Иван Панин

13.10.2014

В прошлый раз мы определили комплексы $\mathbb{Z}(0), \mathbb{Z}(1), \mathbb{Z}(2), \ldots$ следующим образом: $\mathbb{Z}(n) = M(\mathbb{G}_m^n)[-n]$. Мы показали, что $\mathbb{Z}(0)$ квази-изоморфен $\mathbb{Z}$ (комплексу с $\mathbb{Z}$ в нулевой позиции и 0 в остальных), и начали разговор про $\mathbb{Z}(1)$.

Теорема 0.1. $\mathbb{Z}(1)$ квази-изоморфен $\mathcal{O}^*[-1]$ (то есть, комплексу с $\mathcal{O}^*$ в первой позиции и 0 в остальных.

Приведем набросок доказательства. Мы построим отображение нормы $N\colon \mathbb{Z}(1)(U) \to \mathcal{O}^*[-1](U)$ и покажем, что оно является квази-изоморфизмом. Пусть U — гладкое аффинное многообразие. Напомним, что $\mathbb{Z}(1)(U) \subseteq M(\mathbb{G}_m)[-1](U)$. Мотив $\mathbb{G}_m(U)$ выглядит так:

$$\cdots \to \mathrm{Cor}(\Delta^1 \times U, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{i_0^* - i_1^*} \mathrm{Cor}(U, \mathbb{G}_m).$$

Рассмотрим отображение $M(\mathbb{G}_m)[-1](U) \to M(\mathrm{pt})[-1](U)$:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] \\
 & & & M(\mathbb{G}_m^1)[-1] \arrow[d] \\
\ldots & \mathrm{Cor}(\Delta^1 \times U, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "i_0^* - i_1^*"] \arrow[d, "\deg'"] & \mathrm{Cor}(U, \mathbb{G}_m) \arrow[d, "\deg"] & M(\mathbb{G}_m)[-1](U) \arrow[d] \\
\ldots & \mathrm{Cor}(\Delta^1 \times U, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cor}(U, pt) \arrow[d, equal] & M(\mathrm{pt})[-1](U) \arrow[dd] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d] & \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

где $\deg\colon [Z] \mapsto \deg(Z : U) = \deg(k(Z) : k(U))$ и $\deg'\colon [Z'] \mapsto \deg(k(Z') : k(\Delta^1 \times U))$. Таким образом, ядра вертикальных стрелок состоят из циклов степени 0.

Композиция $\Delta^i \times U \times \{1\} \to \Delta^i \times U \times \mathbb{G}_m$ является циклом степени 1.

Напомним, что по определению $\mathrm{Cor}(V, \mathbb{G}_m^1)$ равно ядру отображения $\mathrm{Cor}(V, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Cor}(V, \mathrm{pt})$.

Лемма 0.2. $\mathrm{Cor}(V, \mathbb{G}_m^1$ есть свободная абелева группа с базисом $[Z] - \deg(Z : V)[V \times 1]$, где $Z \neq [V \times 1]$.

Пусть V — гладкое аффинное, $Z \subseteq V \times \mathbb{G}_m$. Рассмотрим проекцию $V \times \mathbb{G}_m \to G_m$. Получаем морфизм $k[\mathbb{G}_m] \to k[Z]$. Возьмем его композицию с морфизмом $k[Z] \to k[Z^{\mathrm{norm}}]$, где $k[Z^{\mathrm{norm}}]$ — целое замыкание $k[Z]$ в $k(Z)$. Соответствующий морфизм $Z^{\mathrm{norm}} \to Z$ конечен и сюръективен, как и проекция $Z \to V$.

У нас есть отображение нормы $k(Z)^* \to k(V)^*$. При этом диаграмма

$$\begin{tikzcd}
k[Z^{\mathrm{norm}}]^* \arrow[r] \arrow[d, "N"] & k(Z^{\mathrm{norm}})^* \arrow[r, equal] & k(Z)^* \arrow[d, "N"] \\
k[V]^* \arrow[rr] & & k(V)^*
\end{tikzcd}$$

коммутативна: норма целого элемента является целым элементом. В характеристике 0 это показывается просто: пусть $\alpha \in k(Z)$ цел, рассмотрим всевозможные вложения $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \colon k(Z) \to \overline{k(Z)}$. По определению $N(\alpha) = \prod_\sigma \sigma(\alpha) \in k(V)$. Но для любого σ_i элемент $\sigma(\alpha)$ цел, потому и $N(\alpha)$ цел.

