${}_\xi G$; пусть в ней есть какая-то параболическая подгруппа Q'

$$\mathbb{G}_m \le {}_\xi G: \quad \{g \mid \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{G}_m}} tgt^{-1} \text{ определен}\} = Q'$$

L — подгруппа Леви

ну, или так: у ${}_\xi(G/Q_\bullet)$ есть рациональная точка

(тогда Q' = стабилизатор этой точки)

Пусть P — другая параболическая подгруппа в G

Тогда на $\underbrace{{}_\xi(G/P)}_{=X}$ есть фильтрация

$$X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset X_{n+1} = \emptyset$$

$X_i \setminus X_{i+1}$ расслаивается над дизъюнктным объединением L-однородных проективных многообразий; слой — $\mathbb{A}^{r_i}$

Если посмотрим на все связные компоненты $X_i \setminus X_{i+1}$, они нумеруются $W_Q\backslash W/W_P$

r_i — длина наименьшего представителя соответствующего смежного класса

Обоснование: посмотреть на действие $\mathbb{G}_m$ и воспользоваться теоремой Бялыницки-Бирули

Теперь не предполагаем, что в ${}_\xi G$ есть параболическая подгруппа:

$$X = {}_\xi(G/P), \quad Y = {}_\xi(G/Q), \quad P, Q \text{ — параболические в } G$$

Тогда на $X \times Y$ есть фильтрация:

X_i — объединения каких-то G-орбит на $X \times Y$

G-орбиты на $X\times Y \longleftrightarrow W_Q\backslash W/W_P$ — базы — дизъюнктные объединения ${}_\xi G$-однородных проективных

$Q\backslash G/P \qquad W_Q\backslash W/W_P$

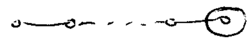
Пример

$$\cancel{SB(A)\times SB(A^{*}) \supset SB(A)}$$
$$\cancel{SB(A) \xrightarrow{\mathbb{A}^{\dim SB(A)}} SB(A)}$$

$$\begin{tikzcd} \underset{I}{SB(A)}\times \underset{J}{SB(A^{op})} \supset & \underset{IJ=0}{Y} \arrow[d, "\mathbb{A}^{\dim SB(A)}"] \\ & SB(A) \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} \underset{\langle u\rangle}{\mathbb{P}^n} \times \underset{\langle v\rangle}{\mathbb{P}^n} & \supset & \mathbb{P}^n \\ \downarrow & & \\ (\langle u\rangle, \langle u,v\rangle) & & \end{array}$$

$SB(A) \rightsquigarrow$ 

$SB(A^{op}) \rightsquigarrow$ 

$$\begin{array}{c} SB(A)\times SB(A) \supset SB(A) \\ \Big\downarrow \mathbb{A}^1 \\ SB_{1,2}(A) \end{array}$$

$\{I \subseteq J\}$ $\rotatebox{90}{=}$
$\dim I = \deg A$
$\dim J = 2\cdot \deg A$

Вычисления в $CH^*(G/P)$ (расщепимый случай)

① Достаточно делать все в $CH^*(G/P)\otimes \mathbb{Q}$

<u>Теорема Бореля</u>

$$CH^*(G/P)\otimes\mathbb{Q} \cong \left(S^*(X^*(T))\otimes\mathbb{Q}\right)^{W_P} \Big/ \left\langle \left(S^{\geq 1}(X^*(T))\otimes\mathbb{Q}\right)^{W}\right\rangle$$

$$S^*(X^*(T))\otimes\mathbb{Q} = \mathbb{Q}[\omega_1,\dots,\omega_l]$$

$$\mathbb{Q}[\omega_1,\dots\omega_l]^{W_P} \Big/ \langle \mathbb{Q}[\omega_1,\dots,\omega_l]^W_{\geq 1}\rangle$$

Для $P=B$:

$$CH^*(G/B)\otimes\mathbb{Q} \cong S^*(X^*(T)\otimes\mathbb{Q}) \Big/ \langle S^{\geq 1}(X^*(T))\otimes\mathbb{Q})^W\rangle$$

$$\begin{array}{c} G/B \\ \Big\downarrow P/B \\ G/P \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ „спектральная последовательность"
$\rightsquigarrow$ если знаем G/B и P/B, то знаем G/P
$P/B \cong L/(L\cap B)$
$\rightsquigarrow$ достаточно доказывать теорему Бореля для $P=B$

$$CH^*(G)\otimes\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$$

$$\begin{array}{ccc} CH^*(BB)\otimes\mathbb{Q} & \longrightarrow & CH^*(G/B)\otimes\mathbb{Q} \text{ сюръективно} \\ \uparrow & & \\ CH^*(BG)\otimes\mathbb{Q} & & \end{array}$$

$$B \longrightarrow G \longrightarrow G/B \longrightarrow BB \longrightarrow BG$$

