Иван Панин

06.10.2014

Мы уже определили, что такое пучок Нисневича с трансферами. Это предпучок $\mathcal{F}\colon \mathrm{Cor}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ такой, что для любого элементарного выделенного квадрата

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi'"] & X' \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, hook, "j"] & X \end{tikzcd},$$

в Sm/k квадрат абелевых групп

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"] & \mathcal{F}(X') \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "j"] & \mathcal{F}(U') \end{tikzcd}$$

декартов, то есть, последовательность $0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X') \oplus \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U')$ точна.

Мы знаем, что категория NSwT пучков Нисневича с трансферами абелева. Поэтому можно рассмотреть ее производную категорию $D(\mathrm{NSwT})$. В ней рассмотрим полную подкатегорию $DM(k)$, состоящую из комплексов (когомологических) $A^\bullet$ таких, что пучковые когомологии $h^i(A^\bullet)$ гомотопически инвариантны. Это условие означает, что

$$h^i(A^\bullet)(X) \xrightarrow{p_X^*} h^i(A^\bullet)(X \times \mathbb{A}^1) \tag{1}$$

является изоморфизмом.

Категория $DM(k)$ называется категорией мотивов.

Определение 0.1. **Мотивный комплекс** — это объект из $DM(k)$, то есть, комплекс $A^\bullet$ пучков Нисневича с трансферами, удовлетворяющий условию 1.

Хочется каждому гладкому многообразию $X \in \mathrm{Sm}/k$ сопоставить его мотив $M(X) \in DM(k)$ ковариантно по X.

Определение 0.2. $\mathbb{A}_k^{r+1} \hookleftarrow \Delta_k^r = \{(x_0, \ldots, x_r) \mid \sum x_i = 1\}$. Очевидно, что $\Delta_k^r \cong \mathbb{A}_k^r$. Мы часто будем писать Δ^r вместо Δ_k^r.

Замечание 0.3. $\Delta^0(k) = \mathrm{Spec}(k) = \mathrm{pt}$.

Если $f\colon U' \to U$ — морфизм в $\mathrm{Sm}(k)$, то есть отображение $f^*\colon \mathrm{Cor}(U, X) \to \mathrm{Cor}(U', X)$: для $\varphi \in \mathrm{Cor}(U, X)$ положим $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ (композиция соответствий). В частности, если $U = \Delta^r$, $U' = \Delta^{r-1}$, и $f = d_i\colon \Delta^{r-1} \to \Delta^r$, то возникает отображение $d_i^*\colon \mathrm{Cor}(\Delta^r, X) \to \mathrm{Cor}(\Delta^{r-1}, X)$. Поэтому можно рассмотреть комплекс

$$\mathrm{Cor}(\Delta^r, X) \xrightarrow{\sum(-1)^i d_i^*} \mathrm{Cor}(\Delta^{r-1}, X) \to \cdots \to \mathrm{Cor}(\Delta^1, X) \xrightarrow{d_0^* - d_1^*} \mathrm{Cor}(\Delta^0, X) \to 0.$$

Далее, для каждого $U \in \mathrm{Sm}/k$ можно рассмотреть комплекс

$$\mathrm{Cor}(\Delta^r \times U, X) \xrightarrow{\sum(-1)^i d_i^*} \mathrm{Cor}(\Delta^{r-1} \times U, X) \to \cdots \to \mathrm{Cor}(\Delta^1 \times U, X) \xrightarrow{d_0^* - d_1^*} \mathrm{Cor}(\Delta^0 \times U, X) \to 0.$$

Сопоставление каждому $U \in \mathrm{Sm}/k$ такого комплекса является контравариантным функтором. Действительно, для $f\colon U' \to U$ возникают вертикальные отображения

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \mathrm{Cor}(\Delta^r \times U, X) \arrow[r, "\sum(-1)^i d_i^*"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\times f)^*"] & \mathrm{Cor}(\Delta^{r-1} \times U, X) \arrow[r] \arrow[d, "(\mathrm{id}\times f)^*"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \mathrm{Cor}(\Delta^r \times U', X) \arrow[r, "\sum(-1)^i d_i^*"] & \mathrm{Cor}(\Delta^{r-1} \times U', X) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Лемма 0.4. Для любого гладкого $X \in \mathrm{Sm}/k$ и для любого r сопоставление $U \mapsto \mathrm{Cor}(\Delta^r \times U, X)$ является пучком Нисневича. Очевидно, что это предпучок на Cor, и что $\mathcal{F}(U_1 \coprod U_2) = \mathcal{F}(U_1) \times \mathcal{F}(U_2)$.

Полученный комплекс пучков Нисневича с трансферами $\mathrm{Cor}(\Delta^\bullet \times -, X)$ обозначается через $M(X)$ и называется **мотивом** пространства X.

Лемма 0.5. $M(X) \in DM(k)$.

