о т с т у п л е н и е 12.03.2012

A_n: $\mathcal{A}$ (центральная простая алгебра)

$SL_1(\mathcal{A})$

$\deg \mathcal{A} = 5$

$(a, b)_5$: $x^5 = a, y^5 = b, xy = \zeta_5 yx$

└ циклическая алгебра

$H^2(F, \mu_5)$ $(a) \cup (b)$

$\in H^1(F, \mu_5) = F^*/(F^*)^5$

<u>Открытый вопрос:</u>

Верно ли, что любая центральная простая алгебра степени 5 (p) циклическая?

$p = 2, 3$ – ответ „да"

$p \neq 2, 3$ – неизвестно

$B_n, C_n, D_n, {}^2A_n$

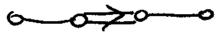
A – ц.п.а. (условно говоря) с инволюцией σ

иногда над квадр. расширением

⇝ G изогенична $\mathrm{Aut}(A, \sigma)$

тип зависит от свойств инволюции

В частности, надо классифицировать эрмитовы формы

F_4 

Над замкнутым полем

$\mathbb{O}$ – октонионы $\bar{\cdot}$ – сопряжение

$$H_3(\mathbb{O}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & x & y \\ \bar{x} & \beta & z \\ \bar{y} & \bar{z} & \gamma \end{pmatrix} \right\}$$

– эрмитовы матрицы 3 на 3 над $\mathbb{O}$

– алгебра относительно $*$ (<u>йорданова алгебра</u>)

$$a * b = \frac{1}{2}(ab + ba)$$

$\mathrm{Aut}(H_3(\mathbb{O}))$ – группа типа F_4

$$\begin{cases} a * b = b * a \\ a^{*2} * (b * a) = (a^{*2} * b) * a \end{cases}$$

$$a *_u b = a * (u * b)$$

$$u * u^{-1} = u^{-1} * u = 1$$

$f_3 : H^1(K, F_4) \longrightarrow H^3(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ — $(x) \cup (y) \cup (z)$

$f_5 : H^1(K, F_4) \longrightarrow H^5(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ — $(x) \cup (y) \cup (z) \cup (u) \cup (v)$

$g_3 : H^1(K, F_4) \longrightarrow H^3(K, \mu_3)$ — $(a) \cup (b) \cup (c)$

Гипотеза (Серра – Роста):

(f_3, f_5, g) инъективен

$W \cong N(T)/T$

(Выберем для каждого $w \in W$ какое-то поднятие $\dot{w} \in N(T)$)

$g \in N(T)/T \rightsquigarrow$ действует на характерах $\rightsquigarrow$ сохраняет мн-во корней

Обратно, $\alpha \in \Phi$. Как построить s_α?

$$\mathrm{Lie}\ G = \mathrm{Lie}\,T \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} V_\alpha$$

$\mathrm{Lie}\,T \oplus V_\alpha \oplus V_{-\alpha}$ — подалгебра Ли, так как

$[V_\alpha, V_{-\alpha}] \leq \mathrm{Lie}(T)$

Вообще, $[V_\alpha, V_\beta] \leq \begin{cases} V_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha+\beta = 0 \text{ или корень} \\ 0, & \text{если } \alpha+\beta \neq 0 \text{ и не корень} \end{cases}$

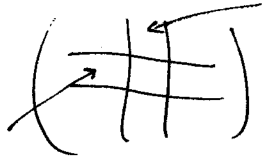
$V_0 = \mathrm{Lie}\,T$

Можно доказать, что $\exists$ единственная гладкая связная подгруппа H_α в G, содержащая T: $\mathrm{Lie}\,H_\alpha = \mathrm{Lie}\,T \oplus V_\alpha \oplus V_{-\alpha}$

$[H_\alpha, H_\alpha]$ — либо SL_2, либо PGL_2.

Пример

$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$



$-\alpha_1$

SL_3

$\rightsquigarrow H_\alpha = \left(\begin{array}{cc|c} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right)$

$[H_\alpha, H_\alpha] = \left(\begin{array}{c|c} SL_2 & \\ \hline & 1 \end{array}\right)$

Иначе:

$\alpha : T \longrightarrow \mathbb{G}_m$

$\mathrm{Ker}\,\alpha \leq T$

$\mathrm{Cent}_G(\mathrm{Ker}\,\alpha) = H_\alpha$

$\mathrm{Ker}\,\alpha_1 : \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$

Итак, поднимаем отражения

Внутри SL_2: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in N_{SL_2}(T_{SL_2})$

