Иван Панин

24.11.2014

1

В прошлый раз мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.1 (Corollary 1.10.2)**.** Пусть $A^\bullet$ — ограниченный сверху комплекс пучков Нисневича с трансферами. Пусть для любого i пучок A^i стягиваем, и все $h^i(A^\bullet)$ гомотопически инвариантны. Тогда комплекс $A^\bullet$ ацикличен, то есть, $A^\bullet = 0$ в $D^-(\mathrm{NSwT})$.

Поэтому есть функтор $C^\bullet\colon D^-(\mathrm{NSwT}) \to \mathrm{DM}^-(F)$, который переводит точные треугольники в точные треугольники и коммутирует с прямыми суммами.

Мы обещали показать, что

- $\mathrm{Ker}(C^\bullet)$ порождается пучками вида $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y \times \mathbb{A}^1 / Y \times 0)$, $Y \in \mathrm{Sm}/F$;
- $C^\bullet$ — левый сопряженный к вложению $i\colon \mathrm{DM}^-(F) \to D^-(\mathrm{NSwT})$;
- $C^\bullet$ отождествляет $D^-(\mathrm{NSwT})/\mathrm{Ker}(C^\bullet)$ с $\mathrm{DM}^-(F)$.

Приятное следствие: если $A^\bullet \in \mathrm{DM}^-(F)$, то

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^-(F)}(M(X), A^\bullet[n]) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^-(F)}(C^\bullet(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)), A^\bullet[n]) \\
&= \mathrm{Hom}_{D^-(\mathrm{NSwT})}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X), i(A^\bullet[n])) \\
&= \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{NSwT}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X), A^\bullet) \\
&= \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Nis}}(\mathbb{Z}[X], A^\bullet) \\
&= H^n_{\mathrm{Nis}}(X, A^\bullet),
\end{aligned}$$

где последнее равенство выполнено в силу Corollary 1.7.1 из статьи Воеводского–Суслина.

Определение 1.2. Если $\mathcal{F}$ — пучок, то есть отображения

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U \times \Delta^2) \arrow[d, equal] & \mathcal{F}(U \times \Delta^1) \arrow[d, equal] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, equal] \\
C^2(\mathcal{F})(U) \arrow[r] & C^1(\mathcal{F})(U) \arrow[r] & \mathcal{F}(U) \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F}(U) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

из которых получается морфизм комплексов $\mathcal{F} \to C^\bullet(\mathcal{F})$. Эта конструкция функториальна по $\mathcal{F}$. Поэтому и для комплекса пучков $\mathcal{G}^\bullet$ есть морфизм комплексов $C^\bullet(\mathcal{G}^\bullet)$.

Предложение 1.3 (Proposition 1.11)**.** Пусть $A^\bullet$, $B^\bullet$ — ограниченные сверху комплексы пучков Нисневича с трансферами.

1. Если каждый B^n стягиваем, то $C^\bullet(A^\bullet) \cong 0$.

2. Если $h^\bullet(A^\bullet)$ гомотопически инвариантны, то $A^\bullet \to C^\bullet(A^\bullet)$ — квази-изоморфизм.

Вернемся к ситуации определения 1.2:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & C^2(\mathcal{F}) \arrow[r] & C^1(\mathcal{F}) \arrow[r] & \mathcal{F} \\
\ldots \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F} \arrow[u] \\
\ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Обозначим комплекс в средней строчке через $C_0^\bullet(\mathcal{F})$; отображение $\mathcal{F} \to C_0^\bullet(\mathcal{F})$ является квази-изоморфизмом. Эта конструкция функториальна, поэтому и для комплекса пучков $\mathcal{G}^\bullet$ есть квази-изоморфизм $\mathcal{G}^\bullet \to C_0^\bullet(\mathcal{G})$.

Доказательство предложения 1.3.

1. Если B^n стягиваем, то и $C^i(B^n)$ стягиваем (упражнение). Поэтому члены комплекса $C^\bullet(B^\bullet)$ стягиваемы. С другой стороны, все когомологии $h^i(C^\bullet(B^\bullet))$ гомотопически инвариантны. Поэтому $C^\bullet(B^\bullet)$ ацикличен (теорема 1.1).