Что значит точность последовательности $A^* \xrightarrow{\varphi} B^* \longrightarrow C^*$ в члене B^*?
(нулевая компонента предполагается $=\mathbb{Z}$)
то, что $\forall$ эл-т степени ≥ 1 уходит в 0 при композиции
и если $x\in B^*$ переходит в 0, то x лежит в идеале, порожденном $\varphi(A^{\geq 1})$

Нетривиальная часть в т. Бореля — доказать, что
$CH^*(BG)\otimes\mathbb{Q} = (CH^*(BB)\otimes\mathbb{Q})^W$

T-эквивариантные группы Чжоу

$T = \underbrace{\mathbb{G}_m \times \dots \times \mathbb{G}_m}_{\ell}$ $\qquad CH^*_T(X) \text{ "="} CH^*(X/\!/T)\text{"}$ — с точки зрения стеков

X — проективное гладкое многообразие с действием T

Положим $CH^*_T(X) = CH^*((X \times ET)/T)$

$$\begin{tikzcd} ET \arrow[d, "T\text{-торсор}"] \\ BT \end{tikzcd} \qquad \text{для } T = \mathbb{G}_m: \quad \begin{tikzcd} \mathbb{A}^\infty \setminus \{0\} \arrow[d, "\mathbb{G}_m"] \\ \mathbb{P}^\infty \end{tikzcd}$$

В общем случае
$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^\infty \setminus \{0\} \times \dots \times \mathbb{A}^\infty \setminus \{0\} \arrow[d, "\mathbb{G}_m \times \dots \times \mathbb{G}_m"] \\ \underbrace{\mathbb{P}^\infty \times \dots \times \mathbb{P}^\infty}_{\ell} \end{tikzcd}$$

если честно, то
$$CH^k_T(X) := CH^*\left(\left(X \times (\mathbb{A}^{100k+100} \setminus \{0\})^\ell\right)/T\right)$$

① Похожие формальные свойства:
локализация, пуллбэки, пушфорварды и т.п.

② $CH^*_T(X)$ — алгебра над $CH^*_T(pt) = CH^*(BT) = S^*(X^*(T))$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T\text{-эквивариантное}"] \arrow[d] & Y \\ (X \times (\mathbb{A}^N \setminus \{0\})^\ell)/T \arrow[r] & (Y \times (\mathbb{A}^N \setminus \{0\})^\ell)/T \end{tikzcd}$$

③ Если X — клеточное, то
$$CH^*(X) = CH^*_T(X) \big/ S^{\geq 1}(X^*(T))\, CH^*_T(X) \iff CH^*_T(X) \otimes_{CH^*_T(pt)} \mathbb{Z} \simeq CH^*(X)$$

④ $CH^*_T(X) \otimes \mathbb{Q}[(X^*(T) \setminus \{0\})^{-1}]$ — удивительное свойство

$\cong_{CH^*_T(pt)} CH^*(X^T) \otimes \mathbb{Q}[(X^*(T) \setminus \{0\})^{-1}]$ (теорема локализации Ботта)

подмногообразие неподвижных точек

В частности, X^T может состоять из изолированных точек.

Например, если $X = G/P$, так оно и происходит: $X^T = \{\text{изолированные непод. точки}\} \simeq W/W_P$

Замечание $\quad CH^*_T(X)$ как подкольцо правой части описывается в терминах T-инвариантных кривых

Пример

$X = \mathbb{P}^n \qquad SL_{n+1}/P_1$

$(t_0, \dots, t_n) \cdot [x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [t_0 x_0 : t_1 x_1 : \dots : t_n x_n]$

неподвижные точки:

$[1 : 0 : \dots : 0]$

$[0 : 1 : \dots : 0]$

$\vdots$

$[0 : 0 : \dots : 1]$

В общем случае для $w \in W/W_P$ нужно взять wP/P — это T-неподв. точка

$$twP/P = w(\underbrace{w^{-1}tw}_{\in T})P/P$$