порождает группу Вейля

s_α — образ этого элемента в $N(T)/T$

В общем виде: поднимаем в $[H_\alpha, H_\alpha] \leq G$

Заметим, что $\dot{s}_\alpha^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Разложение Брюа

$$G(K) = \bigsqcup_{w\in W} B(K)\cdot\dot{w}\cdot B(K)$$

то есть $\forall g\in G(k)$ записывается в виде $b_1\dot{w}b_2$, причем w определен однозначно

$$B(k)\backslash G(k)/B(K) \simeq W$$

Пример

$$SL_2(k) = B(k)\sqcup B(K)\cdot s_\alpha\cdot B(k)$$

$B(k) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, $\quad B(K)\cdot s_\alpha\cdot B(k) = \begin{pmatrix} * & * \\ \neq 0 & * \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Как их перемножать?

$$B\dot{s}_{\alpha_i}B\cdot B\dot{w}B \subset B\overline{\dot{s}_{\alpha_i}\dot{w}}B\sqcup B\dot{w}B$$

$$B s_{\alpha_i}s_{\alpha_j}B\cdot B\dot{w}B \subset B\overline{\dot{s}_{\alpha_i}\dot{s}_{\alpha_j}\dot{w}}B\cup B s_{\alpha_i}\dot{w}B\cup B s_{\alpha_j}\dot{w}B\cup B\dot{w}B$$

Борелевская подгруппа:

$$\mathrm{Lie}\,T\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Phi}V_\alpha$$

$$\supseteq$$

$$\mathrm{Lie}\,T\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Phi^+}V_\alpha = \mathrm{Lie}\,B$$

для единственной гладкой связной подгруппы в G, содержащей T

~~[illegible]~~ При фиксированном T борелевских подгрупп $|W|$ штук в зависимости от способа выбора Π в Φ.

$B = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ $\quad SL_3$

B — Φ^+

$B^-\sim\Phi^-$ — противоположная борелевская

$$B\cap B^- = T$$

$B^- = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$

Во всех классических примерах при нашем выборе базиса B состоит из верхнетреугольных матриц, попадающих в G.

Порядок Брюа

$w = s_{\alpha_{i_1}}\cdot\ldots\cdot s_{\alpha_{i_k}}$ — наименьшей возможной длины

длина (k) = <u>длина</u> $w\in W$

Для S_n это просто кол-во инверсий — от 0 до $\frac{n(n-1)}{2}$ = кол-во полож. корней в A_{n-1}

$$\ell(w) = |\{\alpha\in\Phi^+\mid w(\alpha)\in\Phi^-\}|$$

$$0\le\ell(w)\le|\Phi^+|$$

$$\ell(1)=0$$

$$\ell(w_0)=|\Phi^+|$$

$$w_0(\alpha)=-\alpha$$

Для S_n: $(s_1s_2\ldots s_{n-1})(s_1s_2\ldots s_{n-2})\ldots(s_1)$

Если диаграмма Дынкина связна, то $w_0(\alpha)=-\alpha\ \forall\alpha$, кроме случаев A_n, D_n с нечетным n, E_6

$w_0(\alpha_i) = -\alpha_{i^\circ}$, где $-^\circ$ — автоморфизм диагр. Дынкина порядка 2.

Порядок Брюа: $w = s_{\alpha_{i_1}}\cdot\ldots\cdot s_{\alpha_{i_k}}$ — наим. длины — <u>приведенное разложение</u>

вычеркнули какие-то сомножители — получили $v\in W$ — получаем те, что ~~[illegible]~~ меньше w в порядке Брюа (сильном). При этом $\exists$ приведенное разложение v, которое встречается как подстрока в w

① $v \leq s_i v$, если $l(s_i v) = l(v)+1$

② Если $v \leq w$, то либо $s_{\alpha_i} v \leq w$, либо $s_{\alpha_i} v \leq s_{\alpha_i} w$

Более того, порядок Брюа характеризуется этими двумя свойствами

$l \bmod 2 : W \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — гомоморфизм
(аналог чётности перестановки)

Пусть K — алг. замкнутое поле

① $$\overline{B(K)\dot{w}B(K)} = \bigsqcup_{v \leq w} B(K)\dot{v}B(K) \quad \text{(теорема Шевалле)}$$
порядок Брюа

т.е. замыкание клетки Брюа = объединение клеток Брюа

② как многообразие $B(K)\dot{w}B(K) \cong \mathbb{A}^{l(w)} \times B(K)$

В частности, $B w_0 B$ — плотное (открытое) подмножество в G

$B^- = w_0 B w_0$

$\rightarrow$ $B B^-$ — открытое плотное в G