Намек на доказательство: у этого комплекса есть когомологии h^i_{pre}, рассматриваемые в категории предпучков, и есть когомологии h^i в категории пучков — они получаются пучкованием когомологий h^i_{pre} Из-за наличия Δ предпучки h^i_{pre} гомотопически инвариантны (по формальным соображениям). Осталось доказать следующую лемму.

Лемма 0.6. Если $\mathcal{F} \in \mathrm{PreSwT}$ гомотопически инвариантен, то ассоциированный пучок $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}$ гомотопически инвариантен.

Доказательство этой леммы весьма нетривиально. Здесь важно наличие трансферов: имеются примеры гомотопически инвариантных предпучков, пучкования которых не гомотопически инвариантны. В частности, доказательство использует следующий факт: если $V \subseteq U \subseteq \mathbb{A}^1$ — открытые вложения, то $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ инъективно. Пусть $i\colon V \hookrightarrow U$; хочется построить $r\colon U \to V$ такое, что композиция $i \circ r$ эквивалентна id_U. Рассмотрим отображение $d_0^* - d_1^*\colon \mathrm{Cor}(\Delta^1 \times U, U) \to \mathrm{Cor}(U, U)$. Оказывается, есть два соответствия Z_0, Z_1 в $\mathrm{Cor}(U, V)$ такие, что $[i \circ Z_1] = [i \circ Z_0] + [\Delta(U)]$ по модулю образа $\mathrm{Cor}(\Delta^1 \times U, U)$.

Формальные соображения, упомянутые выше, заключаются в следующей лемме.

Лемма 0.7. $\mathcal{G}\colon \mathrm{Sm}/k^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$. Для каждого $U \in \mathrm{Sm}/k$ рассмотрим комплекс абелевых групп $\mathcal{G}(\Delta^\bullet \times U)$:

$$\cdots \to \mathcal{G}(\Delta^{r+1} \times U) \to \mathcal{G}(\Delta^r \times U) \to \mathcal{G}(\Delta^{r-1} \times U) \to \ldots.$$

Он гомотопически эквивалентен комплексу $\mathcal{G}(\Delta^\bullet \times (U \times \mathbb{A}^1))$. Точнее, отображения $p^*\colon \mathcal{G}(\Delta^\bullet \times U) \to \mathcal{G}(\Delta^\bullet \times (U \times \mathbb{A}^1))$ и $i_0^*\colon \mathcal{G}(\Delta^\bullet \times (U \times \mathbb{A}^1)) \to\colon \mathcal{G}(\Delta^\bullet \times U)$ задают взаимно обратные гомотопические эквивалентности.

Очевидно, что $i_0^* \circ p^* = \mathrm{id}$. Осталось проверить, что $p^* \circ i_0^*$ гомотопно тождественному. Упражнение: проверьте это на уровне

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(\Delta^1 \times U) \arrow[r, "d_0^* - d_1^*"] \arrow[d] & \mathcal{G}^1(U) \arrow[d] \\
\mathcal{G}(\Delta^1 \times \mathbb{A}^1 \times U) \arrow[r, "d_0^* - d_1^*"] & \mathcal{G}(\mathbb{A}^1 \times U)
\end{tikzcd}$$

Итак, мы определили $M(X) \in DM(k)$. Он ковариантен по Sm/k и даже по $\mathrm{Cor}(k)$.

Теорема 0.8. Пусть $A^\bullet \in DM(k)$. Тогда для любого $X \in \mathrm{Sm}/k$ и для любого r выполнено

$$H^r_{\mathrm{Nis}}(X, A^\bullet) = \mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(X), \mathbb{A}^\bullet[r]).$$

Теорему 0.8 мы разберем потом.

Замечание 0.9. Любой пучок Нисневича является пучком Зариского, поэтому есть гомоморфизм $H^r_{\mathrm{Zar}}(X, \mathbb{A}^\bullet) \to H^r_{\mathrm{Nis}}(X, A^\bullet)$. Оказывается, он является изоморфизмом для любого комплекса $A^\bullet$ пучков Нисневича с трансферами.

Напомним, что $H^r_{\mathrm{Nis}}(X, A^\bullet)$ определяются так: берем квази-изоморфизм $A^\bullet \to I^\bullet$ (где $I^\bullet$ состоит из инъективных пучков) и пишем комплекс $\Gamma(X, I^\bullet)$. Тогда по определению $H^r_{\mathrm{Nis}}(X, A^\bullet) = H^r(\Gamma(X, I^\bullet))$.

Определение 0.10. Напомним, что в $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ есть отмеченная точка 1. Поэтому есть отображения $i_{1,*}\colon M(\mathrm{pt}) \to M(\mathbb{G}_m)$ и $p_*\colon M(\mathbb{G}_m) \to M(\mathrm{pt})$. Композиция $p_* \circ i_{1,*}$ тождественна, поэтому композиция $q = i_{1,*} \circ p^*$ является проектором. Образ проектора $1 - q$ равен $\mathrm{Ker}(p_*)$. Обозначим $\mathbb{Z}(1) = \mathrm{Ker}(p^*)[-1] \subseteq M(\mathbb{G}_m)[-1]$ (с этим сдвигом комплекс будет заканчиваться в позиции 1). Другое обозначение: $M(\mathbb{G}_m^{\wedge 1}) = \mathrm{Ker}(p_*)$.

