$\boxed{02.04.2012}$

Полином Пуанкаре

X — клеточное, гладкое проективное

$$P(X,t) := \sum rk(CH^i(X))\cdot t^i$$

<u>Пример</u> $X = \mathbb{P}^n$ $\quad P(\mathbb{P}^n, t) = 1+t+\dots+t^n$

Q — квадрика, $\dim Q = 2m$

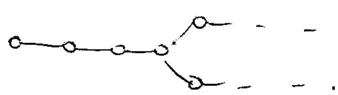
$$P(Q,t) = 1+t+\dots+t^{m-1}+2t^m+t^{m+1}+\dots+t^{2m}$$

Следствие из двойственности Пуанкаре — коэффициенты $P(X,t)$ симметричны

$$CH^i(X)\times CH^{\dim(X)-i}(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{— невырожденное спаривание, совершенное (т.е. сюръекция)}$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \deg(\alpha\beta)$$

Цель: научиться считать $P(G/P, t)$



коэффициент при t^i = количество вершин на i-ой вертикали
= количество смежных классов в W/W_P таких, что длина минимального представителя равна i

$$BwP/P \cong \mathbb{A}^{l(w)}$$

$\overline{BwP/P}$ — замкнутое в G/P

W порождена s_α, $\alpha\in\Phi$ $\rightsquigarrow W \leqslant O(\mathbb{R}^l)$, $l = rk\,\Phi$ = dim макс. тора

Смотрим на полиномы от l переменных, инвариантные относительно W, т.е. $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_l]^W$

<u>Теорема</u> (Шевалле)

Алгебра $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_l]^W$ свободно порождена некоторыми однородными полиномами $p_1,\dots,p_l$ (<u>фундаментальные инварианты</u>)
$\deg p_i$ определены однозначно — <u>степени фундаментальных инвариантов</u>

Пример: A_l

$W(A_l) = S_{l+1}$ $\qquad \mathbb{R}^l$ — гиперплоскость в $\mathbb{R}^{l+1}$: $\{\sum_{i=1}^{l+1} x_i e_i \mid \sum x_i = 0\}$

$W(A_l)$ действует перестановками x_i

$x_1+\dots+x_{l+1} = 0 \rightsquigarrow x_{l+1} = -x_1-\dots-x_l$

$x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_lx_{l+1}$ — инвариант степени 2

$\vdots$

$x_1x_2\dots x_l$ — инвариант степени $l+1$

$\rightsquigarrow$ степени фунд. инвариантов — $2,3,\dots,l+1$

$W(B_\ell) = W(C_\ell) = \mathrm{Oct}_\ell \leqslant O(\mathbb{R}^\ell)$

$\mathbb{R}^\ell$ $\quad \pi : x_i \longmapsto \mathrm{sgn}(\pi(i)) \cdot x_{|\pi(i)|}$

— симметрии ℓ-мерного куба

Инварианты: симметрические функции от x_i^2

$x_1^2 + \dots + x_\ell^2$ (первый инвариант — всегда степени 2
= сумма квадратов в подходящем базисе)

$x_1^2 x_2^2 + \dots + x_{\ell-1}^2 x_\ell^2$

$\vdots$

$x_1^2 x_2^2 \dots x_\ell^2$

$\rightsquigarrow$ степени фундаментальных инвариантов равны $2, 4, \dots, 2\ell$.

$W(D_\ell)$ — подгруппа индекса 2 в Oct_ℓ

$x_1^2 + \dots + x_\ell^2$

$x_1^2 x_2^2 + \dots + x_{\ell-1}^2 x_\ell^2$

$\vdots$

последний заменим на: $x_1 x_2 \dots x_\ell$ — это инвариант относительно $W(D_\ell)$

$\rightsquigarrow$ степени фундаментальных инвариантов равны $2, 4, 6, \dots, 2(\ell-1), \ell$.

Для исключительных групп — см. табличку в Бурбаки

$G_2 \rightsquigarrow$ степени $2, 6$

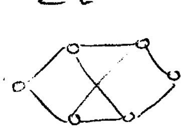
$$P(G/B, t) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{t^{d_i} - 1}{t - 1}$$

где d_i — степень i-ого фундаментального инварианта

// $P(G_m, t) = t - 1$

если посчитать коэффициент при t^k, получится количество элементов $w \in W$ длины k

Пример: A_2 — $2, 3$: $(1+t)(1+t+t^2) = 1 + 2t + 2t^2 + t^3$



$B_2 = C_2$ — $2, 4$: $(1+t)(1+t+t^2+t^3) =$
$= 1 + 2t + 2t^2 + 2t^3 + t^4$

G_2 — $2, 6$: $(1+t)(1+t+t^2+t^3+t^4+t^5) =$
$= 1 + 2t + 2t^2 + 2t^3 + 2t^4 + 2t^5 + t^6$

X

$\big\downarrow$ — слой F — локально трив. в топологии Зарисского

Y

X, Y — клеточные

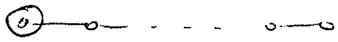
$\rightsquigarrow P(X, t) = P(Y, t) \cdot P(F, t)$

// для прямого произведения это формула Кюннета

Как $CH^*(Y)$-модуль $CH^*(X)$ свободен, и его базис параметризуется базисом $CH^*(F)$

$$\begin{array}{l} G/B \\ \Big\downarrow\ P/B = L/(L\cap B) \text{ — тоже вида } G'/B' \\ G/P \end{array}$$

