Иван Панин

29.09.2014

1 Мотивировка определения мотива алгебраического многообразия

Мы желаем иметь категорию мотивов $DM(k)$, где k — поле, вместе с функтором $\mathrm{Sm}(k) \xrightarrow{M} DM(k)$: у каждого многообразия есть мотив $M(X)$, и для каждого морфизма многообразий $X \xrightarrow{f} Y$ должен быть определен морфизм $M(X) \xrightarrow{M(f)} M(Y)$. Эта конструкция должна быть аналогична функтору, который сопоставляет CW-пространству X его сингулярный комплекс $C_*(X) = M^{\mathrm{top}}(X)$: это функтор из категории CW-пространств в производную категорию категории абелевых групп.

Мы будем считать, что все наши алгебраические многообразия квазипроективны. Определим сначала категорию $\mathrm{Cor}(k)$.

Определение 1.1. Объекты категории $\mathrm{Cor}(k)$ — гладкие многообразия над k. Морфизмы из X в Y образуют свободную абелеву группу, порожденную замкнутыми неприводимыми подмногообразиями Z в $X \times Y$, конечными сюръективными над X:

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \bigoplus_{Z \subseteq X \times Y} \mathbb{Z} \cdot [Z].$$

Неформально мы думаем о подмногообразии $Z \subseteq X \times Y$, конечном и сюръективном над X, как о «многозначном» отображении из X в Y.

Определение 1.2. Пусть Y — многообразие. Рассмотрим $A_Y = \coprod_{n \geq 0} S^n(Y)$, где

$$S^n(Y) = \frac{\overbrace{Y \times \cdots \times Y}^{n}}{S_n},$$

то есть, $k[S^n(Y)] = k[\underbrace{Y \times \cdots \times Y}_{n}]^{S_n}$. Заметим, что при $n = 0$ получаем $S^0(Y) = \mathrm{pt} = \mathrm{Spec}(k)$.

Сопоставим теперь каждому $U \in \mathrm{Sm}(k)$ дизъюнктное объединение

$$A_Y(U) = \coprod_{n \geq 0} \mathrm{Mor}(U, S^n Y).$$

Тогда $A_Y(U)$ является коммутативным моноидом. Действительно, имеется отображение $S^m(Y) \times S^n(Y) \to S^{m+n}(Y)$:

$$\frac{\overbrace{Y \times \cdots \times Y}^{m}}{S_m} \times \frac{\overbrace{Y \times \cdots \times Y}^{n}}{S_n} \to \frac{\overbrace{Y \times \cdots \times Y}^{m+n}}{S_{m+n}}$$

(с учетом стандартного вложения $S_m \times S_n \to S_{m+n}$.

На самом деле, верно чуть больше: A_Y — коммутативный моноид в категории многообразий над k.

Теорема 1.3 (Воеводский–Суслин)**.** Пусть $X \in \mathrm{Sm}(k)$, и пусть $A_Y(X)^+$ обозначает группу Гротендика, соответствующую моноиду $A_Y(X)$. Тогда $\mathrm{Cor}(X,Y)$ канонически изоморфно $A_Y(X)^+$.

Построим стрелочку из $\left(\coprod_{n\geq 0} Map(X, S^n(Y))\right)^+$ в $\mathrm{Cor}(X,Y)$. Пусть $\varphi\colon X \to S^nY$. Построим цикл Z в $X \times Y$. Для этого сначала построим «универсальный» цикл Z_Y в $S^n(Y) \times Y$. Положим $Z_Y = \{((y_1,\ldots,y_n),y) \mid y \in \{y_1,\ldots,y_n\}\}$. Рассмотрим отображение $\varphi \times \mathrm{id}_Y\colon X \times Y \to (S^nY) \times Y$ и возьмем прообраз Z_Y относительно этого отображения. Получится цикл $\varphi^*(Z_Y)$ в $X \times Y$. Итак, мы сопоставили морфизму $\varphi\colon X \to S^n$ цикл $Z_\varphi = \varphi^*(Z_Y) \subseteq X \times Y$.

Элемент $\sum m_i[Z_i] \in \mathrm{Cor}(X,Y)$ называется **эффективным**, если все $m_i \geq 0$. На самом деле, теорема Воеводского–Суслина утверждает, что все эффективные элементы можно восринимать как элементы моноида $A_Y(X)$.

Теперь мы желаем задать композицию $\mathrm{Cor}(X,Y) \times \mathrm{Cor}(Y,W) \to \mathrm{Cor}(X,W)$.

