G — групповая схема над F

E/F $\quad G_E$ — групповая схема над E

$\{f_1 = \ldots = f_k = 0\}$ над F

$\{f_1 = \ldots = f_k = 0\}$ над E

$E[G_E] = F[G] \otimes_F E$

$G_E(R) = G(R)$

R — E-алгебра; $\quad R$ рассм. как F-алгебра

Напоминание: G — гладкая $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Lie} G = \dim G$
$\Leftrightarrow \overline{F}[G_{\overline{F}}]$ без нильпотентов

Пример: μ_n гладкая $\Leftrightarrow \operatorname{char} F \nmid n$

$F[x]/_{x^n - 1}$, если $n = mp$, $p = \operatorname{char} F$
$(x^m - 1)^p = 0$

Если $\operatorname{char} F = 0$, то все групповые схемы гладкие

G — полупростая алг. группа, если
1. она гладкая, неабелева
2. $G_{\overline{F}}$ не имеет связных разрешимых нормальных делителей

простая, если
— // — //
— // — // — // ( ) — // — // — // —

Над алг. замкнутым полем

$\underbrace{\mathbb{G}_m \times \ldots \times \mathbb{G}_m}_{r}$ — тор (расщепимый)

над произвольным — форма этого

Выбираем внутри G расщепимый тор наибольшей размерности (= макс. по включению)

$\boxed{\text{Теорема:}}$ Все такие сопряжены элементом $G(F)$:
$T \leq G$, $T' \leq G \rightsquigarrow \exists g \in G(F)$: $T' = gTg^{-1}$

$\dim T$ называется <u>рангом</u> группы G.

$\boxed{\text{Пример}}$ $\quad G = SL_n$ — простая

$$\left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix} \;\middle|\; t_1 \ldots t_n = 1 \right\} \cong \mathbb{G}_m^{n-1}$$

простая

$G \hookrightarrow GL_n$
$\Downarrow$

Если есть точное представление $G \longrightarrow SL_n$ — пропускается через SL_n

то прообраз тора в SL_n — максимальный расщепимый тор в G
(его $\dim$ может быть меньше, чем $n-1$)

$T \leqslant G$

$N_G(T)$:

$\underbrace{N_G(T)}_{\text{замкнутая подгруппа}}(R) = \{ g \in G(R) \mid \forall S/R \quad g_s T_s g_s^{-1} \leq T_s \}$

$N_G(T)/_T$ — постоянная $\underbrace{\text{конечная группа}}_{\text{группа Вейля}}$

$N_{SL_n}(T)$ = подгруппа мономиальных матриц

(в каждой строчке ровно 1 ненулевой элемент)

например, в SL_2 $\quad N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} ad - bc = 1, \\ ab = ac = bd = cd = 0 \end{matrix} \right\}$

$\qquad\qquad = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$N_{SL_n(T)}(T)/_T \simeq S_n$

$SL_2 \rightsquigarrow S_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Характеры $G = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m) = X^*(G)$

G — расщепимый тор, $G = \mathbb{G}_m \times \ldots \times \mathbb{G}_m$

$\rightsquigarrow X^*(G) = \mathbb{Z}^r$

$(t_1, \ldots, t_m) \longmapsto (t_1^{a_1}, \ldots, t_m^{a_m})$, $a_i \in \mathbb{Z}$

$T \longrightarrow GL(V) \qquad V$ — в.п. над F

$\rightsquigarrow$ на V появляется $\mathbb{Z}^n$-градуировка

$V = \bigoplus_{\chi \in X^*(T)} V_\chi$, $\quad \forall S/R$

$V_\chi^{(R)} = \{ v \in V \mid t_s v_s = \chi(t_s) \cdot v_s \}$

такие χ, для которых $V_\chi \neq 0$ — веса представления

Теперь $T \leq G$, G действует на $\mathrm{Lie}(G)$ сопряжением

Ограничим его на $T \rightsquigarrow T$ действует на $\mathrm{Lie}(G)$

$T \longrightarrow GL(\underbrace{\mathrm{Lie}(G)}_{V})$

$\rightsquigarrow \mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}\, T \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} (\mathrm{Lie}\, G)_\alpha$ — одномерны

$\mathrm{Lie}\, T = V_0$ поскольку $C_G(T) = T$

Φ — конечное подмн-во в $X^*(T)$

Φ называется системой корней G

$W = N_G(T)/T$

W действует на $X^*(T)$ и на Φ

Введем на $X^*(T)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ W-инвариантное скалярное произведение (можно взять любое и усреднить)

$$(u,v)_0 = \sum_{w\in W}(wu,wv)_0$$

$\Phi \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ — абстрактная система корней:

