Иван Панин

10.11.2014

1 Построение функтора $C^\bullet$

Ближайшая цель — построение функтора $C^\bullet\colon D^-(\mathrm{NSwT}) \to \mathrm{DM}^-(F)$. Напомним, что F — совершенное поле.

Напомним, что если $\mathcal{F} \in \mathrm{NSwT}$, то через $C^\bullet(\mathcal{F})$ мы обозначали комплекс

$$\cdots \to C^2(\mathcal{F}) \xrightarrow{\partial^0-\partial^1+\partial^2} C^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{\partial^0-\partial^1} \mathcal{F},$$

где $C^n(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(\Delta^n \times U)$. Если $A^\bullet$ — ограниченный сверху комплекс объектов из NSwT, то $C^\bullet(A^\bullet) = \mathrm{Tot}(n \mapsto C^\bullet(A^n))$.

Лемма 1.1 (на самом деле теорема)**.** Если $\mathcal{F} \in \mathrm{NSwT}$, то $C^\bullet(\mathcal{F}) \in \mathrm{DM}^-(F)$, то есть, для всякого n когомологии $h^n(\mathcal{F})$ являются гомотопически инвариантными пучками.

A priori, предпучки $U \mapsto H^n(C^\bullet(\mathcal{F})(U))$ гомотопически инвариантны; из этого следует, что и ассоциированные пучки $h^n(\mathcal{F})$ тоже гомотопически инвариантны.

Хочется иметь такую лемму:

Лемма 1.2. Если $A^\bullet$ — ограниченный сверху комплекс в NSwT, то $C^\bullet(A^\bullet) \in \mathrm{DM}^-(F)$, то есть, его пучковые когомологии тоже гомотопически инвариантны.

Понятно, что для доказательства хочется написать какую-то спектральную последовательность. Лемма 1.2 следует из леммы 1.3

Лемма 1.3. Гомотопически инвариантные пучки с трансферами образуют полную абелеву подкатегорию в абелевой категории NSwT, замкнутую относительно взятия ядер, коядер и расширений.

Доказательство. Пусть $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — гомотопически инвариантных пучков с трансферами. Пусть $\mathcal{K}$ — его ядро, а $\mathcal{C}$ — его коядро (в категории предпучков).

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \to \mathcal{C} \to 0.$$

Тогда $\mathcal{K}$ и $\mathcal{C}$ — гомотопически инвариантные предпучки с трансферами. Кроме того, $\mathcal{K}$ уже является пучком, а $\widetilde{\mathcal{C}}$ (пучок, ассоциированный с $\mathcal{C}$) тоже гомотопически инвариантен и с трансферами, так как $\mathcal{C}$ гомотопически инвариантен и с трансферами. Осталось проверить утверждение про расширения. У нас есть точная последовательность

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to \mathcal{G} \to 0,$$

где пучки $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ гомотопически инвариантны. Почему $\mathcal{H}$ гомотопически инвариантен? Пусть $U \in \mathrm{Sm}/F$. Мы должны сравнить $\mathcal{H}(U)$ с $\mathcal{H}(U \times \mathbb{A}^1)$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{H}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{Nis}}(U,\mathcal{F}) \\
\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(U \times \mathbb{A}^1) & \longrightarrow & \mathcal{H}(U \times \mathbb{A}^1) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U \times \mathbb{A}^1) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{Nis}}(U,\mathcal{F})
\end{array}$$

Первые когомологии гомотопически инвариантны; теперь из 5-леммы следует, что $\mathcal{H}(U) \cong \mathcal{H}(U \times \mathbb{A}^1)$. $\square$

Вернемся к лемме 1.2. Пусть $A^\bullet$ — ограниченный сверху комплекс в NSwT. Почему все когомологии $C^\bullet(A^\bullet)$ гомотопически инвариантны?