Построим сначала отображение

$$\left(\coprod_{n\geq 0} \mathrm{Map}(X, S^n(Y))\right) \times \left(\coprod_{n'\geq 0} \mathrm{Map}(Y, S^{n'}(W))\right) \to \left(\coprod_{n''\geq 0} \mathrm{Map}(X, S^{n''}(W))\right).$$

Сначала считаем, что $k = \overline{k}$. На точках это выглядит так: если $\varphi\colon X \to S^n(Y)$ и $\psi\colon Y \to S^{n'}(W)$, можно рассмотреть $S^n(\psi)\colon S^n(Y) \to S^n(S^{n'}(W))$ и взять композицию

$$X \xrightarrow{\varphi} S^n(Y) \xrightarrow{S^n(\psi)} S^n(S^{n'}(W)) \to S^{nn'}(W).$$

Несложно проверить, что так получается корректно определенное отображение $\mathrm{Cor}(X,Y) \times \mathrm{Cor}(Y,W) \times \mathrm{Cor}(X,W)$.

Можно описать его напрямую (без теоремы Воеводского–Суслина). Пусть $Z' \subseteq X \times Y$, $Z'' \subseteq Y \times W$ — два цикла. Рассмотрим $Z' \times W, X \times Z'' \subseteq X \times Y \times W$. Можно рассмотреть пересечение $(Z' \times W) \cdot (X \times Z'')$. Это нужно делать аккуратно: пересечение может не быть трансверсальным (помогает Tor-формула). Благодаря специфике циклов Z', Z'' окажется, что это пересечение конечно над X. Теперь можно спроектировать полученное пересечение на $X \times W$ и получить нужный цикл в $X \times W$.

Пример: пусть $X = \coprod_{i=1}^k \mathrm{pt}$, $Y = \coprod_{i=1}^m \mathrm{pt}$, $W = \coprod_{i=1}^n \mathrm{pt}$, Тогда $\mathrm{Cor}(X,Y) = M_{k\times m}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Cor}(Y,W) = M_{m\times n}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Cor}(X,W) = M_{k\times n}(\mathbb{Z})$, и отображение композиции — обычное произведение матриц. Видим, что композиция ассоциативна.

Осталось определить тождественное отображение: $\mathrm{id}_X = [\Delta_X] \in \mathrm{Cor}(X,X)$ — класс диагонали. Нетрудно видеть, что в случае $X = \coprod_{i=1}^k \mathrm{pt}$ действительно получим единичную матрицу.

Замечание 1.4. Имеется функтор $\mathrm{Sm}(k) \xrightarrow{i} \mathrm{Cor}(k)$, сопоставляющий многообразию X его само, а морфизму $f\colon X \to Y$ его график $\Gamma_F \subseteq X \times Y$.

Опишем классический аналог функтора i. имеется функтор из категории конечных множеств в категорию свободных абелевых групп: сопоставим множеству X группу $\mathbb{Z}[X]$, а морфизму $f\colon X \to Y$ — отображение $\mathbb{Z}(f)$.

Итак, мы построили категорию $\mathrm{Cor}(k)$.

Определение 1.5. Предпучок абелевых групп с трансферами — это контравариантный функтор $\mathrm{Cor}(k)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{Ab}$, для которого $\mathcal{F}(X \coprod Y) \to \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y)$ — изоморфизм. Из этого, в частности, следует, что $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$.

Замечание 1.6. Категория PreSwT является абелевой.

Определение 1.7. Пучок Зариского с трансферами — это такой предпучок $\mathcal{F}$ с трансферами, что $\mathcal{F}|_{\mathrm{Sm}}$ — пучок Зариского. Более аккуратно, $\mathcal{F} \circ i\colon \mathrm{Sm}(k) \to \mathrm{Ab}$ — пучок Зариского.

Определение 1.8. Предпучок абелевых групп $\mathcal{G}\colon \mathrm{Sm}(k) \to \mathrm{Ab}$ называется **пучком Зариского**, если для любого $X \in \mathrm{Sm}(k)$ и любого открытого по Зарискому покрытия $U \cup V = X$ квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{G}(V) \arrow[r] & \mathcal{G}(U \cap V) \end{tikzcd}$$

декартов. Декартовость можно переформулировать так: последовательность

$$0 \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{G}(U) \oplus \mathcal{G}(V) \to \mathcal{G}(U \cap V)$$

точна.

