Иван Панин

01.12.2014

1 Отождествление категории мотивов с локализацией

Мы остановились на следующем вопросе.

Пусть $\mathcal{F}$ — пучок с трансферами, и пусть комплекс $C_\bullet(\mathcal{F})$ ацикличен. Мы строили для него резольвенту из пучков вида $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y \times \mathbb{A}^1/Y \times 0)$. В качестве первого шага мы взяли

$$\bigoplus_{Y \in \mathrm{Sm}/k} \bigoplus_{\substack{s \in \mathcal{F}(Y \times \mathbb{A}^1) \\ s|_{Y \times 0} = 0}} \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y \times \mathbb{A}^1/Y \times 0) \xrightarrow{\sum \varphi_{Y,s}} \mathcal{F} \to 0.$$

Если K_0 — ядро этого отображения, то $C_\bullet(K_0)$ ацикличен. К нему можно применить ту же процедуру, и продолжить. Осталось доказать, что построенное отображение $\sum \varphi_{Y,s}$ действительно является эпиморфизмом.

Лемма 1.1. $\sum \varphi_{Y,s}$ — эпиморфизм.

Если $C_\bullet(\mathcal{F})$ ацикличен, то $C_1(\mathcal{F}) \xrightarrow{d_1 - d_0} \mathcal{F}$ сюръективен. Это означает, что локально в топологии Нисневича любое сечение $t \in \mathcal{F}(Y)$ можно записать в виде $t = s|_{Y \times 1}$ для некоторого $s \in \mathcal{F}(Y \times \mathbb{A}^1)$ такого, что $s|_{Y \times 0} = 0$.

Пока мы не доказали лишь, что $\mathrm{DM}^-(F)$ отождествляется с локализацией $D^-(\mathrm{NSwT})$ по $\mathrm{Ker}(C_\bullet)$. Это несложно: по универсальному свойству локализации есть функтор

$$D^-(\mathrm{NSwT})/\mathrm{Ker}(C_\bullet) \to \mathrm{DM}^-(F).$$

В качестве обратного функтора рассмотрим композицию

$$\mathrm{DM}^-(F) \xrightarrow{i} D^-(\mathrm{NSwT}) \to D^-(\mathrm{NSwT})/\mathrm{Ker}(C_\bullet).$$

2 Тензорная структура на категории мотивов

Определим тензорную структуру на $\mathrm{DM}^-(F)$ следующим образом: для $A^\bullet, B^\bullet \in \mathrm{DM}^-(F)$ положим

$$A^\bullet \otimes B^\bullet = C^\bullet(i(A^\bullet) \otimes^L i(B^\bullet)).$$

Здесь $A^\bullet \otimes^L B^\bullet$ означает левый производный функтор от [пока не определенного] тензорного произведения пучков Нисневича.

Предложение 2.1. Бифунктор $\otimes_{\mathrm{DM}^-(F)} \colon \mathrm{DM}^-(F) \times \mathrm{DM}^-(F) \to \mathrm{DM}^-(F)$ обладает следующими свойствами:

1. $\otimes_{\mathrm{DM}^-(F)}$ коммутативен и ассоциативен с точностью до естественного изоморфизма;n
2. $\otimes_{\mathrm{DM}^-(F)}$ биточен;
3. $\otimes_{\mathrm{DM}^-(F)}$ коммутирует с $\oplus$;

4. если $A^\bullet, B^\bullet \in D^-(\mathrm{NSwT})$, то $C^\bullet(A^\bullet) \otimes C^\bullet(B^\bullet) \to C^\bullet(A^\bullet \otimes B^\bullet)$ — изоморфизм.

В частности, если $X, Y \in \mathrm{Sm}/F$, то $M(X \times Y) \cong M(X) \otimes_{\mathrm{DM}^-(F)} M(Y)$.

Построим $\otimes^L$.

Лемма 2.2. Если $\mathcal{F} \in \mathrm{NSwT}$, то имеется естественная (по $\mathcal{F}$) резольвента

$$\mathcal{X}^\bullet(\mathcal{F})\colon \cdots \to \bigoplus X \in \mathrm{Sm}/F \bigoplus_{\substack{s \in \mathcal{F}(Y \times \mathbb{A}^1) \\ s|_{Y \times 0} = 0}} \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y \times \mathbb{A}^1 / Y \times 0) \to \mathcal{F} \to 0,$$

состоящая из представимых пучков.

Следствие 2.3. Если $A^\bullet \in D^-(\mathrm{NSwT})$, то процедура из леммы 2.2 доставляет квазиизоморфизм $\mathcal{X}^\bullet(A^\bullet) \to A^\bullet$, где $\mathcal{X}^\bullet(A^\bullet)$ — комплекс из представимых пучков.

Теперь для $A^\bullet, B^\bullet \in D^-(\mathrm{NSwT})$ можно положить

$$A^\bullet \otimes^L B^\bullet = \mathcal{X}^\bullet(A^\bullet) \otimes_{\mathrm{tr}} \mathcal{X}^\bullet(B^\bullet).$$

Осталось понять, что такое $\otimes_{\mathrm{tr}}$. Для этого берем у объектов канонические резольвенты, состоящие из представимых пучков, и перемножаем их. Для перемножения представимых пучков положим $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \otimes_{\mathrm{tr}} \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y) = \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X \times Y)$.

Заметим наконец, что у нас есть комплексы $\mathbb{Z}(n) = M(\mathbb{G}_m^{\times n})$. Тогда равенство $\mathbb{Z}(n) \otimes \mathbb{Z}(n') = \mathbb{Z}(n + n')$ моментально следует из того, что $M(X \times Y) \cong M(X) \otimes M(Y)$.