Доказательство леммы 1.2. Использовать спектральную последовательность

$$h^p(C^\bullet(A^q)) \Rightarrow h^{p+q}(C^\bullet(A^\bullet)),$$

или что-то в этом роде. □

Мы сопоставили комплексу $A^\bullet$ комплекс $C^\bullet(A^\bullet) \in \mathrm{DM}^-(F)$. Хочется проверить, что для любого квази-изоморфизма $f\colon A^\bullet \to B^\bullet$ морфизм $C^\bullet(f)\colon C^\bullet(A^\bullet) \to C^\bullet(A^\bullet)$ является квази-изоморфизмом. Тогда указанное сопоставление задаст функтор $D^-(\mathrm{NSwT}) \to \mathrm{DM}^-(F)$.

Рассмотрим конусы f и $C^\bullet(f)$. Легко понять, что $\mathrm{Cone}(C^\bullet(f)) = C^\bullet(\mathrm{Cone}(f))$. Если f квази-изоморфизм, то $\mathrm{Cone}(f)$ ацикличен. Из этого следует, что $C^\bullet(\mathrm{Cone}(f))$ ацикличен (см. ниже), и поэтому $C^\bullet(f)$ квази-изоморфизм.

Итак, достаточно доказать такое предложение.

Предложение 1.4. Если $D^\bullet$ — ограниченный сверху комплекс в NSwT, и $D^\bullet$ ацикличен, то $C^\bullet(D^\bullet)$ ацикличен.

Замечание 1.5. Свойство ацикличности локально: $D^\bullet$ ацикличен, если для любой гладкой гензелевой схемы U комплекс $D^\bullet(U)$ ацикличен в категории абелевых групп. Далее, $C^1(D^\bullet(U)) = D^\bullet(U \times \Delta^1)$, но схема $U \times \Delta^1$ уже не локальна.

Приведем план доказательства предложения 1.4. Главная идея — следствие 1.10.2 из статьи Воеводского–Суслина:

Следствие 1.6. Пусть $A^\bullet$ — ограниченный сверху комплекс в NSwT такой, что

1. для всех i пучок A^i стягиваем;
2. $h^j(A^\bullet)$ гомотопически инвариантны;

Тогда $A^\bullet$ ацикличен.

Определение 1.7. Пучок $\mathcal{F}$ называется **стягиваемым** (или $\mathbb{A}^1$**-стягиваемым**), если любое его сечение можно канонически потянуть в нулевое сечение посредством $\mathbb{A}^1$-гомотопии. Точнее, $\mathcal{F}$ стягиваем, если существует отображение $\Phi\colon \mathcal{F} \to C^1(\mathcal{F})$ такое, что $\partial^0\Phi = 0$, $\partial^1\Phi = \mathrm{id}$:x

$$\mathcal{F} \longrightarrow C^1(\mathcal{F}) \overset{\partial^0}{\underset{\partial^1}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}.$$

Иными словами, для каждого U и для каждого $s \in \mathcal{F}(U)$ задано $\Phi(s) \in \mathcal{F}(U \times \mathbb{A}^1)$ так, что $\Phi(s)|_{U\times 1} = s$ и $\Phi(s)|_{U\times 0} = 0$.

Пример 1.8. Типичный пример стягиваемого пучка:

$$\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}^n, 0](U) = \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{A}^n)(U)/\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathrm{pt})(U) = \mathrm{Cor}(U, \mathbb{A}^n)/\mathrm{Cor}(U, (0, \ldots, 0)).$$

Для доказательства стягиваемости нужно для каждого U и $s \in \mathbb{Z}^{\mathrm{tr}}(\mathbb{A}^n)(U)/\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathrm{pt})(U)$ придумать $\Phi(s)$:

$$\Phi(s)\colon U \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{s\times\mathrm{id}} \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{m} \mathbb{A}^n,$$

где $m\colon (v, t) \mapsto t \cdot v$. Ограничение $\Phi(s)$ на $U \times 0$ отправляет все в начало координат, а ограничение на $U \times 1$ совпадает с исходным s.

Пример 1.9. Пучок $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y \times \mathbb{A}^1/Y \times 0) = \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y \times \mathbb{A}^1)/\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y \times 0)$ стягиваем по тем же причинам.

