Иван Панин

22.09.2014

Сформулируем некоторые задачи (проблемы).

Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ от нескольких переменных над полем комплексных чисел. Рассмотрим в нем идеал $\mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_n)$. Это идеал многочленов, обращающихся в 0 в точке $(0, \dots, 0)$. Пусть $\mathcal{O} = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}}$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{O} = \{\frac{f(x_1,\dots,x_n)}{g(x_1,\dots,x_n)} \mid g(0, \dots, 0) \neq 0\}$. При этом $\mathcal{O} \subseteq K = \mathbb{C}(X_1, \dots, X_n) = \{\frac{f}{h} \mid h \neq 0\}$.

Задача (решенная, Ojanguren, 1984): пусть $\sum_{i=1}^{2n} a_i T_i^2$ — квадратичная форма над этим кольцом такая, что $a_i \in \mathcal{O}^*$. Допустим, что над K форма $\sum_{i=1}^{2n} a_i T_i^2$ изоморфна форме $T_1T_{n+1} + T_2T_{n+2} + \dots + T_nT_{2n}$. Докажите, что эти формы изоморфны уже над $\mathcal{O}$.

Напомним, что формы A и B от n переменных над кольцом R (считаем, что $1/2 \in R$) изоморфны, если найдется обратимая матрица $\Lambda \in M_n(R)$ такая, что $\Lambda^t A \Lambda = B$.

Пусть $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \mid (b, p) = 1\}$, $\mathfrak{m} = (p, X_1, \dots, X_n)$. Рассмотрим кольцо $\mathcal{O}' = \mathbb{Z}_{(p)}[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}} = \{\frac{f(X_1,\dots,X_n)}{g(X_1,\dots,X_n)} \mid (g(0, \dots, 0), p) = 1\}$. При этом $\mathcal{O}' \subseteq K'$, где K' — поле частных кольца $\mathcal{O}'$.

Открытая задача: то же самое для $\mathcal{O}'$ и K'. А именно, пусть $\sum_{i=1}^{2n} a_i T_i^2$ — квадратичная форма над этим кольцом такая, что $a_i \in \mathcal{O}'^*$. Допустим, что над K' форма $\sum_{i=1}^{2n} a_i T_i^2$ изоморфна форме $T_1T_{n+1} + T_2T_{n+2} + \dots + T_nT_{2n}$. Докажите, что эти формы изоморфны уже над $\mathcal{O}'$.

Пусть теперь $\mathcal{O}$, K — такие, как выше, $\lambda \in \mathcal{O}^*$. Рассмотрим уравнение

$$T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2 = \lambda \tag{1}$$

Теорема 0.1. (Колье-Телен, Оянгурен, 1991). Если уравнение (1) имеет решение над K, то оно имеет решение и над $\mathcal{O}$.

Проблема: пусть $\mathcal{O}'$, K' — такие, как выше, $\lambda' \in (O')^*$. Рассмотрим уравнение

$$T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2 = \lambda' \tag{2}$$

Доказать, что если уравнение (2) имеет решение над K', то оно имеет решение над $\mathcal{O}'$.

Пусть X — поверхность (или вообще, достаточно хорошее топологическое пространство). Рассмотрим векторное расслоение E над $I \times X$, где $I = [0, 1]$. Рассмотрим его слои E_0 над $0 \times X$ и E_1 над $1 \times X$. Утверждение: E_0 и E_1 изоморфны как расслоения над X. Это означает, что существует гомеоморфизм $\varphi\colon E_0 \to E_1$, согласованный с проекциями на X такой, что $\varphi_x\colon E_0(x) \to E_1(x)$ — изоморфизм векторных пространств.

Ааналогичный факт имеет место и в алгебраическом контексте, если его правильно сформулировать.

Пусть $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, P — проективный конечно порожденный R-модуль, то есть, $P \oplus Q \cong R^k$ для некоторого R-модуля Q и натурального k. Тогда $P \cong R^m$ для некоторого m (это теорема Квиллена–Суслина, 1976).

Пусть даны многочлены $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ такие, что для любой точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ найдется i такой, что $f_i(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. Тогда строка $(f_1, \dots, f_n)$ дополняется до обратимой матрицы из $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n])$.

Теорема 0.2. (Ашок, Фазель). Рассмотрим кольца $R_1 = \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]_g = \{\frac{f}{g^n} \mid n \geq 0\}$ и $R_2 = \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]/(h)$. Геометрически первое соответствует дополнению к $\{g = 0\}$ в $\mathbb{C}^3$, а второе — множеству $\{h = 0\}$ в $\mathbb{C}^4$. Рассмотрим проективный модуль P_i ранга 2 над R_i. Тогда P_i изоморфен R_i^2 тогда и только тогда, когда $c_1(P_i) = 0$ и $c_2(P_i) = 0$.

