Иван Панин

27.10.2014

Мы продолжаем следовать статье Suslin–Voevodsky, "Block–Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients". Нас в ней интересует § 1 и кусочек § 3. В § 1 строится категория $DM^-(F)$. У нас были комплексы $\mathbb{Z}(0) \cong \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}(1) \cong \mathcal{O}^*[-1]$.

Следствие 0.1. Для любого $X \in \mathrm{Sm}/F$ имеем

$$H^i_{\mathrm{Nis}}(X, \mathbb{Z}(0)) = \begin{cases} H^0(X, \mathbb{Z}), & i = 0; \\ 0, i \neq 0. \end{cases}$$

$$H^i_{\mathrm{Nis}}(X, \mathbb{Z}(1)) = H^{i-1}_{\mathrm{Nis}}(X, \mathcal{O}^*_X) = \begin{cases} H^0(X, \mathcal{O}^*_X), & i = 1; \\ \mathrm{Pic}(X), & i = 2; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В частности ($i = 2$), $H^2_{\mathrm{Nis}}(X, \mathbb{Z}(1)) = \mathrm{Pic}(X) = \mathrm{CH}^1(X)$ — группа классов дивизоров на X.

Верна общая теорема: $H^i_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{F}) = H^i_{\mathrm{Nis}}(X, \mathcal{F})$ для любого гомотопически инвариантного пучка Нисневича с трансферами. Поэтому $H^i_{\mathrm{Nis}}(X, \mathbb{Z}(0)) = H^i_{\mathrm{Zar}}(X, \mathbb{Z})$, откуда сразу следует, что при $i \neq 0$ когомологий нету. Далее, $H^{i-1}_{\mathrm{Nis}}(X, \mathcal{O}^*_X) = H^{i-1}_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{O}^*_X)$. Известно, что $H^1(X, \mathcal{O}^*_X) = \mathrm{Pic}(X)$. Кроме того, $H^j_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{O}^*_X) = 0$ при всех $j \geq 2$; это классическое утверждение.

Для его доказательства посмотрим на комплекс

$$k(X)^* \to \coprod_{D \in X^{(1)}} \mathbb{Z} \cdot [D].$$

Первый пучок выглядит так: $U \mapsto k(U)^* = k(X)^*$. Второй пучок сопоставляет открытому множеству U абелеву группу $\coprod_{D' \in U^{(1)}} \mathbb{Z} \cdot [D']$. Рассмотрим общую точку $\eta\colon \operatorname{Spec} k(X) \to X$, и для любой точки $x \in X^{(1)}$ рассмотрим дивизор $D_x = \overline{x}$. Точке x соответствует морфизм $x\colon \operatorname{Spec} k(D_x) \to X$. На X появляется пучок $\eta_*(\underline{k(X)^*})$ (где абелева группа $k(X)^*$ рассматривается как пучок на $\operatorname{Spec} k(X)$). Это постоянный пучок:

$$\eta_*(\underline{k(X)^*})(U) = \Gamma(\mathrm{Spec}(k(X)), k(X)^*) = k(X)^*.$$

Кроме того, для $x \in X^{(1)}$ есть пучок $x_*(\underline{\mathbb{Z}})$. Его сечения выглядят так:

$$x_*(\underline{\mathbb{Z}})(U) = \Gamma(x^{-1}(U), \underline{\mathbb{Z}}) = \begin{cases} 0, & x \notin U; \\ \mathbb{Z}, & x \in U \end{cases}$$

поскольку $x^{-1}(U) = \varnothing$ для $x \notin U$ и $x^{-1}(U) = \{x\}$ для $x \in U$.

Так вот, зададим отображение $\eta_*(\underline{k(X)^*}) \to \coprod_{x \in X^{(1)}} x_*(\mathbb{Z})$ следующим образом: отправим f в $\mathrm{div}(f|_U)$.

Лемма 0.2. Комплекс пучков Зариского

$$0 \to \mathcal{O}^*_X \to \eta_*(\underline{k(X)^*}) \to \coprod_{x \in X^{(1)}} x_*(\mathbb{Z}) \to 0$$

на X точен.

Доказательство. Достаточно проверить точность указанной последовательности на ростках. Возьмем $y \in X$ и вычислим ростки в точке y:

$$0 \to \mathcal{O}^*_{X,y} \to k(X)^* \to \coprod_{x \mid y \in \overline{x}} \mathbb{Z} \cdot [D_x] \to 0.$$

Дело в том, что локальное кольцо любой точки на гладком многообразии факториально. Таким образом, $\mathcal{O}_{X,y}$ факториально. Поэтому любой дивизор в окрестности y задается одним уравнением: для D_x с $y \in \overline{x}$ существует функция $f_x \in k(X)^*$ такая, что $\operatorname{div}_y(f_x) = D_x$.

Далее, если дивизор равен нулю, то функция регулярна, и обратная к ней регулярна по той же причине, и потому функция обратима. Это показывает точность в члене $k(X)^*$. $\square$

Напомним, что пучок $\mathcal{F}$ на Y называется **вялым**, если для любых открытых $V \subseteq U \subseteq Y$ отображение $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ сюръективно.