2. Рассмотрим $C^\bullet(A^\bullet)/C_0^\bullet(A^\bullet)$. Мы утверждаем, что все члены этого бикомплекса стягиваемы. Нам уже известно, что все коядра стрелок $\mathcal{F} \to C^i(\mathcal{F})$ стягиваемы. С другой стороны, все когомологии $h^i(C^\bullet(A^\bullet))$ гомотопически инвариантны. Посмотрим на квази-изоморфизм $A^\bullet \to C_0^\bullet(A^\bullet)$. По условию $h^i(C_0^\bullet(A^\bullet)) = h^i(A^\bullet)$ гомотопически инвариантны по условию. Короткая точная последовательность

$$0 \to C_0^\bullet(A^\bullet) \to C^\bullet(A^\bullet) \to C^\bullet(A^\bullet)/C_0^\bullet(A^\bullet) \to 0$$

приводит к длинной точной последовательности когомологий, и когомологии первых двух членов гомотопически инвариантны. Поэтому и все $h^i(C^\bullet(A^\bullet)/C_0^\bullet(A^\bullet))$ гомотопически инвариантны. С другой стороны, все члены этого комплекса стягиваемы. По следствию 1.1 комплекс $C^\bullet(A^\bullet)/C_0^\bullet(A^\bullet))$ равен нулю в производной категории. Значит отображение $C_0^\bullet(A^\bullet) \to C^\bullet(A^\bullet)$ является квази-изоморфизмом. Кроме того, $A^\bullet \to C_0^\bullet(A^\bullet)$ — квази-изоморфизм.

□

Следствие 1.4 (Corollary 1.11.1)**.** Пусть $A^\bullet, B^\bullet \in D^-(\mathrm{NSwT})$. Пусть для всех n пучки B^n стягиваемы, и для всех i пучки $h^i(A^\bullet)$ гомотопически инвариантны. Тогда

$$\mathrm{Hom}_{D^-(\mathrm{NSwT})}(B^\bullet, A^\bullet) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь морфизм $f\colon B^\bullet \to A^\bullet$ в $D^-(\mathrm{NSwT})$. Можно считать, что это честный морфизм комплексов (заменив $A^\bullet$ на квази-изоморфный ему). Применим функтор $C^\bullet$:

$$\begin{tikzcd}
B^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{can}_B"] & A^\bullet \arrow[d, "\mathrm{can}_A"] \\
C^\bullet(B^\bullet) \arrow[r, "C^\bullet(f)"] & C^\bullet(A^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Из предложения 1.3 следует, что can_A — квази-изоморфизм, и что $C^\bullet(B^\bullet) = 0$. Тогда f в производной категории пропускается через $C^\bullet(B^\bullet)$, и поэтому нулевой. □

Следствие 1.5 (Corollary 1.11.2)**.** Пусть $B^\bullet, A^\bullet \in D^-(\mathrm{NSwT})$. Пусть для всех i когомологии $h^i(A^\bullet)$ гомотопически инвариантны. Тогда $\mathrm{can}_B\colon B^\bullet \to C^\bullet(B^\bullet)$ индуцирует изоморфизм $\mathrm{Hom}_{D^-(\mathrm{NSwT})}(C^\bullet(B^\bullet), A^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{D^-(\mathrm{NSwT})}(B^\bullet, A^\bullet)$.

Доказательство. Разложим can_B в композицию $B^\bullet \to C_0^\bullet(B^\bullet) \to C^\bullet(B^\bullet)$. Первая стрелка является квази-изоморфизмом. Поэтому

$$\mathrm{Hom}_{D^-(\mathrm{NSwT})}(C^\bullet(B^\bullet), A^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{D^-(\mathrm{NSwT})}(C_0^\bullet(B^\bullet), A^\bullet) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{D^-(\mathrm{NSwT})}(B^\bullet, A^\bullet).$$

У нас есть короткая точная последовательность

$$0 \to C_0^\bullet(B^\bullet) \to C^\bullet(B^\bullet) \to C^\bullet(B^\bullet)/C_0^\bullet(B^\bullet) \to 0.$$

Из следствия 1.4 получаем, что $\mathrm{Hom}_{D^-(\mathrm{NSwT})}(C^\bullet(B^\bullet)/C_0^\bullet(B^\bullet), A^\bullet[i]) = 0$ (нам нужно это только для $i = -1, 0, 1$), и поэтому

$$\mathrm{Hom}_{D^-(\mathrm{NSwT})}(C^\bullet(B^\bullet), A^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{D^-(\mathrm{NSwT})}(C_0^\bullet(B^\bullet), A^\bullet)$$

является изоморфизмом. $\square$

Сопряженность функторов $C^\bullet$ и i доказана.