Следовательно, $P(G/P, t) = \dfrac{P(G/B, t)}{P(P/B, t)}$

<u>Пример</u> $\mathbb{P}^n$ 

Фундаментальные инварианты A_n имеют степени $2, 3, \dots, n+1$

фунд. инварианты A_{n-1} — степени $2, 3, \dots, n$

После деления останется $\dfrac{t^{n+1}-1}{t-1}$ $\quad \left(\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}/\mathbb{A}^1\setminus\{0\}\right) = \mathbb{P}^n$

Q — квадрика, $\dim Q = 2n-2$ — группа D_n 

В числителе: $2, 4, \dots, 2(n-1), n$

В знаменателе: $2, 4, \dots, 2(n-2), n-1$

$$\rightsquigarrow \frac{\dfrac{t^{2(n-1)}-1}{t-1}\cdot\dfrac{t^{n}-1}{t-1}}{\left(\dfrac{t^{n-1}-1}{t-1}\right)} = \frac{t^n-1}{t-1}\left(t^{n-1}+1\right)$$

Возвращаемся к нерасщепимой ситуации.
Если G изотропна, то есть, в G есть подгруппа типа $\mathbb{G}_m$, то на любом G-однородном проективном многообразии возникает фильтрация: разности — аффинные расслоения над $Cent_G(\mathbb{G}_m)$-однородными проективными многообразиями

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_n \supset X_{n+1} = \emptyset$$

$$X_0 \xrightarrow{\mathbb{A}^{r_0}} Y_0 \qquad \dots \qquad X_n \xrightarrow{\mathbb{A}^{r_n}} Y_n$$

Как из диаграммы Хассе увидеть, какие будут Y_i и r_i?

Графический метод вычисления баз и сдвигов

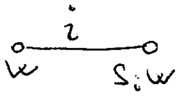
Пусть у G обведена k-я вершина, 

а $X_{\bar F} = G_{\bar F}/P$, и P соответствует

обведению каких-то других вершин

Рисуем диаграмму Хассе для $G_{\bar F}/P$

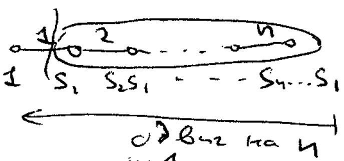
(слабого порядка Брюа)

Там на ребрах есть метки: 

Тогда надо стереть все ребра с меткой k

Диаграмма Хассе разобьется на компоненты связности; каждая из компонент будет диаграммой Хассе для какого-то однородного (относительно подгруппы Леви) многообразия. Сдвиги читаются из „сдвигов по горизонтали"

$\mathbb{P}^n$ – SL_{n+1}/P_1



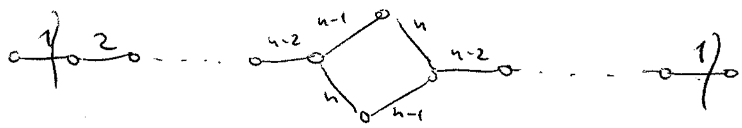
Пусть $k=1$

Остается диаграмма для $\mathbb{P}^{n-1}$ и для pt

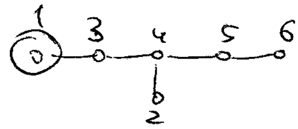
$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n \arrow[d, "\mathbb{A}^n"] & \supset \mathbb{P}^{n-1} \\ pt & \end{tikzcd}$$

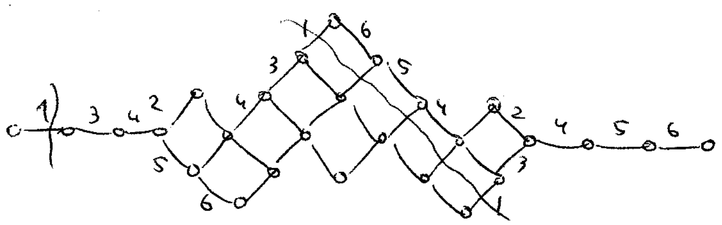
$$M(\mathbb{P}^n) = M(pt)\{n\} \oplus M(\mathbb{P}^{n-1})$$

Размерность слоя считаем по правой вершине: если правая вершина маленькой картинки в той же позиции, что и большой, то размерность слоя $= 0$; если уехала влево на r позиций, то размерность слоя равна r.



$$\rightsquigarrow M(Q) = M(pt) \oplus M(Q')\{1\} \oplus M(pt)\{2n-2\}$$





← квадрика

← картинка для D_5/P_5

$\rightsquigarrow M(E_6/P_1) = M(Q_8) \oplus M(A_5/P_5)\{5\} \oplus M(pt)\{16\}$

Если взять расщепимую G, то в ней есть $T = \underbrace{\mathbb{G}_m \times \dots \times \mathbb{G}_m}_{\ell \text{ раз}}$

элементы базиса в $CH^*_T(G/P)$ отвечают

T-неподвижным точкам на G/P

(и то, и другое, параметризуется смежными классами W/W_P)

G/P = замкнутая орбита в 27-мерном представлении

Весовые элементы T — неподвижные точки на G/P

W-орбиты одной точки, ее стабилизатор — W_P