Пример 1.10. Рассмотрим композицию

$$\partial\colon \Delta^0 \to \Delta^1 \to \Delta^2 \to \cdots \to \Delta^n.$$

Тогда для любого $\mathcal{F} \in \mathrm{NSwT}$ пучок $\mathcal{K} = \mathrm{Ker}(C^n(\mathcal{F}) \xrightarrow{\partial^*} \mathcal{F})$ стягиваем. Действительно, пусть $n = 1$. Тогда $\mathcal{K} = \mathrm{Ker}(C^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{\partial^0} \mathcal{F})$. Для любого $X \in \mathrm{Sm}/F$ имеем $\mathcal{K}(X) = \{s \in \mathcal{F}(X \times \mathbb{A}^1) = C^1(\mathcal{F})(X) \mid s|_{X\times 0} = 0\}$. Снова рассмотрим произведение $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, $(a, b) \mapsto ab$, и положим $\Phi(s) = (\mathrm{id}_X \times m)^*(s) \in \mathcal{F}(X \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1)$ для $s \in \mathcal{K}(X)$. Тогда $\Phi(s)|_{X\times\mathbb{A}^1\times 0} = 0$, и $\Phi(s) \in \mathcal{K}(X\times\mathbb{A}^1)$. Поэтому $\partial^0\Phi(s) = 0$. Если заменить ∂^0 на ∂^1, получим, что $\partial^0\Phi(s) = \mathrm{id}^*(s) = s$.

Основное свойство стягиваемых пучков заключено в следующем предложении (это предложение 1.10 у Воеводского–Суслина).

Предложение 1.11. Пусть $\mathcal{J}, \mathcal{F} \in \mathrm{NSwT}$, и $\mathcal{J}$ стягиваем, а $\mathcal{F}$ гомотопически инвариантен. Тогда $\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{NSwT}}(\mathcal{J}, \mathcal{F}) = 0$ для всех n.

Доказательство. Пусть $n = 0$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} & C^1(\mathcal{F}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathcal{F} \\
\mathcal{J} \arrow[u] \arrow[r, "\Phi"'] & C^1(\mathcal{J}) \arrow[u, "C^1(\alpha)"] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathcal{J} \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Заметим, что в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[d, "p^*"', "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id}^*"] & \\
\mathcal{F}(U\times\mathbb{A}^1) \arrow[r, shift left, "i_0^*"] \arrow[r, shift right, "i_1^*"'] & \mathcal{F}(U)
\end{tikzcd}$$

стрелки i_0^* и i_1^* равны. Поэтому стрелки $C^1(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$ равны. $\square$

Следствие 1.12. Пусть $\mathcal{J}, \mathcal{F} \in \mathrm{NSwT}$, $\mathcal{F}$ гомотопически инвариантен, а $\mathcal{J}$ допускает резольвенту вида

$$0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{J}^0 \to \cdots \to \mathcal{J}^n \to 0$$

такую, что для всех i пучок $\mathcal{J}^i$ стягиваем. Тогда $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{NSwT}}(\mathcal{J}, \mathcal{F}) = 0$ для всех i.

Доказательство. Если $n = 0$, то это предложение 1.11. Пусть $n = 1$:

$$0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{J}^0 \to \mathcal{J}^1 \to 0.$$

Тогда есть точная последовательность

$$\ldots \longleftarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}^1, \mathcal{F}) \longleftarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{J}, \mathcal{F}) \longleftarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{J}^0, \mathcal{F}) \longleftarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{J}^1, \mathcal{F}) \longleftarrow 0$$

в которой $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}^1, \mathcal{F}) = 0$ по предложению 1.11 и поэтому $\mathrm{Hom}(\mathcal{J}, \mathcal{F}) = 0$. $\square$

Доказательство следствия 1.6. Пусть $A^\bullet$ — ограниченный сверху комплекс в NSwT, пучки A^i стягиваемы, а $h^j(A^\bullet)$ гомотопически инвариантны.

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & A^{-2} \arrow[r] & A^{-1} \arrow[r] & A^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & h^0 \arrow[d] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

При этом h^0 гомотопически инвариантен, а A^0 стягиваем. Поэтому морфизм $A^0 \to h^0$ нулевой. С другой стороны, он сюръективен. Поэтому $h^0 = 0$.