Теорема 1.6. Для любого $X \in \mathrm{Sm}/F$ и любого $A^\bullet \in \mathrm{DM}^-(F)$ выполнено

$$H^j_{\mathrm{Nis}}(X, A^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^-(F)}(M(X), A^\bullet[j]).$$

Покажем теперь, что $\mathrm{Ker}(C^\bullet) \subseteq D^-(\mathrm{NSwT})$ порождается пучками вида $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y \times \mathbb{A}^1/Y \times 0)$.

Лемма 1.7. Пусть $A^\bullet \in D^-(\mathrm{NSwT})$. Тогда следующие свойства эквивалентны.

1. $A^\bullet \in \mathrm{Ker}(C^\bullet)$;
2. $A^\bullet$ изоморфен в $D^-(\mathrm{NSwT})$ комплексу $B^\bullet$ из стягиваемых пучков Нисневича с трансферами.

Доказательство. Если для всех n пучок B^n стягиваем, то $C^\bullet(B^\bullet) = 0$ в $D^-(\mathrm{NSwT})$ (см. Proposition 1.11), и тогда $C^\bullet(A^\bullet) \cong C^\bullet(B^\bullet) = 0$. Обратно, пусть $A^\bullet$ таков, что $C^\bullet(A^\bullet) = 0$. Рассмотрим точный треугольник

$$C_0^\bullet(A^\bullet) \to C^\bullet(A^\bullet) \to C^\bullet(A^\bullet)/C_0^\bullet(A^\bullet) \to C_0^\bullet(A^\bullet)[1].$$

При этом $C^\bullet(A^\bullet) = 0$. Поэтому $C^\bullet(A^\bullet)/C_0^\bullet(A^\bullet) \to C_0^\bullet(A^\bullet)[1]$ — изоморфизм в производной категории. Кроме того, есть изоморфизм $A^\bullet[1] \to C_0^\bullet(A^\bullet)[1]$. Поэтому $C^\bullet(A^\bullet)/C_0^\bullet(A^\bullet)[1]$ изоморфен $A^\bullet$ в производной категории. Комплекс $C^\bullet(A^\bullet)/C_0^\bullet(A^\bullet)$ состоит из стягиваемых пучков. $\square$

Предложение 1.8. $\mathrm{Ker}(C^\bullet) \subseteq D^-(\mathrm{NSwT})$ порождается пучками $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y \times \mathbb{A}^1/Y \times 0)$.

Доказательство. Пучок $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y \times \mathbb{A}^1/Y \times 0)$ стягиваем (см. S–V). Поэтому по лемме 1.7 он лежит в $\mathrm{Ker}(C^\bullet)$.

Пусть $A^\bullet \in \mathrm{Ker}(C^\bullet)$. Тогда $A^\bullet \cong B^\bullet$, где пучки B^n стягиваемы при всех n. Осталось для любого стягиваемого пучка $\mathcal{F}$ написать резольвенту (левую), состоящую из пучков вида $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y \times \mathbb{A}^1/Y \times 0)$. Но если $\mathcal{F}$ стягиваем, то $C^\bullet(\mathcal{F}) = 0$. Поэтому достаточно взять любой $\mathcal{F}$ со свойством $C^\bullet(\mathcal{F}) = 0$ и написать для него левую резольвенту из пучков вида $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y \times \mathbb{A}^1/Y \times 0)$. Как задать морфизм $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \to \mathcal{F}$? Это то же самое, что выбрать сечение $s \in \mathcal{F}(X)$ (по лемме Йонеды). Поэтому задать морфизм $\mathbb{Z}(Y \times \mathbb{A}^1) \to \mathcal{F}$ — то же самое, что задать сечение $s \in \mathcal{F}(Y \times \mathbb{A}^1)$. Этот морфизм пропускается через $\mathbb{Z}(Y \times \mathbb{A}^1/Y \times 0)$ тогда и только тогда, когда $s|_{Y\times 0} = 0$.

Рассмотрим теперь морфизм

$$\bigoplus_{Y \in \mathrm{Sm}/F} \bigoplus_{\substack{s \in \mathcal{F}(Y\times\mathbb{A}^1) \\ s|_{Y\times 0}=0}} \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y \times \mathbb{A}^1/Y \times 0) \xrightarrow{\sum \varphi_{Y,s}} \mathcal{F}.$$

Мы утверждаем, что этот морфизм сюръективен. Тогда его ядро тоже лежит в $\mathrm{Ker}(C^\bullet)$, и процесс построения резольвенты можно продолжить обычным образом. $\square$