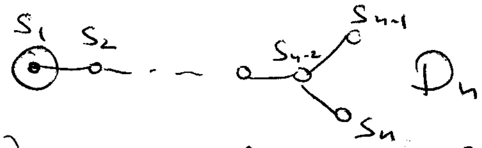
Еще один пример разложения Брюа

D_n/P_1



$W(D_n)$ — подгруппа индекса 2 в Oct_n

$2^{n-1} n!$

$1, \dots, n, -n, \dots, -1$

$\pi(-i) = -\pi(i)$ $\quad s_i: \ (i \ i{+}1)(-i \ -(i{+}1))$

$\prod_{i=1}^{n} \pi(i)$ — полож. число $\quad s_n: \ (n{-}1 \ -n)(n \ -(n{-}1))$

$W(D_{n-1})$

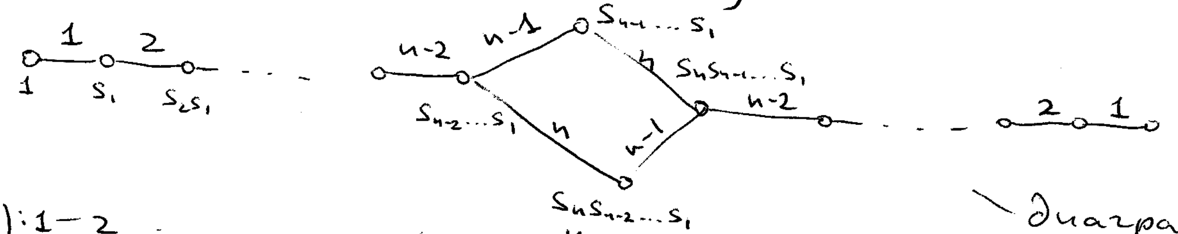
$2^{n-2}(n-1)! \rightsquigarrow 2n$ смежных классов

$1, \dots, n, -n, \dots, -1$ — $2n$-элементное множество

$W(D_n)$ действует на нем транзитивно

стабилизатор точки 1 как раз равен $W(D_{n-1})$

$\pi \rightsquigarrow$ достаточно следить за $\pi(1)$



$\pi(1)$: 1 — 2 . . . — (n−1) < n, −n > (n−1) — . . . — 2 — 1

диаграмма Хассе $W(D_n)/W(D_{n-1})$

У SO_{2n} есть $2n$-мерное векторное представление

$x_1, \dots, x_n, x_{-n}, \dots, x_{-1}$.

$x_1 x_{-1} + \dots + x_n x_{-n}$ — квадр. форма

Замкнутая орбита — квадрика $x_1 x_{-1} + \dots + x_n x_{-n} = 0$

Выделим точку: $x_1 = 1$, остальные $= 0$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$W(D_n)$ действует перестановками координат

Считаем BwP/P — то же самое, что и $Bw\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$w = 1 \rightsquigarrow B\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \longrightarrow$ замыкание — pt

$w = s_1 \rightsquigarrow B\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} * \\ * \neq 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \longrightarrow \mathbb{P}^1$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$w = s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_1 \quad B\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ * \neq 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \mathbb{P}^{n-1} - \Pi_1$

$w = s_n s_{n-2}\cdots s_1 \quad B\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ * \neq 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \mathbb{P}^{n-1} - \Pi_2$

$w = s_n s_{n-1}\cdots s_1 \quad B\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle =$ те из $\left\langle \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ * \\ * \neq 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, которые лежат на квадрике

Это многообразие не гладкое
(вернее, его замыкание)
Однако, оно рационально эквивалентно гладкой подквадрике той же размерности

$w = s_2\cdots s_2 s_1 \quad B\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \\ * \neq 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

его замыкание — гиперплоское сечение квадрики:
$x_{-1} = 0$; оно не гладкое.
$\dfrac{x_{-1}}{x_1 - x_{-1}}$ — рац. функция $\rightsquigarrow$ это сечение рац. эквивалентно гладкой подквадрике

$x_1 = x_{-1} \rightsquigarrow x_1^2 + x_2x_{-2} + \dots + x_nx_{-n} = 0$
— уравнение гладкой нечетномерной квадрики

$x_{-1} = 0 \rightsquigarrow x_2x_{-2} + \dots + x_nx_{-n} = 0$ и отдельно болтается x_1
$x_1, x_2, x_{-2}, \dots, x_n, x_{-n}$ одновременно не обращаются в 0
$\rightsquigarrow$ Конус над гладкой квадрикой
Дифференциал обнулится в точке $x_1 = 1$, остальные $= 0$.