Замечание 0.3. Если $\varphi\colon Y \to X$ — морфизм схем, а $\mathcal{F}$ — вялый пучок, то $\varphi_*(\mathcal{F})$ — вялый пучок на X.

Замечание 0.4. Если $\mathcal{F}$ — вялый пучок на Y, $n > 0$, то $H^*_{\mathrm{Zar}}(Y, \mathcal{F}) = 0$ (см. Хартсхорн). Поэтому когомологии можно вычислять с помощью вялой резольвенты: если $\mathcal{G}$ — пучок, и $G \to I^\bullet$ — его вялая резольвента, то $H^n(Y, \mathcal{G}) = H^n(\Gamma(Y, I^\bullet))$.

Итак, мы хотим показать, что $H^j(X, \mathcal{O}^*_X) = 0$ при $j \geq 2$. Но последовательность

$$0 \to \mathcal{O}^*_X \to \eta_*(\underline{k(X)^*}) \to \coprod_{x \in X^{(1)}} x_*(\mathbb{Z}) \to 0$$

является вялой резольвентой пучка $\mathcal{O}^*_X$. Действительно, любой пучок на $\operatorname{Spec} k(X)$ вялый, поэтому и прямой образ $\eta_*(\underline{k(X)^*})$ вялый. По тем же причинам и $x_*(\mathbb{Z})$ вялый, и потому их прямая сумма вялая. Мы получили резольвенту длины 1 (она сосредоточена в позициях 0 и 1), поэтому никаких старших когомологий нету.

Замечание 0.5. Рассмотрим предпучок $U \mapsto K_1(U)$. Ассоциированный пучок обозначим через $\widetilde{K_1}_{\mathrm{Zar}}$. Отображения $\det\colon K_1(U) \to k[U]^*$ индуцируют изоморфизм $\widetilde{K_1}_{\mathrm{Zar}} \to \mathcal{O}^*$. Поэтому $H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \widetilde{K_1}) = \mathrm{CH}^1(X)$, $H^j_{\mathrm{Zar}}(X, \widetilde{K_1}) = 0$ при $j \geq 2$.

Можно ли обобщить это на старшие K-группы? Рассмотрим предпучок $U \mapsto K_2(U)$ и ассоциированный пучок $\widetilde{K_1}$. Тогдч $H^2_{\mathrm{Zar}}(X, \widetilde{K_2}) = \mathrm{CH}^2(X)$, $H^j_{\mathrm{Zar}}(X, \widetilde{K_2}) = 0$ при $j \geq 3$.

Эти формулы не случайны; верна следующая теорема

Теорема 0.6 (Блох–Квиллен, 1973)**.** Последовательность пучков

$$0 \to \widetilde{K_2} \to \eta_*(K_2(k(X))) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} x_*(K_1(k(x))) \to \bigoplus_{y \in X^{(2)}} y_*(K_0(k(y))) \to 0$$

точна в топологии Зариского на X.

Последовательность, фигурирующая в теореме, называется **резольвентой Герстена** пучка $\widetilde{K_2}$.

Какими свойствами должен обладать пучок $\widetilde{K_2}$, чтобы для него была подобная резольвента?

1. $\widetilde{K_2}$ гомотопически инвариантен;

2. $\widetilde{K_2}$ — предпучок с трансферами, то есть, $K_2\colon \mathrm{Cor}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$. То есть, для диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\text{кон}"'] & X \times Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \\ & X & \end{tikzcd}$$

есть отображение $Z^*\colon \widetilde{K_2}(Y) \to \widetilde{K_2}(X)$;

3. (a) $(\widetilde{K_2})_{-1}(U) = \widetilde{K_2}(U \times \mathbb{G}_m)/\widetilde{K_2}(U) = \widetilde{K_1}(U)$;
   (b) $(\widetilde{K_1})_{-1}(U) = \widetilde{K_1}(U \times \mathbb{G}_m)/\widetilde{K_1}(U) = \widetilde{K_0}(U)$;
   (c) $(\widetilde{K_0})_{-1}(U) = \widetilde{K_0}(U \times \mathbb{G}_m)/\widetilde{K_0}(U) = 0$.

Комментарий к свойству (2): для конечного расширения полей E/F есть гомоморфизм $\mathrm{Tr}_{E/F}\colon K_2(E) \to K_2(F)$.

Пусть теперь $\mathcal{F}\colon \mathrm{Cor} \to \mathrm{Ab}$ — произвольный предпучок с трансферами (см. (2)), причем $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U \times \mathbb{A}^1)$ (см. (1)). Для любого $\mathcal{G}$ определим $\mathcal{G}_{-1}(U) = \mathcal{G}(U \times \mathbb{G}_m)/\mathcal{G}(U)$. Тогда по $\mathcal{F}$ можно построить предпучки $\mathcal{F}_{-1}$, $\mathcal{F}_{-2} = (\mathcal{F}_{-1})_{-1}$, $\mathcal{F}_{-3} = ((\mathcal{F}_{-1})_{-1})_{-1}$.

