n \arrow[r, equal] & T\wedge(\vee E^\alpha_n) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \vee(T\wedge E^\alpha_n) \arrow[d] \\
& (\vee E^\alpha)_{n+1} \arrow[r, equal] & \vee E^\alpha_{n+1}
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \varprojlim{}^1 \to \mathrm{Hom}_{H[[T^{-1}]]}(\mathbb{E}, \mathbb{F}) \to \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{H^{\mathbb{A}^1}_\bullet(k)}(E_n, F_n) \to 0$$