$$G(K) = B(K)WB(K)$$

На самом деле это разложение выполнено и для произвольного поля K, если в G есть B, определенная над K

Теорема (Титс): если G – односвязная простая в алгебраическом смысле, изотропная (содержит расщепимый тор), то

$$G(K) \Big/ \underbrace{\mathrm{Cent}(G)(K)}_{\parallel} \quad \text{— простая как абстрактная группа}$$

$\mathrm{Cent}(G(K))$, если K бесконечно

$$B(K) \leq \underset{\uparrow}{\ldots} \leq G(K)$$

Сколько существует таких абстрактных подгрупп?
Они называются параболическими

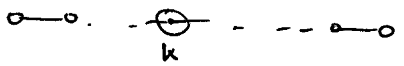
Пусть I — подмножество индексов на диаграмме Дынкина D

W_I — подгруппа, порожденная s_i с $i \notin I$

В частности, $W_\varnothing = W$, $W_D = 1$

W_I - группа Вейля некоторой подсистемы

Пример:



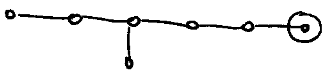
A_n

$$I = \{k\}$$

$$W_I = W(A_{k-1}) \times W(A_{n-k})$$

$$S_k \times S_{n-k+1} \leq S_{n+1}$$

Пример:



E_7

$$I = \{7\}$$

$$W_I = W(E_6)$$

$$P_I(K) = B(K)W_I(K)B(K)$$

Теорема (Титс) $P_I(K)$ — подгруппа, и все абстрактные подгруппы $G(K)$, содержащие $B(K)$, так получаются.

BN-пара — $\begin{cases} Bs_iB \cdot BwB \subset BwB \cup Bs_iwB \\ B \cup Bs_iB \text{ – подгруппа, похожая на } SL_2 \end{cases}$

$G = BWB$

$\rightsquigarrow G/B \overset{\text{примерно}}{=} \coprod_{w\in W} BwB/B$

На точках:

$G/B\,(k) = \coprod BwB/B\,(k)$. Что такое G/B?

B – замкнутая подгруппа

G/B — многообразие

1) предпучок $R \longmapsto G(R)/B(R)$

2) ассоциированный пучок в топологии Зарисского

То, что получилось, представимо гладким проективным многообразием

На G/B как многообразии существует фильтрация замкнутыми (не обязательно гладкими) подмногообразиями

$G/B = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_N \supset X_{N+1} = \varnothing$ число положительных корней

$X_i \setminus X_{i+1} = \coprod_{\ell(w)=i} BwB/B$

и для каждого w $BwB/B \simeq \mathbb{A}^{\ell(w)}$

$P_I(k)$ доопределяются до функтора, представимого замкнутой гладкой подгруппой P_I: $B \leqslant P_I \leqslant G$

$G(k)/P(k) = \coprod_{w\in W/W_I} BwP/P$

$G(k) = B(k)\,W\,B(k)$
если подставить произвольное R, то это неправда

На G/P как многообразии существует фильтрация

$G/P = X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_n \supset X_{n+1} = \varnothing$

$X_i \setminus X_{i+1} = \coprod_{w\in W/W_I} BwP/P$

длина минимального представителя смежного класса w равна $n-i$

$BWP/P \simeq \mathbb{A}^{\ell(w)}$

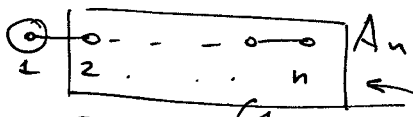
Положим $\ell(w)$ = длина мин. представителя для $w \in W/W_I$

Замечание Если $X \supset Y$, $U = X \setminus Y$, Y — замкнут в X, и K — поле, то $X(K) = Y(K) \sqcup U(K)$

Примеры: $\mathbb{P}^n$: взяли $n+1$-мерное векторное V

SL_{n+1} на нем действует, при этом на прямых оно транзитивно

$$\mathrm{Stab}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = P_1 :$$ — параболическая



~~$[P_1, P_1]$~~ в P_1 есть подгруппа SL_n: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & SL_n \end{pmatrix}$ — подгруппа Леви, соотв. A_{n-1}

Диаграмма Дынкина SL_n получается из диаграммы Дынкина SL_{n+1} выкидыванием первой вершины

Интуитивно борелевская = верхнетреугольные (в нек. базисе), лежащие в G

параболическая = блочно-верхнетреугольные (с какими-то условиями)

подгруппа Леви = блочно-диагональные

унипотентный радикал = блочно-верхне унитреугольные

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & 0 \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$W(A_n) = S_{n+1}$

$W_{\{1\}} = S_n = \langle s_2, \ldots, s_n \rangle$ = перестановки из S_{n+1}, переводящие 1 в 1.

$S_{n+1}/S_n = \{1, 2, \ldots, n+1\}$

$\pi \longmapsto \pi(1)$

Выбираем представителей min длины в W/W_I

1 $\quad 1$

2 $\quad s_1 = (1\ 2)$

3 $\quad s_2 s_1 = (2\ 3)(1\ 2)$

4 $\quad s_3 s_2 s_1$

$\vdots$

$s_n \ldots s_2 s_1$

Порядок Брюа в данном случае линейный:

$1 < s_1 < s_2 s_1 < \ldots < s_n \ldots s_1$

Точнее, это индуцированный порядок Брюа:

$w_1 < w_2$, если $\exists$ поднятия $\widetilde{w_1}$ и $\widetilde{w_2}$ т.ч. $\widetilde{w_1} \leq \widetilde{w_2}$.

На самом деле, можно проверять это только для представителей максимальной длины

$$\underset{1}{\circ}\overset{1}{—}\underset{s_1}{\circ}\overset{2}{—}\underset{s_2 s_1}{\circ}\ \cdots\ \overset{n}{—}\underset{s_n\dots s_1}{\circ}$$ — диаграмма Хассе этого порядка:

Вершины = смежные классы

Ребро с меткой i из v в v', если $v' = s_i v \mod W_I$

Это слабый порядок Брюа (разрешаем домножать только слева)

$$BwP/P = Bw\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

W действует на базисе перестановками

→ для w, отвечающего i, $\pi\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ — $\pi(1)$

Умножение на B = разрешаем все прибавления снизу вверх

$\sim B \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}$ причем последняя $* \neq 0$

$\sim$ Фильтрация на $\mathbb{P}^n$ выглядит так:

$[x_1, \dots, x_{n+1}]$

$X_0 = \mathbb{P}^n$

$X_1 = \{x_{n+1} = 0\}$

$\vdots$

$X_n = \{x_2 = \dots = x_{n+1} = 0\} = \{[1\,0 \dots 0]\} = pt$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n \arrow[d, "\mathbb{A}^n"'] & \supset \mathbb{P}^{n-1} \arrow[d, "\mathbb{A}^{n-1}"'] & \supset \dots & \supset \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\mathbb{A}^1"'] & \supset pt \\ pt & pt & & pt & \end{tikzcd}$$

Теорема Шевалле на этом языке звучит так:

$$\underbrace{\overline{BwP/P}}_{\text{замыкание в } G/P} = \underbrace{\bigsqcup_{v \le w}}_{\text{дизъюнктное на полях}} BvP/P$$

$v \le w$ — в индуцированном (сильном) порядке Брюа.

G/P = замкнутая орбита $\langle v \rangle$ в каком-то представлении V. Тогда

$\boxed{\text{Теорема}}$ X_i выделяются из G/P внутри $\mathbb{P}(V)$ набором линейных уравнений (можно брать $\mathbb{P}(V_1) \times \dots \times \mathbb{P}(V_k)$)