Теорема 0.7 (Воеводский, 1994)**.** Пусть поле F совершенно, пучок $\mathcal{F}\colon \mathrm{Cor} \to \mathrm{Ab}$ гомотопически инвариантен. Тогда для любого $X \in \mathrm{Sm}/F$ и для любой точки $x \in X^{(q)}$ комплекс абелевых групп

$$0 \to \mathcal{F}(\mathcal{O}_{X,x}) \to \mathcal{F}(k(X)) \to \bigoplus_{y \in X^{(1)}} \mathcal{F}_{-1}(k(y)) \to \bigoplus_{y \in X^{(2)}} \mathcal{F}_{-2}(k(y)) \to \cdots \to \mathcal{F}_{-q}(k(x)) \to 0$$

точен.

Заметим, что $\mathcal{F}_{-1} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Pre}}(\mathbb{G}_m^{\wedge 1}, \mathcal{F})$. Действительно, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Pre}}(\mathbb{G}_m, \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(U \times \mathbb{G}_m)$, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Pre}}(\mathrm{pt}, \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(U \times \mathrm{pt}) = \mathcal{F}(U)$. Поэтому отображение $\mathbb{G}_m \to \mathrm{pt}$ индуцирует отображение $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U \times \mathbb{G}_m)$; это и требовалось.

В категории $D^-(\mathrm{NSwT}(F))$ есть подкатегория $DM^-(F)$, состоящая из комплексов $A^\bullet$ таких, что $h^i(A^\bullet)$ — гомотопически инвариантный пучок для всех i. Обозначим через i функтор вложения $DM^-(F) \to D^-(\mathrm{NSwT}(F))$. Мы желаем построить функтор

$$C^\bullet\colon D^-(\mathrm{NSwT}(F)) \to DM^-(F),$$

локализующий, левый сопряженный к i так, чтобы $i \circ C$ был точным функтором, и категория $DM^-(F)$ оказалась бы фактором категории $D^-(\mathrm{NSwT}(F))$.

Теорема 0.8 (Воеводский)**.** 1. Функтор $C^\bullet$ переводит точные треугольники в точные и коммутирует с прямыми суммами.

2. Функтор $C^\bullet$ — левый сопряженный к i и устанавливает эквивалентность $DM^-(F)$ с $D^-(\mathrm{NSwT}(F))/\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — толстая подкатегория в $D^-(\mathrm{NSwT})$, порожденная пучками вида $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X \times \mathbb{A}^1)/\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X \times 0)$.

Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок с трансферами. Обозначим через $C^\bullet(\mathcal{F})$ пучок, который переводит U в комплекс

$$\cdots \to \mathcal{F}(\Delta^2 \times U) \xrightarrow{d_0^* - d_1^* + d_2^*} \mathcal{F}(\Delta^1 \times U) \xrightarrow{d_0^* - d_1^*} \mathcal{F}(U)$$

(здесь $\mathcal{F}(U)$ стоит в позиции 0, $\mathcal{F}(\Delta^1 \times U)$ стоит в позиции -1, …)

Если $A^\bullet$ — ограниченный сверху комплекс предпучков с трансферами, положим

$$C^\bullet(A^\bullet) = \mathrm{Tot}(C^\bullet(A^\bullet)).$$

Хочется доказать следующее:

- если $\mathcal{F}$ — пучок с трансферами, то комплекс $C^\bullet(\mathcal{F}) \in DM^-(F)$ (мы знаем, что предпучки когомологий гомотопически инвариантны, но нас интересуют пучки);
- если $A^\bullet$ — ограниченный сверху комплекс пучков Нисневича с трансферами, то $C^\bullet(A^\bullet)$ лежит в $DM^-(F)$ (это должно следовать из предыдущего свойства при помощи спектральной последовательности и того, что категория гомотопически инвариантных пучков с трансферами абелева и замкнута относительно расширений);
- если $\varphi\colon A^\bullet \to B^\bullet$ — квази-изоморфизм комплексов ограниченных сверху пучков Нисневича с трансферами, то $C^\bullet(\varphi)\colon C^\bullet(A^\bullet) \to C^\bullet(B^\bullet)$ — квази-изоморфизм.

В частности, если $\mathcal{F}$ — предпучок с трансферами такой, что $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}} = 0$, то $C^\bullet(\mathcal{F})$ локально ацикличен. Это нетривиально: пусть E — поле. Тогда $C^\bullet(\mathcal{F})(E)$ — это следующий комплекс:

$$\mathcal{F}(\Delta^2_E) \to \mathcal{F}(\Delta^1_E) \to \mathcal{F}(E).$$

Конечно, $\mathcal{F}(E) = 0$. Но $\mathcal{F}(\Delta^1_E)$ уже может быть ненулевым. Несмотря на это, комплекс $C^\bullet(\mathcal{F})(E)$ ацикличен.