Проследим за образом элемента $t \in k[\mathbb{G}_m]$ в $k[Z^{\mathrm{norm}}]$. Итак, по каждому $Z \subseteq V \times \mathbb{G}_m$, конечному и сюръективному над V, мы построили элемент $[Z]^*(t) = N(t|_{Z^{\mathrm{norm}}})$. Если $Z = V \times 1$, мы получим $[Z]^*(t) = 1$. Получаем гомоморфизм $\mathrm{Cor}(V, \mathbb{G}_m^1) \to k[V]^*$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cor}(\Delta^1 \times U, \mathbb{G}_m^1 \arrow[r] \arrow[d, "N"] & \mathrm{Cor}(U, \mathbb{G}_m)^1 \arrow[d, "N"] \\
k[\Delta^1 \times U]^* \arrow[r, "i_0^* - i_1^*"] & k[U]^*
\end{tikzcd}$$

Но $k[Delta^i \times U]^* = k[U][t]^* = k[U]^*$. Поэтому все члены нижнего комплекса равны $k[U]^*$, и стрелки в нем — чередующиеся id и 0.

Предложение 0.3. Отображение N задает квази-изоморфизм комплексов.

Лирическое отступление. Для каждого CW-комплекса X есть пространство $\mathrm{Map}(X, S^1) = [X, S^1] = H^1(X, \mathbb{Z})$. При этом $S^1 = K(\mathbb{Z}, 1)$; напомним, что

$$\pi_i(K(\mathbb{Z},1)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом S^1 гомотопически эквивалентен $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Значит, $\mathrm{Map}(X, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ похоже на $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^*$.

Мы построим точные последовательности

$$0 \to G(\Delta^i \times U) \to \mathrm{Cor}(\Delta^i \times U, \mathbb{G}_m^1) \to k[U]^* \to 0.$$

Положим

$$G(U) = \{f \in k(U \times \mathbb{P}^1)^* \mid f|_{U \times \{0,\infty\}} = 1\}.$$

Здесь под равенством $f|_{U \times \{0,\infty\}} = 1$ имеется в виду, что f определена (то есть, лежит в $\mathcal{O}_{U \times \mathbb{P}^1, U \times 0 \cup U \times \infty}$) и равна 1 в каждой точке $U \times \infty$ и $U \times 0$.

Зададим отображение $\mathrm{div} \colon G(U) \to \mathrm{Cor}(U, \mathbb{G}_m)$: сопоставим каждой такой функции f ее дивизор $\mathrm{div}(f) \in \mathrm{Cor}(U, \mathbb{G}_m)$ (легко видеть, что $\mathrm{div}(f)$ действительно конечен над U).

Покажем, что последовательность комплексов

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \\
G(\Delta^1 \times U) \arrow[r] \arrow[d] & G(U) \arrow[d] \\
\mathrm{Cor}(\Delta^1 \times U, \mathbb{G}_m^1) \arrow[r] \arrow[d, "N"] & \mathrm{Cor}(U, \mathbb{G}_m)^1 \arrow[d, "N"] \\
k[U]^* \arrow[r] & k[U]^*
\end{tikzcd}$$

точна. Если $\mathrm{div}(f)=0$, то f — регулярная функция на $U\times\mathbb{G}_m$. Она регулярна в окрестности $U\times\{0\}$ и $U\times\{\infty\}$. Поэтому она регулярна на $U\times\mathbb{P}^1$, и потому $f=p^*(f_0)$, где $f_0\in k[U]$. Так как $f|_{U\times 0}=1$, то $f_0=1$, и потому $f=p_U^*(1)=1$.

Рассмотрим дивизор $[Z]-\deg(Z:U)[U\times 1]\in \mathrm{Div}(U\times\mathbb{P}^1)$. Ему соответствует линейное расслоение L.

Сейчас нам нужно проинтерпретировать $k[U]^*$ как $\mathrm{Pic}(U\times\mathbb{P}^1, U\times\{0,\infty\})$.

Пусть X гладкое, $Y\subseteq X$ — замкнутое гладкое.