$w = s_1 s_2 \dots s_2 s_1 \longrightarrow$ замыкание $=$ все

Простая группа G называется <u>изотропной</u>, если в ней содержится $\mathbb{G}_m$ в качестве замкнутой подгруппы.

Цель: показать, что в этой ситуации тоже есть фильтрация на любом G-однородном X.

Альтернативное описание параболических подгрупп (в терминах $\mathbb{G}_m$):

посмотрим на $\mathrm{Cent}_G(\mathbb{G}_m)$ — <u>редуктивная</u> подгруппа.

В частности, ее фактор по центру — полупростая подгруппа (нет связных разрешимых нормальных подгрупп)

На самом деле это L — подгруппа Леви некоторой параболической подгруппы P.

$$g \in G(R)$$

$$t \in \mathbb{G}_m(R) = R^\times$$

$$\rightsquigarrow t g t^{-1} \in G(R)$$

$\lim\limits_{t \to 0} t g t^{-1}$ — существует ли?

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_m &\longrightarrow G \quad \text{— морфизм схем} \\ t &\longmapsto t g t^{-1} \end{aligned}$$

Продолжается ли он до морфизма из $\mathbb{A}^1$ в G?

$$P(R) = \{ g \in G(R) \mid \text{морфизм } \mathbb{G}_m \longrightarrow G \text{ продолжается до морфизма } \mathbb{A}^1 \longrightarrow G$$

$$L(R) = \{ g \in G(R) \mid \text{морфизм } \mathbb{G}_m \longrightarrow G \text{ постоянен} \}$$

$\boxed{\text{Пример}}$ SL_2 $\quad \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{G}_m \leqslant SL_2$

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & t^2 b \\ t^{-2} c & d \end{pmatrix}$$

предел $\lim\limits_{t \to 0}$ существует $\iff c = 0$

Можно показать, что этот предел лежит в $L(R)$

Вычисление $\lim\limits_{t \to 0}$ дает гомоморфизм групп $P \longrightarrow L$, для которого сечением является вложение L в P

Так получаются все параболические подгруппы

Пример параболической для нерасщепимой группы

Возьмем изотропную квадратичную форму

$$q = \langle 1, -1 \rangle \perp q' \qquad G = SO(q) \leq GL(V)$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 'лучше'

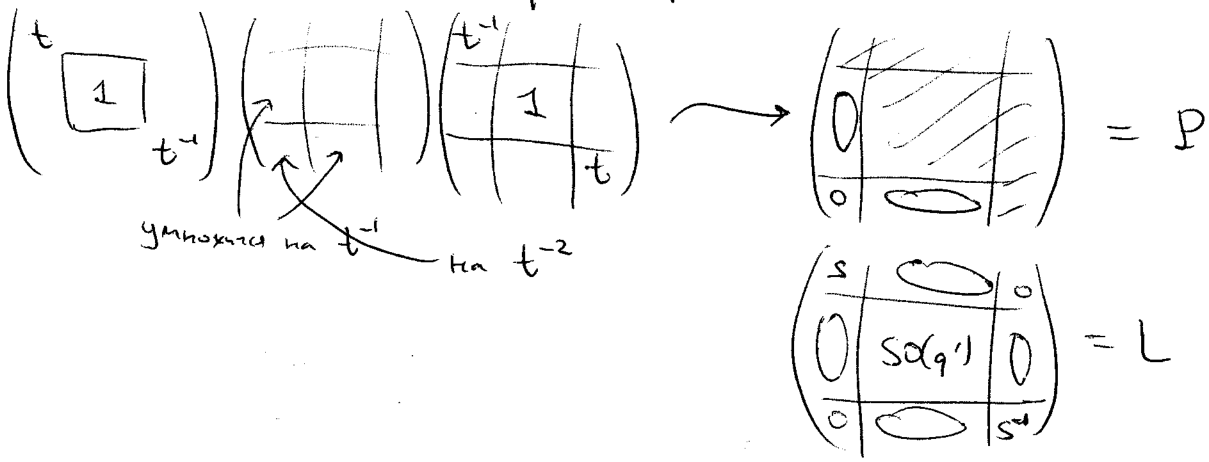
$$V = \langle x_1, x_{-1} \rangle \oplus V'$$