① $\mathbb{R}\Phi = \mathbb{R}^n$

отражение относительно α

② $\forall \alpha\in\Phi \quad s_\alpha(\Phi)=\Phi$ (и даже $s_\alpha\in W$)

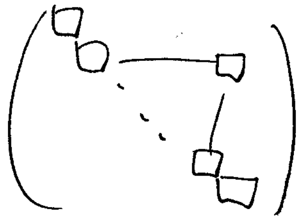
③ Если $\alpha,\beta\in\Phi$, то $\quad s_\alpha(\beta) = \beta - \boxed{2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}}\alpha$

$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ — целое число

④ $\alpha\in\Phi \Rightarrow 2\alpha\notin\Phi$ (приведенность)

$\begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix}$ $t_1\dots t_n = 1$ $\quad \mathrm{Lie}(SL_n) = \{x\in M_n \mid \mathrm{tr}\, x = 0\}$

T действует сопряжением на $\mathrm{Lie}\, SL_n$



$\langle e_{ij}\rangle$ — весовое пространство

$\varepsilon_i : \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \longmapsto t_i$

$\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ — характеры, $\sum \varepsilon_i = 0$

Вес $\langle e_{ij}\rangle$ — это $\varepsilon_i - \varepsilon_j$

Система корней — мн-во $\{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1\le i\ne j\le n\}$

A_{n-1}

скалярное произведение устроено так: ε_i — ортогональный базис

$\Phi\subset\mathbb{R}^r$ — система корней

Можно в Φ выбрать набор простых корней $\alpha_1,\dots,\alpha_r$

① $\alpha_1,\dots,\alpha_r\in\Phi$ и образуют базис $\mathbb{R}^r$

② $(\alpha_i,\alpha_j)\le 0$, если $i\ne j$

Такие наборы существуют и все переводятся друг в друга единственным элементом группы Вейля

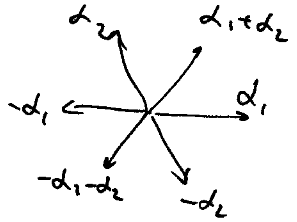
A_{n-1} $\quad |S_n| = n!$

$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$

$\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$

$\vdots$

$\alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$



Любой $\alpha \in \Phi$ записывается в виде целочисленной лин. комбинации $\alpha = \sum m_i \alpha_i$, где $m_i \in \mathbb{Z}$ и имеют одинаковый знак (все неотрицательны и все неположительны)

$$\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = n_{ij}$$

(n_{ij}) — матрица Картана

$i = j \quad 2$

$i \neq j \quad \leq 0:$

$-1 \quad \bullet\!\!-\!\!\bullet$

$-2 \quad \alpha_i \Rightarrow \alpha_j$

$-3 \quad \alpha_i \Rrightarrow \alpha_j \implies (\alpha_i, \alpha_i) > (\alpha_j, \alpha_j)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & & \\ & & & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ — для A_n

$\overset{\bullet}{\alpha_1} \quad \overset{\bullet}{\alpha_2} \; - - - \; \overset{\bullet}{\alpha_n}$

$\boxed{\text{Теорема}}$ ① Полупростая алгебраическая группа с точностью до центральной изогении задается своей системой корней

② Система корней задается матрицей Картана, кот. можно изобразить в виде диаграммы Дынкина

$\forall$ д. Дынкина — несвязное объединение

A_n :

B_n :

C_n :

D_n :

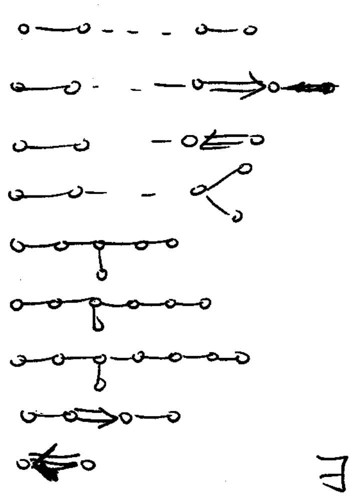
E_6 :

E_7

E_8

F_4

G_2



$G \xrightarrow{\varphi} H$ — центральная изогения

① $Ker(\varphi) \leq Cent(G)$

$Ker(\varphi)(R) = Ker(G(R) \to H(R))$

② $Ker(\varphi)$ — конечная схема над F (координатная алгебра конечномерна)

③ φ — сюръективно

H_1, H_2 центрально изогенны, если

$\exists G:$ $H_1 \leftarrow G \rightarrow H_2$ — центр. изогении

$1 \to \mu_n \to SL_n \to PGL_n \to 1$