Определение 0.4.

$$\mathrm{Div}(X,Y)=\bigoplus_{\substack{D\subseteq X\setminus Y,\\ D \text{ неприводим},\\ D \text{ замкнут в } x}} \mathbb{Z}\cdot[D].$$

Определение 0.5. $\mathrm{Pic}(X,Y)$ состоит из классов изоморфизмов пар $(\mathcal{L},\mathcal{O}_Y\xrightarrow{s}\mathcal{L}|_Y)$ таких, что $\mathcal{L}$ — линейное расслоение над X, и s — сечение, которое является изоморфизмом. Иными словами, пара состоит из линейного расслоения на X и его тривиализации на Y. Две пары $(\mathcal{L},s)$ и $(\mathcal{L}',s')$ изоморфны, если существует изоморфизм $\varphi\colon\mathcal{L}\to\mathcal{L}'$, коммутирующий с тривиализациями.

Определение 0.6.

$$G_{X,Y}=\{f\in k(X)^*\mid f|_Y=1\},$$

где под равенством $f|_Y=1$ имеется в виду, что в каждой точке $y\in Y$ функция f регулярна и $f(y)=1$.

Определение 0.7. $\Gamma(X,G_{X,Y})=g\in\Gamma(X,\mathcal{O})^*\mid G|_Y=1\}$

Определение 0.8. $G_X:=\mathcal{O}_X^*$. Имеется отображение $G_X\to i_*(G_Y)$, $f\mapsto f|_Y$, где $i\colon Y\to X$ — вложение. Этот гомоморфизм пучков сюръективен, и его ядро есть в точности $G_{X,Y}$.

Лемма 0.9. Последовательность

$$\Gamma(X,\mathcal{O}_X^*)\to\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y^*)\to\mathrm{Pic}(X,Y)\to\mathrm{Pic}(X)\to\mathrm{Pic}(Y)$$

точна.

Доказательство. Исходя из определений. □

Лемма 0.10. Если Y имеет аффинную открытую окрестность $V\subseteq X$, то

$$0\to\Gamma(X,G_{X,Y})\to G\to\mathrm{Div}(X,Y)\to\mathrm{Pic}(X,Y)\to 0.$$

Построим отображение $G\to\mathrm{Div}(X,Y)$ так: $f\mapsto\mathrm{div}(f)$. $f\in k(X)=k(V)$, и мы можем записать $f=g/h$ для регулярных функций g и h на V. Поэтому дивизор f не пересекает Y.

Отображение $\mathrm{Div}(X,Y)\to\mathrm{Pic}(X,Y)$ строится так: дивизору D сопоставляем пару $(\mathcal{L}(D), s|_Y\colon\mathcal{O}_Y\to\mathcal{L}(D))$, где s — сечение $\mathcal{O}_X\to\mathcal{L}(D)$, которое обращается в 0 точно на D. Почему оно сюръективно? Если есть расслоение $\mathcal{M}$ на X и тривиализация $s\colon\mathcal{O}_Y\to\mathcal{M}$, мы хотим построить дивизор. Берем аффинную окрестность V; тогда $s\in\Gamma(Y,U)$. Есть сюръективное отображение $\Gamma(V,\mathcal{M})\to\Gamma(Y,\mathcal{M})$ — здесь мы используем, что V аффинно. Поэтому найдется поднятие $\widetilde{s}\in\Gamma(V,\mathcal{M})$. Рассмотрим его как рациональное сечение $\mathcal{M}$ на X; его дивизор $\mathrm{div}(\widetilde{s})$ лежит в $D(X,Y)$, поскольку s не имеет нулей на Y.

Мораль: в такой ситуации $\mathrm{Pic}(X,Y)$ реализуется как группа классов дивизоров. При этом дивизор считается тривиальным, если он является дивизором рациональной функции указанного вида (см. определение G).

Точность в $\mathrm{Div}(X, Y)$: если $D \in \mathrm{Div}(X, Y)$, мы сопоставили ему пару $(\mathcal{L}(D), s\colon \mathcal{O}_Y \to \mathcal{L}(D))$. Если это расслоение тривиально, то есть сечение $t\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}(D)$. Поднимем s до сечения $\widetilde{s}$ над V и рассмотрим функцию $\widetilde{s}/t$. Это и есть нужный прообраз в G.

Если $f \in G$ и $\mathrm{div}(f) = 0$, то $f \in \Gamma(X - Y, \mathcal{O}_X)$. С другой стороны, f регулярна в окрестности Y. Поэтому $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, и $f \in \Gamma(X, G_{X,Y})$.