Намек на то, что такое c_1: кольцам R_1, R_2 соответствуют геометрические объекты $S_1 = \operatorname{Spec}(R_1)$ и $S_2 = \operatorname{Spec}(R_2)$. Проективному модулю ранга 2 над R_i соответствует векторное расслоение ранга 2 над S_i, которое мы обозначим через E_i. Пусть $t_1, t_2 \in P_1$. Рассмотрим $t_1 \wedge t_2 \in \bigwedge^2 P_1$. Тогда $(t_1 \wedge t_2)(x) \in \bigwedge^2(E_1(x))$. Заметим, что $\dim \Lambda^2(E_1(x)) = 1$. Рассмотрим $\{x \in S_1 \mid (t_1 \wedge t_2)(x) = 0\} = \{x \in S_1 \mid t_1(x)$ пропорционально $t_2(x)$ в $E_1(x) = P_1/\mathfrak{m}_x P_1\}$. Это задает гиперповерхность D_1 в S_1. Это и есть c_1: равенство $c_1(P_1) = 0$ равносильно тому, что D_1 задается одним уравнением.

Что такое c_2? Элемент $t \in P_1$ задает сечение $t\colon S_1 \to E_1$; это дает нам гиперповерхность $\mathfrak{L}_1$ коразмерности 2. Отсюда и получаем c_2; равенство $c_2(P_i) = 0$ равносильно тому, что $\mathfrak{L}_1$ задается двумя уравнениями.

Пусть Top — категория хороших топологических пространств. Рассмотрим также категорию $\mathbb{Z}$-градуированных $\mathbb{Q}$-векторных пространств; обозначим ее через $DM_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{top}}$. Сопоставим топологическому пространству X его сингулярный комплекс $C_*(X)$. Рассмотрим комплекс $C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ и его гомологии $M_{\mathbb{Q}}(X) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_i(X, \mathbb{Q})$. Это объект описанной выше категории $\mathbb{Z}$-градуированных $\mathbb{Q}$-векторных пространств. Соответствие функториально: если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, то возникает морфизм $f_*\colon M_{\mathbb{Q}}(X) \to M_{\mathbb{Q}}(Y)$.

Объект $M_{\mathbb{Q}}(X)$ называется **рациональным топологическим мотивом** пространства X. Что такое когомологии X? Ответ:

$$H^r(X, \mathbb{Q}) = \operatorname{Hom}_{DM_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{top}}}(M_{\mathbb{Q}}(X), M_{\mathbb{Q}}(\mathrm{pt})[r]). \tag{3}$$

Иными словами, функтор r-тых когомологий представляется объектом $M_{\mathbb{Q}}(\mathrm{pt})[r]$. Мы знаем градуированное векторное пространство $M_{\mathbb{Q}}(\mathrm{pt})$: у него стоит $\mathbb{Q}$ в позиции 0, и 0 во всех остальных позициях. Мы знаем и $M_{\mathbb{Q}}(\mathrm{pt})[r]$; это $M_{\mathbb{Q}}(\mathrm{pt})$ со сдвигом градуировки: у него стоит $\mathbb{Q}$ в позиции r и 0 во всех остальных. Поэтому $\operatorname{Hom}_{DM_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{top}}}(M_{\mathbb{Q}}(X), M_{\mathbb{Q}}(\mathrm{pt})[r]) = \operatorname{Hom}(H_r(X, \mathbb{Q}), \mathbb{Q})$, и формула (3) справедлива.

Теперь мы хотим определить целочисленные мотивы. Для этого заменим категорию $DM_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{top}}$ на другую. Рассмотрим категорию комплексов $\mathbb{Q}$-векторных пространств, и отображение $\varphi\colon A_\bullet \to B_\bullet$ назовем изоморфизмом, если на гомологиях оно индуцирует изоморфизм $H_i(A_\bullet) \to H_i(B_\bullet)$. Имеется функтор из этой категории в $DM_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{top}}$, сопоставляющий комплексу $A_\bullet$ пространство $\bigoplus_i H_i(A_\bullet)$. Есть функтор и в обратную сторону:

$$\bigoplus_j V_j \mapsto (\dots \to V_1 \to V_0 \to V_{-1} \to \dots),$$

где все морфизмы в комплексе справа нулевые.

Эти два функтора устанавливают эквивалентность категорий. Поэтому категорию $\mathbb{Q}$-мотивов можно заменить на категорию комплексов $\mathbb{Q}$-векторных пространств, в которой некоторые отображения объявлены изоморфизмами.

Теперь заменим $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{Z}$ и рассмотрим категорию комплексов абелевых групп, в которой некоторые отображения (те, которые индуцируют изоморфизмы на гомологиях) объявлены изоморфизмами. Эта категори называется **производной категорий** категории абелевых групп и обозначается через D_{Ab}; мы также будем обозначать ее через M^{top}. Осталось придумать функтор целочисленного мотива $M^{\mathrm{top}}\colon \mathrm{Top} \to D_{\mathrm{Ab}}$. Это несложно: $X \to C_*(X)$.

Заметим, что если $f\colon X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то $f_*\colon C_*(X) \to C_*(Y)$ — изоморфизм в M^{top}. Поэтому функтор мотива M^{top} пропускается через гомотопическую категорию. К объекту $M^{\mathrm{top}}(X) = C_*(X)$ нужно относиться как к линеаризации пространства X.

В следующий раз мы докажем аналог формулы (3):

$$H^r(X, \mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}_{M^{\mathrm{top}}}(M(X), M(\mathrm{pt})[r]).$$