В $SO(q)$ живет $\mathbb{G}_m$:

$$\mathbb{G}_m: \quad x_1 \longmapsto t x_1, \qquad x_{-1} \longmapsto t^{-1} x_{-1}$$

на V' действует тривиально

$$\mathrm{Cent}(\mathbb{G}_m) = \mathbb{G}_m \times SO(q') = L$$



Как построить фильтрацию на X, аналогичную разложению Брюа?

Допустим, X = замкнутая орбита в проективизации $\mathbb{P}(V)$, где V — представление G.

– так всегда можно сделать, даже в нерасщепимой ситуации

$\mathbb{G}_m \leq G \longrightarrow$ в частности, $\mathbb{G}_m$ действует на V

$\rightsquigarrow V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$, где $\mathbb{G}_m$ на V_i действует так: $t \cdot v = t^i v$

(действие $\mathbb{G}_m$ на векторном пространстве = $\mathbb{Z}$-градуировка)

$$V = V_{-m} \oplus \ldots \oplus V_n \longrightarrow \langle v \rangle = [v_{-m} : \ldots : v_n]$$

$\rightsquigarrow$ на $\mathbb{P}(V)$ возникает фильтрация проективными пространствами меньшей размерности

первый член: $v_{-m} = 0$

второй: $v_{-m} = \ldots = 0$

$\vdots$

последний: все, кроме v_n, равны 0.

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Białynicki-Birula + Brosnan)

Пересечем $X \subset \mathbb{P}(V)$ с членами этой фильтрации. Получится фильтрация на X такая, что последовательные разности — расслоения с аффинными слоями над проективными многообразиями, однородными относительно $\mathrm{Cent}_G(\mathbb{G}_m) = L$

$$[V_{-m} : V_{-m+1} : \ldots : V_n] \cap X$$
$$[0 : V_{-m+1} : \ldots : V_n] \cap X$$

Разность отправляется в $[V_{-m} : 0 : \ldots : 0] \cap X$,

и [illegible], слой — аффинное пространство (но это не очевидно)

Следствие — мотивное разложение X; слагаемые — проективные L-однородные многообразия (точнее, их мотивы) с какими-то сдвигами (= размерности аффинных пространств)

$$q = \langle 1, -1 \rangle \perp q'$$
$$V = \langle x_1, x_{-1} \rangle \oplus V' \qquad x_1 x_{-1} + q'(v') = 0$$

$$[x_1 : v' : x_{-1}]$$
$$[0 : v' : x_{-1}]$$
$$[0 : 0 : x_{-1}] = pt$$

$$Q \supset \{x_1 = 0\} \supset pt$$

$[x_1 : v' : x_{-1}] \to [x_1 : 0 : 0]$, $\quad Q \setminus \{x_1=0\} \to pt$

$\{x_1=0\} \setminus pt \to \{q'=0\}$, $\quad [0 : v' : x_{-1}] \to [0 : v' : 0]$

$\rightsquigarrow$ мотив изотропной квадрики Q раскладывается так:

$$M(Q) = \mathbb{Z} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ \text{квадрика на 2 меньшей размерности}}}{M(Q')}\{1\} \oplus \mathbb{Z}\{\dim Q\}$$

$\boxed{\text{Упр.}}$ Доказать, что при фиксированном $x_1 \neq 0$ слой над pt — аффинное пространство $\mathbb{A}^{\dim Q}$