Предположим, что мы уже знаем, что $h^{-n+1} = \cdots = h^0 = 0$. Покажем, что тогда и $h^n = 0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] \\
Z^{-n} \arrow[d] \\
A^{-n} \arrow[r] & A^{-n+1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & A^{-1} \arrow[r] & A^0
\end{tikzcd}$$

Получаем резольвенту пучка Z^{-n}, состоящую из стягиваемых пучков A^i $(i \geq -n)$. Поэтому $\mathrm{Hom}(Z^{-n}, h^{-n}) = 0$.

$$\begin{tikzcd}
A^{-n-1} \arrow[r] & Z^{-n} \arrow[d] \\
& h^{-n} \arrow[d] \\
& 0
\end{tikzcd}$$

Стрелка $Z^{-n} \to h^{-n}$ равна нулю и сюръективна, поэтому $h^{-n} = 0$. $\square$

Замечание 1.13. Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория, $\varphi\colon M \to N$ — сюръективная стрелка, и $\varphi = 0$. Тогда $N = 0$.

Вернемся к предложению 1.4.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \mathrm{coker}^{(2)} \arrow[r] & \mathrm{coker}^{(1)} \arrow[r] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & C^2(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[u] & C^1(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F} \arrow[u] \\
\ldots \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[u] & \mathcal{F} \arrow[r, "0"] \arrow[u] & \mathcal{F} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Лемма 1.14. Пучки $\mathrm{coker}^{(n)}$ стягиваемы.

Поверим пока в эту лемму (она несложная; доказывается наподобие примеров выше). Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \mathrm{coker}^{(2)}(D^\bullet) \arrow[r] & \mathrm{coker}^{(1)}(D^\bullet) \arrow[r] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & C^2(D^\bullet) \arrow[r] \arrow[u] & C^1(D^\bullet) \arrow[r] \arrow[u] & D^\bullet \arrow[u] \\
\ldots \arrow[r] & D^\bullet \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[u] & D^\bullet \arrow[r, "0"] \arrow[u] & D^\bullet \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Комплекс $D^\bullet$ ацикличен, поэтому его когомологии гомотопически инвариантны. Поэтому и когомологии [би]комплекса в нижней строке гомотопически инвариантны (они совпадают с когомологиями $D^\bullet$). Поэтому когомологии верхней строки и средней строки совпадают. У комплекса в средней строке когомологии тоже гомотопически инвариантны. Поэтому и у верхней строки когомологии гомотопически инвариантны. С другой стороны, все члены верхней строки стягиваемы по лемме. Поэтому верхняя строчка — ацикличный комплекс. Поэтому и средняя строчка ациклична.

Предложение 1.4 доказано.

Из предложения 1.4 следует, что правило $A^\bullet \mapsto C^\bullet(A^\bullet)$ задает функтор

$$C^\bullet \colon D^-(\mathrm{NSwT}) \to \mathrm{DM}^-(F).$$

Напомним, что имеется функтор вложения $i\colon \mathrm{DM}^-(F) \hookrightarrow D^-(\mathrm{NSwT})$.

Позже мы поговорим про следующие теоремы

Теорема 1.15. Пусть $\mathcal{A}$ — ядро функтора $C^\bullet$. Категория $\mathcal{A}$ порождена пучками вида $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y \times \mathbb{A}^1 / Y \times 0)$.

Теорема 1.16. Функтор $C^\bullet$ — левый сопряженный к вложению i и отождествляет $\mathrm{DM}^-(F)$ с фактор-категорией $D^-(\mathrm{NSwT})/\mathcal{A}$.

Чем эта теорема хороша? Напомним, что $M(X) = C^\bullet(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X))$. Если $A^\bullet \in \mathrm{DM}^-(F)$, то

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^-(F)}(M(X), A^\bullet[n]) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^-(F)}(C^\bullet(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)), A^\bullet[n]) \\
&= \mathrm{Hom}_{D^-(\mathrm{NSwT})}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X), A^\bullet[n]) \\
&= \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{NSwT}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X), A^\bullet) \\
&= H^n_{\mathrm{Nis}}(X, A^\bullet).
\end{aligned}$$

Последнее равенство выполнено по лемме 1.6 из Воеводского–Суслина.