Обозначим $\mathbb{Z}(0) = M(\mathrm{pt})$. Определим $\mathbb{Z}(2)$ как слагаемое в $M(\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m)[-2]$. Рассмотрим проекции $p_1\colon \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \times 1$, $p_2\colon \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \to 1 \times G_m$ и вложения $i_1\colon \mathbb{G}_m \times 1 \to \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$, $i_2\colon 1 \times \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$. Получаем проекторы $q_1 = i_1 \circ p_1$ и $q_2 = i_2 \circ p_2$. Рассмотрим $\mathrm{Im}((1 - q_1) \circ (1 - q_2)) = \mathrm{Ker}(1 - (1 - q_1) \circ (1 - q_2)) = \mathrm{Ker}(q_1 + q_2 - q_1 q_2)$. Обозначим $\mathbb{Z}(2) = \mathrm{Ker}(q_1 + q_2 - q_1 q_2)[-2] = M(\mathbb{G}_m^{\wedge 2})[-2]$, $\mathbb{Z}(3) = \mathrm{Ker}(q_1 + q_2 + q_3 - q_1 q_2 - q_1 q_3 - q_2 q_3 + q_1 q_2 q_3)[-3] = M(\mathbb{G}_m^{\wedge 3})[-3]$.

Лемма 0.11. $\mathbb{Z}(0)$ квази-изоморфен $\mathbb{Z}$ (пучок, стоящий в позиции 0).

Доказательство. Пусть U неприводимо. Вспомним, что $\mathrm{Cor}(U, \mathrm{pt})$ — это свободная абелева группа, порожденная картинками вида

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[dr] & U \times pt \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Но из конечности и сюръективности $Z \to U$ здесь следует, что $Z = U$. Поэтому $\mathrm{Cor}(U, \mathrm{pt}) = \mathbb{Z} \cdot [U]$. Это означает, что $\mathrm{Cor}(\Delta^r \times U, \mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$; в комплексе

$$\cdots \to \mathrm{Cor}(\Delta^2 \times U, \mathrm{pt}) \to \mathrm{Cor}(\Delta^1 \times U, \mathrm{pt}) \to \mathrm{Cor}(\Delta^0 \times U, \mathrm{pt}) \to 0$$

чередуются морфизмы $\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$. Этот комплекс квази-изоморфен комплексу $\mathbb{Z}$, сконцентрированному в позиции 0. □

Лемма 0.12. Напомним, что через $\mathcal{O}^*$ обозначается пучок обратимых функций: $\mathcal{O}^*(U) = \Gamma(U, \mathcal{O})^*$. Пучок $\mathbb{Z}(1)$ квази-изоморфен $\mathcal{O}^*[-1]$ (пучок, стоящий в позиции 1). Заметим, что $\mathcal{O}^*$ — пучок с трансферами (трансферы — это взятие нормы).

Доказательство. Желаем построить для каждого U естественное отображение $M(\mathbb{G}_m^{\wedge 1})(U) \to \mathcal{O}^*(U) = \Gamma(U, \mathcal{O})^*$, контравариантное по U.

Обозначим через $\mathrm{Cor}(U, \mathbb{G}_m)^0$ подгруппу, порожденную циклами степени 0 над U (степень цикла $Z \subseteq \mathbb{G}_m \to U$ — это $\deg(k(Z) : k(U))$). Имеется отображение

$$\mathrm{Cor}(\Delta^1 \times U, \mathbb{G}_m)^0 \xrightarrow{d_0^* - d_1^*} \mathrm{Cor}(U, \mathbb{G}_m)^0.$$

На $\mathbb{G}_m$ есть функция t; ее можно перенести на Z и получить функцию $t|_Z \in k[Z] \subseteq k(Z)$. Отправим ее в $N(t|_Z) = N_{k(Z)/k(U)}(t|_Z) \in k(U)^*$. Проверим, что результат лежит в $k[U]^*$. Нужно для каждого дивизора D проверить, что нормирование полученной функции, связанное с D, не меньше 0. Рассмотрим Z^{norm} и заметим, что образ целого элемента при отображении нормы является целым.

Мы построили гомоморфизм $\mathrm{Cor}(U, \mathbb{G}_m)^0 \to \mathcal{O}^*(U)$. Оказывается, у комплекса $\mathrm{Cor}(\Delta^\bullet \times U, \mathbb{G}_m)$ нет гомологий, кроме первой, и построенный гомоморфизм индуцирует изоморфизм на гомологиях. □

Мораль этой леммы: пучок $\mathcal{O}^*$ совершенно «не свободен», он сложен. Простые объекты («свободные») представимы. Построенный квази-изоморфизм $\mathbb{Z}(1) \to \mathcal{O}^*[-1]$ означает, что мы построили у $\mathcal{O}^*[-1]$ резольвенту из «свободных» объектов.