Замечание 1.9. Категория ZSwT пучков Зариского с трансферами не является абелевой. Пусть $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \ker(\varphi) \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \to \mathrm{coker}(\varphi) \to 0$$

в категории PreSwT. При этом $\ker(\varphi)$ уже является пучком. С коядром же нужно проводить операцию шифификации и рассматривать пучок $\widetilde{\mathrm{coker}}(\varphi)$. Но он уже перестанет быть предпучком с трансферами.

Однако, если $\mathcal{H}$ — предпучок, и для любого X морфизм $\mathcal{H}(X) \xrightarrow{p^*} \mathcal{H}(X \times \mathbb{A}^1)$ является изоморфизмом (здесь $p\colon X \times \mathbb{A}^1 \to X$ — проекция), то существует единственное расширение $\widetilde{H}$ на $\mathrm{Cor}(k)$ такое, что морфизм шифификации $\mathcal{H} \to \widetilde{\mathcal{H}}$ является морфизмом в PreSwT.

Пожелание: категория NSwT пучков с трансферами по отношению к некоторой топологии должна быть абелева. Пусть $D(\mathrm{NSwT})$ — ее производная категория. В ней мы выберем подкатегорию $M(k)$; ее объекты — комплексы $A^\bullet$ такие, что $h^i(A^\bullet)$ *гомотопически инвариантны*, то есть, $h^i(A^\bullet)(X) \to h^i(A^\bullet)(X \times \mathbb{A}^1)$ — изоморфизм для любого X. Здесь через $h^i(A^\bullet)$ обозначены когомологии комплекса $A^\bullet$: $h^i(A^\bullet) = \mathrm{Ker}(A^i \to A^{i+1})/\mathrm{Im}(A^{i-1} \to A^i)$.

Определение 1.10. Пусть $k = \overline{k}$ или $k = \mathbb{C}$. Морфизм гладких многообразий $\rho\colon Y' \to Y$ называется **этальным в точке** $y' \in Y'$, если $\dim T_{Y',y'} = \dim T_{Y,y}$ (где $y = \rho(y')$) и $T_{Y',y'} \xrightarrow{d\rho} T_{Y,y}$ — изоморфизм. Морфизм $\rho\colon Y' \to Y$ **этален**, если он этален в каждой точке $y' \in Y'$.

Определение 1.11. Пусть $X \in \mathrm{Sm}(k)$. Рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi'"] & X' \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, hook, "j"] & X \end{tikzcd},$$

где j — открытое по Зарискому вложение, X' — гладкое, π — этальный морфизм (из этого следует, что и π' этален), квадрат декартов (то есть, $\pi^{-1}(U) = U'$), и $\pi|_{Z'}\colon Z' \to Z$ — изоморфизм (где $Z' = X' \setminus U'$, $Z = X \setminus U$. Такой квадрат называется **элементарным выделенным квадратом**.

Примеры 1.12. 1. Пусть $X = U \cup V$ — покрытие по Зарискому. Тогда квадрат

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & V \arrow[d, hook] \\ U \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

является элементарным выделенным квадратом.

2. См. фото.

Замечание 1.13. Если X', X — многообразия над $\mathbb{R}$, во втором примере нужно требовать, чтобы $\mathbb{R}(x) = \mathbb{R}(x')$.

Пример 1.14.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{\pm i\} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{i\} \arrow[d] & \{-i\} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\cong"] \\
\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \setminus \{\pm i\} \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} & \{\pm i\} \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

Определение 1.15. Пучок абелевых групп Нисневича на $\mathrm{Sm}(k)$ — это такой предпучок $\mathcal{F}\colon \mathrm{Sm}\, k \to \mathrm{Ab}$, что для всякого элементарного выделенного квадрата вида

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi'"] & X' \arrow[d, "\pi"] \\
U \arrow[r, hook, "j"] & X
\end{tikzcd},$$

квадрат

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"] & \mathcal{F}(X') \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "j"] & \mathcal{F}(U')
\end{tikzcd}$$

декартов, то есть, последовательность $0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X') \oplus \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U')$ точна.

Определение 1.16. Пучок Нисневича с трансферами — это такой предпучок $\mathcal{F}\colon \mathrm{Cor}^{\mathrm{op}}(k) \to \mathrm{Ab}$ с трансферами, что $\mathcal{F} \circ i\colon \mathrm{Sm}(k) \to \mathrm{Ab}$ — пучок Нисневича.

Теорема 1.17. Если $\mathcal{F} \in \mathrm{PreSwT}$, то $\widetilde{\mathcal{F}}$ — пучок Нисневича с трансферами.

Категория NSwT пучков Нисневича с трансферами абелева.